جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

۲۲۔ **مثال ۱۔** ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اس کی ۱ فٹ قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ دریافت کرو۔

زاویہ میں نیمقطریوں کی تعداد $= \frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}} = \frac{۱}{۳}$

اس لیے زاویہ $= \frac{۱}{۳}$ نیمقطری

$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{\pi}$ زاویہ قائمہ

$= ۹۰^\circ \times \frac{۲}{۳\pi} = \frac{۶۰^\circ}{\pi} = ۱۹\frac{۱}{۱۱}^\circ$ اگر π کو $\frac{۲۲}{۷}$ کے برابر فرض کیا جائے۔

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے مقابل مرکزی زاویہ $۳۳^\circ ۱۵'$ ہو تو قوس کا طول دریافت کرو۔

اگر مطلوبہ طول لا ہو تو $\frac{\text{لا}}{۵} =$ زاویہ $۳۳^\circ ۱۵'$ میں نیمقطریوں کی تعداد

$= \frac{۳۳\frac{۱}{۴}}{۱۸۰}\pi$ (دفعہ ۱۹)

$= \frac{۱۳۳}{۷۲۰}\pi$

اس لیے لا $= \frac{۱۳۳}{۱۴۴}\pi$ فٹ $= \frac{۱۳۳}{۱۴۴} \times \frac{۲۲}{۷}$ فٹ تقریباً

$= ۲\frac{۶۵}{۷۲}$ فٹ تقریباً

مثال ۳۔ فرض کرو کہ سورج اور زمین کے درمیان اوسط فاصلہ ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل ہے اور سورج ایک شخص کی آنکھ پر $۳۲'$ کا زاویہ بناتا ہے، سورج کا قطر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ میلوں میں سورج کا قطر ق ہے۔

چونکہ سورج کے محاذی زاویہ نہایت چھوٹا ہے اس لیے اس کا قطر

ایک ایسے دائرہ کی چھوٹی سی قوس کے برابر ہے جس کا مرکز دیکھنے والے کی آنکھ ہے - نیز ہمیں معلوم ہے کہ اس دائرہ کے مرکز پر سورج کے مقابل زاویہ ۳۲′ بنتا ہے -

اس لیے بموجب دفعہ ۲۱

$$\frac{ق}{۹۲۵۰۰۰۰۰} = \text{نیمقطریوں کی تعداد ۳۲′ میں}$$

$$= \text{نیمقطریوں کی تعداد } \frac{۸}{۱۵}^\circ \text{ میں}$$

$$= \frac{۸}{۱۵} \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi ۲}{۶۷۵}$$

اس لیے $ق = \frac{۱۸۵۰۰۰۰۰}{۶۷۵} \pi$ میل

$$= \frac{۱۸۵۰۰۰۰۰}{۶۷۵} \times \frac{۲۲}{۷} \text{ میل تقریباً}$$

$= ۸۶۲۰۰۰$ میل تقریباً

مثال ۴ - فرض کرو کہ ایک درست بینائی والا شخص چھاپے کے حروف کو اتنے فاصلہ سے پڑھ سکتا ہے کہ حروف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۵′ کا زاویہ بنتا ہے اُن حروف کی اونچائی دریافت کرو جو وہ مفصلۂ ذیل فاصلوں سے پڑھ سکتا ہے ' (۱) ۱۲ فٹ (۲) $\frac{۱}{۲}$ میل -

فرض کرو کہ لا فٹ مطلوبہ اونچائی ہے -

پہلی صورت میں لا تقریباً ایک ایسے دائرہ کی قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر ۱۲ فٹ ہے اور جس کے مرکز پر قوس کے محاذی زاویہ ۵′ بنتا ہے -

اس لیے $\frac{لا}{۱۲}$ = تعداد نیمقطریوں کی ۵′ میں

$$= \frac{۱}{۱۲} \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

اس لیے $لا = \frac{\pi}{۱۸۰}$ فٹ $= \frac{۱}{۱۸۰} \times \frac{۲۲}{۷}$ فٹ تقریباً

$$= \frac{۱}{۱۵} \times \frac{۲۲}{۷} \text{ انچ} = \frac{۱}{۵} \text{ انچ تقریباً}$$

دوسری صورت میں اگر اونچائی ما ہو تو

$$\frac{\text{ما}}{۳ \times ۴۴۰} = \text{تعداد نیمقطریوں کی ۵َ میں}$$

$$= \frac{۱}{۱۲} \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

اس لیے $\text{ما} = \pi\,\frac{۱۱}{۱۸} = \frac{۱۱}{۱۸} \times \frac{۲۲}{۷}$ فٹ تقریباً

$= ۲۳$ انچ تقریباً

امثلہ نمبری ۴

[فرض کرو کہ π = ۳٫۱۴۱۵۹..... اور $\frac{۱}{\pi}$ = ۰٫۳۱۸۳۱]

۱۔ کسی دائرہ میں ایک قوس کا طول، نصف قطر کا ۰٫۳۵ گنا ہے اس کے محاذی مرکز پر جو زاویہ بنیگا اس میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۔ کسی دائرہ کا نصف قطر ۲۰ فٹ ہے، ایک ۵٫۱ فٹ قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے اس میں نیمقطریوں اور انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ ایک دائرہ کے بیرونی کنارہ پر درجے بنے ہوئے ہیں، اس میں ہر ایک درجہ کی زاویئی قیمت ۵َ ہے اور آپس میں درجوں کا فاصلہ ۰٫۱ انچ ہے، دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

۴۔ ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ۶ فٹ ہے اور ہر ایک درجہ کی زاویئی قیمت ۵َ ہے، متصل درجوں کا فاصلہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر ایک کرہ کے ایک ہی نصف النہار پر دو مقامات کے عرض بلدوں کا فرق ۰°۱َ ۳ہ ہو اور مقامات کے درمیان فاصلہ $\frac{۱}{۴}$ انچ ہو تو کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔

۶۔ فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔ دو ایسے مقامات کے عرض بلدوں کا فرق معلوم کرو جن میں سے ایک مقام دوسرے مقام کی نسبت ۱۰۰ میل شمال کی طرف واقع ہو۔

۷ - فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے اور اس کے دو دوائر متوازی العرض کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{9}$ ۶۹ میل ہے اور اس فاصلہ کے محاذی زمین کے مرکز پر زاویہ ۱° بنتا ہے، زمین کا نصف قطر دریافت کرو۔

۸ - ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے وتر کا طول بھی ۳ فٹ ہو تو قوس کے طول کی تقریبا قیمت دریافت کرو۔

۹ - دو دائروں کے مرکزوں پر مساوی قوسوں کے محاذی زاویے ۶۰° اور ۷۵° بنتے ہیں ان کے نصف قطروں کی باہمی نسبت دریافت کرو۔

۱۰ - ایک دائرہ کا قطر ۸ فٹ ہے اگر اس کی ۱۰ فٹ قوس کے محاذی مرکزی زاویہ ۴۴° ۴۸′ ۲۲″ بنے تو π کی قیمت ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱ - ایک دائرہ کے محیط کو ایسے ۵ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، اگر سب سے بڑا حصہ سب سے چھوٹے کا ۶ گنا ہو تو حصوں کے محاذی مرکزی زاویوں کی مقداروں کو نیمقطریوں میں دریافت کرو۔

۱۲ - ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا مجموعہ ایک ایسی نصف دائرہ قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو دائرہ کا ہے، قطاع کے زاویہ کو انگریزی درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱۳ - ایک آدمی کا قد ۶ فٹ ہے کتنے فاصلہ پر اس کے محاذی ۱۰′ کا زاویہ بنے گا؟

۱۴ - ایک شے کے محاذی ایک میل کے فاصلہ پر ۱′ کا زاویہ بنتا ہے اس کی اونچائی دریافت کرو۔

۱۵ - ایک کرہ کا قطر $\frac{1}{2}$ ۵ انچ ہے، معلوم کرو کہ کتنے فاصلے پر اس کے محاذی ۶′ کا زاویہ بنیگا؟

۱۶ - ایک مینار کی اونچائی ۱۵ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اس کے محاذی زاویہ $\frac{5}{11}$ ۵′ بنتا ہے، مینار اور آنکھ کے درمیان جو فاصلہ ہے اس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۷ - کسی گرجے کے مینار کی اونچائی ۱۰۰ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اس کے

محاذی زاویہ ۹ً بنتا ہے آنکھ اور گرجے کے درمیان جو فاصلہ ہے اس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک سطح مائل کا چڑھاؤ ۲۱۰ گز طول میں $\frac{1}{2}$ ۳ فٹ ہے سطح افقی سے اس کے میلان کی تقریبی قیمت دقیقوں میں معلوم کرو۔

۱۹۔ فرض کرو کہ زمین کا قطر ۷۹۶۰ میل ہے اور چاند کا فاصلہ زمین سے زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا ہے، اگر چاند کا نصف قطر زمین پر زاویہ ۱۶ً بنائے تو اس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۰۔ جب کسی خاص مقام پر چاند غروب ہو رہا ہو تو زمین کا نصف قطر جو اُس مقام میں سے گزرتا ہے چاند کے مرکز پر ۵۷ً کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل فرض کیا جائے تو چاند اور زمین کے فاصلے کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۱۔ فرض کرو کہ زمین کے نصف قطر کے محاذی سورج کے فاصلہ پر زاویہ ۸ٌ۶۶، بنتا ہے اور ایک جغرافی میل کے مقابل زمین کے مرکز پر زاویہ ۱ً بنتا ہے ثابت کرو کہ سورج کا فاصلہ زمین سے تقریباً ۸۱۰ لاکھ جغرافی میل ہے، نیز زمین کا قطر اور محیط دونوں جغرافی میلوں میں دریافت کرو۔

۲۲۔ مدار زمین کا نصف قطر ۹۲۰۰۰۰۰۰ میل ہے اور اس کے محاذی ستارہ شعریٰ (سریس) پر زاویہ ۴ٌ۰، بنتا ہے، ستارہ کا فاصلہ تقریبی طور پر دریافت کرو۔

دوسرا باب

ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو زاویہ قائمہ سے کم ہیں

۲۲۔ اس باب میں ہم صرف اُن زاویوں کے متعلق بحث کرینگے جو زاویۂ قائمہ سے کم ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خطِ دائر و ع مقام و ا سے چکّر لگاتا ہوا مقام و ع پر پہنچتا ہے۔ اور زاویہ ا و ع مرتسم کرتا ہے۔

ع
و م ا

خطِ دائر پر ایک نقطہ ع لو اور اس سے خطِ ابتدائی و ا پر ع م عمود نکالو۔

مثلث م و ع میں و ع وتر ہے، ع م عمود اور و م قاعدہ۔
زاویہ ا و ع کی مثلثی نسبتوں یا جملوں کی تعریف اکثر اس طرح کرتے ہیں۔

$\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$ کو زاویہ ا و ع کی جیب کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ " $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$ کو زاویہ ا و ع کی جیب التمام کہتے ہیں۔

$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}$ " $\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$ کو زاویہ ا و ع کا مماس کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ یعنی $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$ کو زاویہ ا و ع کا مماس التمام کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}$ " $\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$ کو زاویہ ا و ع کا قاطع التمام کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}$ " $\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$ کو " " " قاطع کہتے ہیں۔

کسی زاویہ کی جیب التمام ا سے جس قدر کم ہو اُسے یعنی مقدار ا۔جم ا و ع کو زاویۂ مذکور کی سہم الجیب کہتے ہیں۔نیز کسی زاویہ کی جیب ا سے جس قدر کم ہو یعنی مقدار ا۔جیب ا و ع کو زاویۂ مذکور کی سہم التمام کہتے ہیں۔

۲۴۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مثلثی نسبتیں سب اعداد ہیں۔

اوپر آٹھ نسبتوں کو اختصار کی خاطر بالترتیب یوں لکھتے ہیں۔

جیب ا و ع، جم ا و ع، مس ا و ع، مم ا و ع، قم ا و ع، قط ا و ع، سہ ا و ع، سم ا و ع

آخری دو نسبتیں شاذ و نادر استعمال ہوتی ہیں۔

۲۵۔ تعریفات سے ظاہر ہے کہ قاطع التمام جیب کا اُلٹ ہے۔

$$\text{یعنی قم ا و ع} = \frac{1}{\text{جیب ا و ع}}$$

اسی طرح قاطع زاویہ جیب التمام کا اُلٹ ہے یعنی

$$\text{قط ا و ع} = \frac{1}{\text{جم ا و ع}}$$

اور مماس التمام مماس کا اُلٹ ہے یعنی

$$\text{مم ا و ع} = \frac{1}{\text{مس ا و ع}}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی مثلثی نسبتیں ہمیشہ وہی رہتی ہیں۔یعنی جب تک زاویہ نہ بدلے وہ نہیں بدلتیں۔

یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ اگر خطِ دائر وع پر کوئی اَور نقطہ غَ لیا جائے اور اُس سے وا پر عمود غَ مَ نکالا جائے تو شلثی نسبتیں جو مثلثات وغَ مَ اور وع م سے حاصل ہونگی وہ قیمت میں ایک دوسرے کے برابر ہونگی

ان مثلثوں میں زاویہ و مشترک ہے
اور م اور مَ پر کے دونوں زاویے قائمے ہیں۔
اور اس لیے برابر ہیں۔
معلوم ہوا کہ یہ دونوں مثلث متشابہ ہیں
اور اس لیے بموجب اقلیدس م ۶ ش ۴، $\frac{م ع}{و ع} = \frac{مَ غَ}{و غَ}$ جس سے ثابت ہوا کہ زاویہ ا و ع کی جیب ہمیشہ وہی رہتی ہے خواہ کوئی سا نقطہ خطِ دائر پر لیا جائے۔
اور چونکہ بموجب مسئلہ مذکورہ

$$\frac{و م}{و ع} = \frac{و مَ}{و غَ} \text{ اور } \frac{م ع}{و م} = \frac{مَ غَ}{و مَ}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جیب التمام اور مماس زاویہ بھی ہمیشہ وہی رہتے ہیں خواہ نقطہ خطِ دائر پر کہیں لیا جائے اور باقی نسبتوں کی بھی یہی کیفیت ہے۔
اگر وا کو خطِ دائر خیال کریں اور اس کے کسی نقطہ غٗ سے وع پر عمود غٗ مٗ نکالیں تو مثلث وغٗ مٗ سے جو نسبتیں حاصل ہونگی ان کی قیمتیں بھی وہی ہونگی جو اوپر بیان ہوئیں کیونکہ دو مثلثات وع م اور وغٗ مٗ میں زاویہ و مشترک ہے اور زاویے و مٗ غٗ اور و م ع قائمے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں مثلث متساوی الزوایا ہیں اور اس لیے متشابہ ہیں۔ اسلیے

$$\frac{مٗ غٗ}{و غٗ} = \frac{م ع}{و ع} \text{ اور } \frac{و مٗ}{و غٗ} = \frac{و م}{و ع}$$

۲۷۔ کسی زاویے کی مثلثی نسبتوں کے اساسی روابط

ہمیں آگے چل کر معلوم ہوگا کہ اگر کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تو باقی سب نسبتوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ط زاویہ ا و ع کو تعبیر کرتا ہے۔

مثلث م و ع میں بموجب اقلیدس م ا ش ۴۷

$$\text{م ع}^2 + \text{و م}^2 = \text{و ع}^2 \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

و ع² پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}\right)^2 + \left(\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}\right)^2 = ۱$$

یعنی

$$(\text{جب ط})^2 + (\text{جم ط})^2 = ۱$$

مقدار (جب ط)² کو جب² ط لکھتے ہیں اور اسی طرح باقی سب نسبتوں کو۔

پس یہ ربط حاصل ہوا۔

$$\text{جب}^2\,\text{ط} + \text{جم}^2\,\text{ط} = ۱ \quad \ldots\ldots \quad (۲)$$

نیز طرفین مساوات (۱) کو و م² پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}\right)^2 + ۱ = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}\right)^2$$

یعنی

$$(\text{مس ط})^2 + ۱ = (\text{قط ط})^2$$

پس

$$\text{قط}^2\,\text{ط} = ۱ + \text{مس}^2\,\text{ط} \quad \ldots\ldots \quad (۳)$$

طرفین مساوات (۱) کو م ع² پر تقسیم کرنے سے

$$۱ + \left(\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}\right)^2 = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}\right)^2$$

یعنی

$$۱ + (\text{مم ط})^2 = (\text{قم ط})^2$$

پس

$$\text{قم}^2\,\text{ط} = ۱ + \text{مم}^2\,\text{ط} \quad \ldots\ldots \quad (۳)$$

نیز چونکہ جب ط = $\frac{م ع}{و ع}$ اور جم ط = $\frac{و م}{و ع}$

اس لیے $\frac{جب ط}{جم ط} = \frac{م ع}{و ع} \div \frac{و م}{و ع} = \frac{م ع}{و م} =$ مس ط

اس لیے $مس ط = \frac{جب ط}{جم ط}$ .... (۵)

اور اسی طرح سے $ظم ط = \frac{جم ط}{جب ط}$ .... (۶)

۲۸ - مثال ۱ - ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{۱ - جم ا}{۱ + جم ا}} =$ قم ا - ظم ا

$\sqrt{\frac{۱ - جم ا}{۱ + جم ا}} = \sqrt{\frac{(۱ - جم ا)^۲}{۱ - جم^۲ ا}}$

$= \frac{۱ - جم ا}{\sqrt{۱ - جم^۲ ا}} = \frac{۱ - جم ا}{جب ا}$

بموجب نتیجہ (۲) دفعہ آخر

$= \frac{۱}{جب ا} - \frac{جم ا}{جب ا} =$ قم ا - ظم ا

مثال ۲ - ثابت کرو کہ $\sqrt{قط^۲ ا + قم^۲ ا} =$ مس ا + ظم ا

ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ قط^۲ ا = ۱ + مس^۲ ا

اور قم^۲ ا = ۱ + ظم^۲ ا

اس لیے قط^۲ ا + قم^۲ ا = مس^۲ ا + ۲ + ظم^۲ ا

= مس^۲ ا + ۲ مس ا ظم ا + ظم^۲ ا

= (مس ا + ظم ا)^۲

اس لیے $\sqrt{قط^۲ ا + قم^۲ ا} =$ مس ا + ظم ا

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ

$$(\text{قم ا} - \text{جب ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا})(\text{مس ا} + \text{مم ا}) = ۱$$

$$\text{دیا ہوا جملہ} = \left(\frac{۱}{\text{جب ا}} - \text{جب ا}\right)\left(\frac{۱}{\text{جم ا}} - \text{جم ا}\right)\left(\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}\right)$$

$$= \frac{۱ - \text{جب}^{۲}\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{۱ - \text{جم}^{۲}\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب}^{۲}\text{ا} + \text{جم}^{۲}\text{ا}}{\text{جب ا جم ا}}$$

$$= \frac{\text{جم}^{۲}\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{\text{جب}^{۲}\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{۱}{\text{جب ا جم ا}} = ۱$$

امثلہ نمبری ۵

روابط ذیل کو ثابت کرو:-

۱- $\text{جم}^{۴}\text{ا} - \text{جب}^{۴}\text{ا} + ۱ = ۲\,\text{جم}^{۲}\text{ا}$

۲- $(\text{جب ا} + \text{جم ا})(۱ - \text{جب ا جم ا}) = \text{جب}^{۳}\text{ا} + \text{جم}^{۳}\text{ا}$

۳- $\frac{\text{جب ا}}{۱ + \text{جم ا}} + \frac{۱ + \text{جم ا}}{\text{جب ا}} = ۲\,\text{قم ا}$

۴- $\text{جم}^{۶}\text{ا} + \text{جب}^{۶}\text{ا} = ۱ - ۳\,\text{جب}^{۲}\text{ا} \times \text{جم}^{۲}\text{ا}$

۵- $\sqrt{\frac{۱ - \text{جب ا}}{۱ + \text{جب ا}}} = \text{قط ا} - \text{مس ا}$

۶- $\frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} - ۱} + \frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} + ۱} = ۲\,\text{قط}^{۲}\text{ا}$

۷- $\frac{\text{قم ا}}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جم ا}$

۸- $(\text{قط ا} + \text{جم ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا}) = \text{مس}^{۲}\text{ا} + \text{جب}^{۲}\text{ا}$

۹- $\frac{۱}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جب ا جم ا}$

۱۰- ۱ / (قط ا - مس ا) = قط ا + مس ا

۱۱- (۱ - مس ا) / (۱ + مس ا) = (مم ا - ۱) / (مم ا + ۱)

۱۲- (۱ + مس^{2} ا) / (۱ + مم^{2} ا) = جب^{2} ا / جم^{2} ا

۱۳- (قط ا - مس ا) / (قط ا + مس ا) = ۱ - ۲ قط ا مس ا + ۲ مس^{2} ا

۱۴- مس ا / (۱ - مم ا) + مم ا / (۱ - مس ا) = قط ا قم ا + ۱

۱۵- جم ا / (۱ - مس ا) + جب ا / (۱ - مم ا) = جب ا + جم ا

۱۶- (جب ا + جم ا) (مم ا + مس ا) = قط ا + قم ا

۱۷- قط^{4} ا - قط^{2} ا = مس^{4} ا + مس^{2} ا

۱۸- مم^{4} ا + مم^{2} ا = قم^{4} ا - قم^{2} ا

۱۹- √(قم^{2} ا - ۱) = جم ا قم ا

۲۰- قط^{2} ا قم^{2} ا = مس^{2} ا + مم^{2} ا + ۲

۲۱- مس^{2} ا - جب^{2} ا = جب^{4} ا قط^{2} ا

۲۲- (۱ + مم ا - قم ا) (۱ + مس ا + قط ا) = ۲

۲۳- ۱ / (قم ا - مم ا) - ۱ / جب ا = ۱ / جب ا - ۱ / (قم ا + مم ا)

۲۴- مم ا جم ا / (مم ا + جم ا) = (مم ا - جم ا) / (مم ا جم ا)

۲۵- (مم ا + مس ب) / (مم ب + مس ا) = مم ا مس ب

۲۶- $\left(\frac{\text{۱}}{\text{قط}^2\text{ع - جم}^2\text{ع}} + \frac{\text{۱}}{\text{قم}^2\text{ع - جب}^2\text{ع}}\right)\text{جم}^2\text{ع جب}^2\text{ع} = \frac{\text{۱ - جم}^2\text{ع جب}^2\text{ع}}{\text{۲ + جم}^2\text{ع جب}^2\text{ع}}$

۲۷- $\text{جب}^6\text{ا - جم}^6\text{ا} = (\text{جب}^2\text{ا - جم}^2\text{ا})(\text{۱ - ۲ جب}^2\text{ا جم}^2\text{ا})$

۲۸- $\frac{\text{جم ا قم ا - جب ا قط ا}}{\text{جم ا + جب ا}} = \text{قم ا - قط ا}$

۲۹- $\frac{\text{مس ا + قط ا - ۱}}{\text{مس ا - قط ا + ۱}} = \frac{\text{۱ + جب ا}}{\text{جم ا}}$

۳۰- $(\text{مس ع + قم ب})^2 - (\text{مم ب - قط ع})^2 = \text{۲ مس ع مم ب (قم ع + قط ب)}$

۳۱- $\text{۲ قط}^2\text{ع - قط}^4\text{ع - ۲ قم}^2\text{ع + قم}^4\text{ع} = \text{مم}^4\text{ع - مس}^4\text{ع}$

۳۲- $(\text{جب ع + قم ع})^2 + (\text{جم ع + قط ع})^2 = \text{مس}^2\text{ع + مم}^2\text{ع + ۷}$

۳۳- $(\text{قم ا + مم ا})\text{ سم ا} - (\text{قط ا + مس ا})\text{ سہ ا} = (\text{قم ا - قط ا})(\text{۲ - سہ ا سم ا})$

۳۴- $(\text{۱ + مم ا + مس ا})(\text{جب ا - جم ا}) = \frac{\text{قط ا}}{\text{قم}^2\text{ا}} - \frac{\text{قم ا}}{\text{قط}^2\text{ا}}$

۳۵- $\text{۲ سہ ا + جم}^2\text{ا} = \text{۱ + سہ}^2\text{ا}$

۲۹۔ مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کی حدود۔

مساوات (۲) دفعہ ۲۷ سے

$\text{جب}^2\text{ط + جم}^2\text{ط} = \text{۱}$

اب چونکہ جب^2 ط اور جم^2 ط دونوں مربع ہیں اس لیے ضروری ہے کہ وہ مثبت ہوں اور چونکہ ان کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی بھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

[کیونکہ اگر ان میں سے ایک مربع مثلاً جب^2 ط ایک سے بڑا ہو تو ضرور ہے کہ دوسرا منفی ہو اور یہ غیر ممکن ہے]

پس معلوم ہوا کہ جیب اور جیب التمام دونوں میں سے کوئی بھی تعدادا ً ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

اب چونکہ جیب طہ ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے قم طہ جو ۱/جیب طہ کے برابر ہے ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔

اسی طرح سے قط طہ جو ۱/جم طہ کے برابر ہے مقداراً ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔

۳۰ - شکل دفعہ ہذا سے نتائج مذکورۂ بالا بآسانی حاصل ہوتے ہیں - کیونکہ زاویہ ا و ع کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو اضلاع و م اور م ع طول میں وتر و ع سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتے۔

اب چونکہ م ع وتر و ع سے کبھی بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے نسبت م ع/و ع ایک سے کبھی بڑی نہیں ہو سکتی اس سے ظاہر ہے کہ جیب زاویہ ایک سے کبھی بڑھ نہیں سکتی۔

نیز چونکہ و م وتر و ع سے ہمیشہ کم رہتا ہے اس لیے نسبت و م/و ع ایک سے ہمیشہ کم ہوگی یعنی جیب التمام ایک سے کبھی بڑی نہ ہوگی۔

۳۱ - ہم کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو کسی ایک نسبت کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ اس ترکیبِ عمل کی توضیح امثلۂ ذیل سے ہوگی:-

مثال ۱ - کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو جیب کی رقوم میں بیان کرو۔

فرض کرو کہ ا و ع کوئی زاویہ طہ ہے اور و ع کا طول اکائی ہے اور ع م کا متناظر طول ج ہے۔

اقلیدس م ۱ ش ۴۷ سے و م = √(و ع² - م ع²) = √(۱ - ج²)

اس لیے جب طہ = م ع/و ع = ج/۱ = ج

جم طہ = و م/و ع = √(۱ - ج²) = √(۱ - جب² طہ)

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{۱} - \text{ج}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{جب ط}}{\sqrt{\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ ط}}}$$

$$\text{مم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{م ع}} = \frac{\sqrt{\text{۱} - \text{ج}^{\text{۲}}}}{\text{ج}} = \frac{\sqrt{\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ ط}}}{\text{جب ط}}$$

$$\text{قم ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{\text{۱}}{\text{ج}} = \frac{\text{۱}}{\text{جب ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{ج}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ ط}}}$$

آخری پانچ مساواتوں سے جو کچھ مطلوب تھا حاصل ہوا۔

مثال ۲۔ سب مثلثی نسبتوں کو مماس التمام کی رقوم میں بیان کرو۔

حسب معمول شکل بناؤ اور فرض کرو کہ م ع کا طول اکائی ہے اور و م کا تناظر طول لا ہے۔

اقلیدس م ۱ ش ۴۷ سے

$$\text{و ع} = \sqrt{\text{و م}^{\text{۲}} + \text{م ع}^{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$$

اس لیے

$$\text{مم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{م ع}} = \frac{\text{لا}}{\text{۱}} = \text{لا}$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} + \text{مم}^{\text{۲}}\text{ ط}}}$$

$$\text{جم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{مم ط}}{\sqrt{\text{۱} + \text{مم}^{\text{۲}}\text{ ط}}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{۱}}{\text{لا}} = \frac{\text{۱}}{\text{مم ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{مم}^{\text{۲}}\text{ط}}}{\text{مم ط}}$$

$$\text{اور}\quad \text{قم ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{۱}} = \sqrt{\text{۱} + \text{مم}^{\text{۲}}\text{ط}}$$

جو کچھ مطلوب تھا آخری پانچ مساواتوں سے حاصل ہوا۔

یاد رہے کہ اوپر کی ہر ایک صورت میں اس کسر کا نسب نما جس کی رقوم میں باقی مثلثی نسبتوں کو بیان کرنا مطلوب ہے ہمیشہ اکائی لیا گیا ہے۔ مثلاً زاویہ ط کی جیب $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ ہے۔ اس لیے مثال ۱ میں نسب نما و ع کا طول ایک کے برابر لیا گیا ہے۔ اور چونکہ مماس التمام $\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ ہے اس لیے مثال ۲ میں ضلع م ع کو ایک کے مساوی فرض کیا ہے۔

اسی طرح سے اگر باقی مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرنا ہو تو چونکہ جیب التمام $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ہے اس لیے و ع کو ایک کے برابر فرض کرنا چاہیے اور و م کو لا کے۔ اس کے بعد عمل بالکل ایسا ہی ہوگا جیسا کہ امثلہ ۱ اور ۲ میں ہوا۔

امثلہ ذیل میں اضلاع کی قیمتیں عددی ہیں۔

مثال ۳۔ اگر جم ط = $\frac{\text{۳}}{\text{۵}}$ تو باقی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

خط ابتدائی ء ا پر و م برابر ۳ کے اور ایک عمود م ع کھینچو۔ نیز فرض کرو کہ ایک خط و ع جس کا طول ۵ ہے نقطہ و کے گرد چکر لگاتا ہوا عمود م ع کو نقطہ ع پر قطع کرتا ہے تب ا و ع زاویہ مجوزہ ہوگا۔

بموجب اقلیدس م ۱، ش ۴۷، $\text{م ع} = \sqrt{\text{و ع}^{\text{۲}} - \text{و م}^{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۵}^{\text{۲}} - \text{۳}^{\text{۲}}} = \text{۴}$

اس لیے صریحاً۔

جب ط = $\frac{\text{۴}}{\text{۵}}$، مس ط = $\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$، مم ط = $\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$، قم ط = $\frac{\text{۵}}{\text{۴}}$ اور قط ط = $\frac{\text{۵}}{\text{۳}}$

مثال ۴۔ اگر زاویہ ط کی جیب $\frac{۱}{۳}$ ہو تو باقی مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ جیب ط = $\frac{۱}{۳}$، اس لیے ربط (۲) دفعہ ۲۷ سے ظاہر ہے کہ

$\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲$ + جم^۲ ط = ۱

یعنی جم^۲ ط = ۱ − $\frac{۱}{۹}$ = $\frac{۸}{۹}$

یعنی جم ط = $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

اس لیے مس ط = $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}}$ = $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ = $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

عم ط = $\frac{۱}{\text{مس ط}}$ = ۲$\sqrt{۲}$

قم ط = $\frac{۱}{\text{جب ط}}$ = ۳

قط ط = $\frac{۱}{\text{جم ط}}$ = $\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$ = $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

سہ ط = ۱ − جم ط = ۱ − $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

سم ط = ۱ − جب ط = ۱ − $\frac{۱}{۳}$ = $\frac{۲}{۳}$

۳۴ - نقشۂ ذیل میں ہر مثلثی نسبت کو باقی سب نسبتوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے -

	جب ط	جم ط	مس ط	مم ط	قط ط	قم ط
جب ط	جب ط	$\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ط}}$	$\frac{\text{مس ط}}{\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مم}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{\text{قط}^2\,\text{ط}-1}}{\text{قط ط}}$	$\frac{1}{\text{قم ط}}$
جم ط	$\sqrt{1-\text{جب}^2\,\text{ط}}$	جم ط	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{\text{مم ط}}{\sqrt{1+\text{مم}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{قط ط}}$	$\frac{\sqrt{\text{قم}^2\,\text{ط}-1}}{\text{قم ط}}$
مس ط	$\frac{\text{جب ط}}{\sqrt{1-\text{جب}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ط}}}{\text{جم ط}}$	مس ط	$\frac{1}{\text{مم ط}}$	$\sqrt{\text{قط}^2\,\text{ط}-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{قم}^2\,\text{ط}-1}}$
مم ط	$\frac{\sqrt{1-\text{جب}^2\,\text{ط}}}{\text{جب ط}}$	$\frac{\text{جم ط}}{\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{مس ط}}$	مم ط	$\frac{1}{\sqrt{\text{قط}^2\,\text{ط}-1}}$	$\sqrt{\text{قم}^2\,\text{ط}-1}$
قط ط	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جب}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{جم ط}}$	$\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{ط}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مم}^2\,\text{ط}}}{\text{مم ط}}$	قط ط	$\frac{\text{قم ط}}{\sqrt{\text{قم}^2\,\text{ط}-1}}$
قم ط	$\frac{1}{\text{جب ط}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{ط}}}{\text{مس ط}}$	$\sqrt{1+\text{مم}^2\,\text{ط}}$	$\frac{\text{قط ط}}{\sqrt{\text{قط}^2\,\text{ط}-1}}$	قم ط

امثلہ نمبری ۶

۱ ۔ سب مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرو ۔
۲ ۔ سب نسبتوں کو مماس کی رقوم میں بیان کرو ۔
۳ ۔ سب نسبتوں کو قاطع التمام کی رقوم میں بیان کرو ۔
۴ ۔ سب نسبتوں کو قاطع کی رقوم میں بیان کرو ۔
۵ ۔ ایک زاویہ کی جیب ۱/۴ ہے اس کی اور مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو ۔
۶ ۔ اگر جب ط = ۱۲/۱۳ تو مس ط اور سہ ط کی قیمتیں دریافت کرو ۔
۷ ۔ اگر جب ا = ۱۱/۶۱ تو مس ط، جم ط اور قط ط دریافت کرو ۔
۸ ۔ اگر جم ط = ۴/۵ تو جب ط اور مم ط معلوم کرو ۔
۹ ۔ اگر جم ا = ۹/۴۱ تو مس ا اور قم ا دریافت کرو ۔
۱۰ ۔ اگر مس ط = ۳/۴ تو زاویہ ط کی جب، جم، سہ اور قم دریافت کرو ۔
۱۱ ۔ اگر مس ط = ۱/√۷ تو (قم^۲ ط ۔ قط^۲ ط)/(قم^۲ ط + قط^۲ ط) کی قیمت دریافت کرو ۔
۱۲ ۔ اگر مم ط = ۱۵/۸ تو جم ط اور قم ط کی قیمتیں دریافت کرو ۔
۱۳ ۔ اگر قط ا = ۳/۲ تو معلوم کرو مس ا اور قم ا ۔
۱۴ ۔ اگر ۲ جب ط = ۲ ۔ جم ط تو جب ط دریافت کرو ۔
۱۵ ۔ اگر ۸ جب ط = ۴ + جم ط تو معلوم کرو جب ط ۔
۱۶ ۔ اگر مس ط + قط ط = ۱٫۵ تو معلوم کرو جب ط ۔
۱۷ ۔ اگر مم ط + قم ط = ۵ تو معلوم کرو جم ط ۔
۱۸ ۔ اگر ۳ قط^۴ ط + ۸ = ۱۰ قط^۲ ط تو مس ط کی قیمت دریافت کرو ۔
۱۹ ۔ اگر مس^۲ ط + قط ط = ۵ تو معلوم کرو جم ط ۔
۲۰ ۔ اگر مس ط + مم ط = ۲ تو معلوم کرو جب ط ۔
۲۱ ۔ اگر قط^۲ ط = ۲ + ۲ مس ط تو معلوم کرو مس ط ۔
۲۲ ۔ اگر مس ط = ۲ل (ل + ۱)/(۲ل + ۱) تو معلوم کرو جب ط اور جم ط ۔

چند کارآمد صورتوں میں مثلثی نسبتوں کی قیمتیں

۳۳۔ ۴۵° کا زاویہ۔

فرض کرو کہ زاویۂ مرتسمہ ا و ع = ۴۵°

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ۲ قائموں کے برابر ہوتا ہے اس لیے

زاویہ و ع م = ۱۸۰° ۔ زاویہ ع و م ۔ زاویہ ع م و

= ۱۸۰° ۔ ۴۵° ۔ ۹۰° = ۴۵° = زاویہ ع و م

∴ و م = م ع

اگر و ع کو ۲ ل کے برابر فرض کریں تو

۴ ل² = و ع² = و م² + م ع² = ۲ × و م²

یعنی و م = ل $\sqrt{2}$

اس لیے جب ۴۵° = م ع / و ع = ل $\sqrt{2}$ / ۲ ل = ۱ / $\sqrt{2}$

جم ۴۵° = و م / و ع = ل $\sqrt{2}$ / ۲ ل = ۱ / $\sqrt{2}$

اور مس ۴۵° = ۱

۳۴۔ ۳۰° کا زاویہ۔

فرض کرو کہ ۳۰° کا زاویہ م و ع ہے،

ع م کو عَ تک خارج کرو اور م عَ کو ع م کے برابر بناؤ۔

مثلث و م ع اور و م عَ میں

اضلاع و م اور م عَ اضلاع و م اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس لیے

و عَ = و ع اور زاویہ و عَ ع = زاویہ و ع عَ = ۶۰°

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث عَ و ع مساوی الاضلاع ہے۔

اب اگر　و ع کا طول ۲ ل ہو

تو　م ع = $\frac{1}{2}$ عَ ع = $\frac{1}{2}$ و ع = ل

نیز　و م = $\sqrt{\text{وع}^2 - \text{مع}^2} = \sqrt{۴\text{ل}^2 - \text{ل}^2} = \sqrt{۳}$ ل

∴ جب ۳۰° = $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{1}{2}$

جم ۳۰° = $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\sqrt{۳}\ \text{ل}}{۲\ \text{ل}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

اور　مس ۳۰ = $\frac{\text{جب ۳۰°}}{\text{جم ۳۰°}} = \frac{1}{\sqrt{۳}}$

۳۵- ۶۰° کا زاویہ

فرض کرو کہ ۶۰° کا زاویہ ا و ع ہے

و ا پر ایک ایسا نقطہ ن لو کہ

م ن = و م = ل (فرض کرو)

اب مثلث و م ع کے اضلاع و م

اور م ع مثلث ن م ع کے اضلاع ن م اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس سے معلوم ہوا کہ مثلث باہم مساوی ہیں۔

اس لیے　ع ن = و ع　اور

∠ ع ن م = ∠ ع و م = ۶۰°

اس سے ثابت ہوا کہ مثلث و ع ن مساوی الاضلاع ہے۔

اس لیے　و ع = و ن = ۲ و م = ۲ ل

∴　م ع = $\sqrt{\text{وع}^2 - \text{وم}^2} = \sqrt{۴\text{ل}^2 - \text{ل}^2} = \sqrt{۳}\times$ ل

اس لیے جب ۶۰° = $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\sqrt{۳}\ \text{ل}}{۲\ \text{ل}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

جم ۶۰° = $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ل}}{۲\ \text{ل}} = \frac{1}{2}$

اور $\qquad$ مس ۶۰° = $\frac{\text{جب ۶۰°}}{\text{جم ۶۰°}}$ = $\sqrt{3}$

۳۶۔ صفر درجہ (۰°) کا زاویہ۔

فرض کرو کہ خط دائرہ وع نے وے گرد گھومنے سے نہایت ہی قلیل زاویہ پیدا کیا ہے۔

یعنی فرض کرو کہ زاویہ م وع نہایت چھوٹا ہے۔

ظاہر ہے کہ مقدار ع م نہایت ہی قلیل ہے اور ابتدا میں جب وع نے اُس زاویہ کا مرتسم کرنا عین شروع ہی کیا تھا تو اُس وقت مقدار م ع ہر مقدار معینہ سے کم تھی یعنی ایک ایسی مقدار تھی جسے ہم صفر سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ

زاویہ ا وع واقعی صفر کے برابر ہے تو

تو اس صورت میں وم اور وع

(اور نقاط ع اور م) ایک دوسرے پر

منطبق ہونگے اور عمود ع م معدوم ہو جائیگا۔

اس لیے $\qquad$ وم = وع اور ع م = ۰

∴ جب ۰° = $\frac{\text{م ع}}{\text{وع}}$ = $\frac{0}{\text{وع}}$ = ۰

جم ۰° = $\frac{\text{وم}}{\text{وع}}$ = $\frac{\text{وع}}{\text{وع}}$ = ۱

اور مس ۰° = $\frac{0}{1}$ = ۰

نیز مم ۰° = قیمت نسبت $\frac{\text{وم}}{\text{م ع}}$ جبکہ م اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں)۔

= $\frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}}$ = ایک ایسی مقدار جو لا انتہا بڑی ہے۔

ایسی مقدار کو ∞ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اس لیے مم ۰° = ∞

اسی طرح سے قم $\therefore = \frac{وع}{مع} = \infty$

اور قط $\therefore = \frac{وع}{وم} = ۱$

۳۷۔ ۹۰° کا زاویہ۔

فرض کرو کہ زاویہ ا و ع مقدار میں ۹۰° کے نہایت ہی قریب ہے مگر بالکل ۹۰° نہیں ہے۔

جب و ع فی الحقیقت ایک قائمہ مرتسم کریگا تو اس وقت نقطہ م نقطہ و پر منطبق ہوگا یعنی و م صفر ہوگا اور و ع برابر م ع کے ہوگا۔ پس

جب ۹۰° $= \frac{مع}{وع} = \frac{وع}{وع} = ۱$

جم ۹۰° $= \frac{وم}{وع} = \frac{۰}{وع} = ۰$

مس ۹۰° $= \frac{مع}{وم} = \frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}}$

= لا انتہا بڑا عدد $= \infty$

ظم ۹۰° $= \frac{وم}{مع} = \frac{۰}{مع} = ۰$

قط ۹۰° $= \frac{وع}{وم} = \infty$ (بعینہٖ اُس عمل سے جو ماس کی صورت میں ہوا)

اور قم ۹۰° $= \frac{وع}{مع} = \frac{وع}{وع} = ۱$

۳۸۔ متمم زاویے۔ تعریف۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہو تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا متمم کہتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ کوئی زاویہ طہ ہے تو اس کا متمم زاویہ ۹۰° - طہ ہوگا۔

۳۹- دو متمم زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی روابط دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط و ا سے شروع ہوکر مقام و ع پر پہنچا ہے اور اپنے گھماؤ سے زاویہ ا و ع یعنی زاویہ طہ پیدا کرتا ہے۔ خطِ دائر و ع پر کوئی نقطہ ع لو اور اس سے و ا پر عمود ع م نکالو۔

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے اور چونکہ زاویہ و م ع قائمہ ہے اس لیے معلوم ہوا کہ زاویہ م و ع اور زاویہ و ع م کا حاصلِ جمع ایک قائمہ کے برابر ہے۔ پس یہ دونوں زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوئے۔

یعنی زاویہ و ع م = ۹۰° - طہ

[جس وقت زاویہ و ع م زیرِ بحث ہو تو یاد رہے کہ خط ع م "قاعدہ" ہے اور م و "عمود"]

پس

جب (۹۰° - طہ) = جب م ع و = $\frac{\text{م و}}{\text{ع و}}$ = جم ا و ع = جم طہ

جم (۹۰° - طہ) = جم م ع و = $\frac{\text{ع م}}{\text{ع و}}$ = جب ا و ع = جب طہ

مس (۹۰° - طہ) = مس م ع و = $\frac{\text{م و}}{\text{ع م}}$ = مم ا و ع = مم طہ

مم (۹۰° - طہ) = مم م ع و = $\frac{\text{ع م}}{\text{م و}}$ = مس ا و ع = مس طہ

قم (۹۰° - طہ) = قم م ع و = $\frac{\text{ع و}}{\text{م و}}$ = قط ا و ع = قط طہ

قط (۹۰° ـ ط) = قط م ع و = $\frac{\text{ع و}}{\text{ع م}}$ = قم ا و ع = قم ط

اس لیے معلوم ہوا کہ

کسی زاویہ کی جیب = اس کے متمم کی جیب التمام کے

کسی زاویہ کا مماس = اس کے متمم کے مماس التمام کے

کسی زاویہ کا قاطع = اس کے متمم کے قاطع التمام کے

۳۴ ۔ طالب علم کو آگے جانے سے پیشتر جدول ذیل سے بخوبی واقف ہو جانا چاہیے [اس جدول کی توسیع کے لیے ملاحظہ ہو دفعہ ۷۶]

زاویہ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
جیب	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰
مماس	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	∞
مماس التمام	∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	۱
قاطع الزاویہ	۱	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	۲	∞

اگر طالب علم صرف اس حصہ کو بخوبی یاد کرلے جو جلی خط کے اندر ہے تو اُس کی مدد سے باقی مثلثی نسبتوں کا حساب بآسانی لگ سکیگا ۔

کیونکہ

(۱) جیوب ۶۰° اور ۹۰° بالترتیب جیوب التمام ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں۔

(۲) جیوب التمام ۶۰° اور ۹۰° جیوب ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں

اس سے دوسری اور تیسری سطریں معلوم ہوتی ہیں۔

(۳) کسی زاویہ کا مماس جیب کو جیب التمام پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ چوتھی سطر کی کوئی مقدار دوسری سطر کی کسی مقدار کو تیسری سطر کی تناظر مقدار پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۴) چونکہ زاویہ کا مماس التمام اس کے مماس کا متکافی ہوتا ہے اس لیے پانچویں سطر کی مقداریں چوتھی سطر کی مقداروں کے متکافیوں کے برابر ہیں۔

(۵) چونکہ قم ط = $\frac{۱}{\text{جب ط}}$ اس لیے چھٹی سطر دوسری کی مقادیر کو اُلٹنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۶) اور چونکہ قط ط = $\frac{۱}{\text{جم ط}}$ اس لیے معلوم ہوا کہ ساتویں سطر تیسری سطر کی مقادیر کو اُلٹنے سے حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۷

۱۔ اگر ا = ۳۰° تو تصدیق کرو کہ

(۱) جم ۲ ا = جم^۲ ا - جب^۲ ا = ۲ جم^۲ ا - ۱

(۲) جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا

(۳) جم ۳ ا = ۴ جم^۳ ا - ۳ جم ا

(۴) جب ۳ ا = ۳ جب ا - ۴ جب^۳ ا

(۵) مس ۲ ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ - مس}^۲\text{ ا}}$

۲ - اگر ا = ۴۵° تو اس کی تصدیق کرو کہ

(۱) جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا

(۲) جم ۲ا = ۱ - ۲ جب² ا

(۳) مس ۲ا = ۲ مس ا / (۱ - مس² ا)

اس کی تصدیق کرو کہ

۳ - جب² ۳۰° + جب² ۴۵° + جب² ۶۰° = ۳/۲

۴ - مس² ۳۰° + مس² ۴۵° + مس² ۶۰° = ۴ ۱/۳

۵ - جب ۳۰° جم ۶۰° + جم ۳۰° جب ۶۰° = ۱

۶ - جم ۴۵° جم ۶۰° - جب ۴۵° جب ۶۰° = - (√۳ - ۱) / (۲ √۲)

۷ - ۴/۳ ممس² ۳۰° + ۳ جب² ۶۰° - ۲ قمم² ۶۰° - ۳/۴ مس² ۳۰° = ۳ ۱/۳

۸ - قمم² ۴۵° × قط² ۳۰° × جب³ ۹۰° × جم ۶۰° = ۱ ۱/۳

۹ - ۴ ممس² ۴۵° - قط² ۶۰° + جب³ ۳۰° = ۱/۸

تیسرا باب

بلندیوں اور فاصلوں کے آسان سوالات

۴۱۔ علم مثلث کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ہے کہ اس کی مدد سے اشیاء کی بلندیاں اور مختلف نقاط کے باہمی فاصلے حقیقی طور پر ناپے بغیر دریافت ہو سکیں۔

۴۲۔ فرض کرو کہ و اور ع دو نقطے ہیں اور ع بہ نسبت و کے اونچی سطح پر واقع ہے۔

نقطہ و سے ایک خط اُفقی وم کھینچو جو انتصابی خط ع م کو نقطہ م پر قطع کرے۔ اگر مقام و پر کھڑے ہو کر نقطہ ع کی سمت میں دیکھیں تو زاویہ م و ع جو خطِ نظری و ع اور خطِ اُفقی و م کے درمیان بنتا ہے نقطۂ ع کا **زاویۂ ارتفاع** یا زاویہ فراز کہلاتا ہے۔

م و کے متوازی ع ن کھینچو تب نقطہ ع میں سے گزرنے والا خط موفقی ع ن ہو گا۔ اب اگر مقام ع سے نیچے کی طرف کو نقطہ و کی سیدھ میں دیکھیں تو زاویہ ن ع و جو خطِ نظری ع و اور خطِ اُفقی ع ن کے درمیان بنتا ہے نقطہ و کا زاویۂ **انخفاض** یا زاویۂ نشیب کہلاتا ہے۔

۴۳۔ زاویوں کی عملی پیمایش کے لیے دو آلے اکثر استعمال ہوتے ہیں۔ زاویہ گیر

(تھیڈو لائیٹ) اور سُدس (سکس ٹنٹ) ۔

زاویہ گیر سے اکثر سطح انتصابی میں زاویوں کا اندازہ ہو سکتا ہے ۔ اس کی نہایت سادہ صورت یہ ہے ۔ ایک دوربین لکڑی کی چپٹی تختی پر قائم کر دی جاتی ہے ۔ سہارے کے لیے اس تختی کے تین پایے ہوتے ہیں اور ان کو ہموار سطح پر اس طرح رکھتے ہیں کہ تختی اور دُور بین دونوں سطح اُفقی میں ہوں ۔

فرض کرو کہ یہ تختی مقام و پر متوازی الافق ہے اور دُوربین کا رُخ ابتدا میں سمت و م میں ہے ۔ اب دُوربین کو سطح انتصابی میں پھراتے جاؤ جب تک کہ اس کا رخ عین نقطہ ع کی سیدھ میں نہ ہوجائے ۔ جب ایسا ہو تو ایک درجہ دار پیمانہ سے ہم کو دوربین کے گھماؤ کے زاویہ کی مقدار معلوم ہوجائیگی ‘ یعنی ہم کو زاویۂ ارتفاع م و ع معلوم ہوجائیگا ۔

اسی طرح سے اگر آلہ مقام ع پر ہو تو زاویہ ن ع و جس میں سے دوربین سمت افقی سے نیچے کی طرف نقطۂ و کے محاذی ہونے کے لیے پھریگی زاویۂ انخفاض ن ع ہ ہوگا ۔

اس آلہ کی مدد سے ان زاویوں کی پیمایش بھی ممکن ہے جو سطح اُفقی میں واقع ہوں ۔

۴۴ ۔ سُدس (سکس ٹنٹ) سے ایسے زاویوں کی پیمایش ہو سکتی ہے جو کسی دو نقاط و اور ع کے خط وصل کے محاذی تیسرے نقطہ ف پر بنیں ۔ اکثر یہ آلہ جہازوں پر استعمال ہوتا ہے ۔ اس کی بناوٹ اور اس کا استعمال ذرا پیچیدہ ہے لہذا ہم اس جگہ اس کا ذکر نہیں کرتے ۔

۴۵ ۔ اب ہم فاصلوں اور بلندیوں کی چند آسان مثالیں حل کرینگے ۔

مثال ۱ ۔ سطح ہموار پر ایک علم قائم ہے اس کے پائین سے ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر ایک مقام سے اس کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے ‘ علم کی بلندی دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ م ع (شکل دفعہ ۴۲) علم ہے اور و ایسا نقطہ ہے جس سے زاویۂ ارتفاع دیکھا گیا ہے ۔

تب و م = ۱۵۰ فٹ اور زاویہ م و ع = ۳۰°

اب چونکہ ع م و زاویۂ قائمہ ہے اس لیے

$$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \text{مس م و ع} = \text{مس } ۳۰° = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \quad (\text{دفعہ ۳۴})$$

∴ م ع = ا م / √۳ = ۱۵۰ / √۳ = ۱۵۰√۳ / ۳ = ۵۰√۳

اور استخراج جذر سے √۳ = ... ۱٫۷۳۲۰۵

اس لیے م ع = ۵۰ × .... ۱٫۷۳۲۰۵ فٹ

= .... ۸۶٫۶۰۲۵ فٹ

مثال ۲ - سطح اُفقی پر ایک گرجے کا مینار ہے اور ایک شخص اس کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے۔ سطح کے کسی مقام سے اس نے مینار کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع ۴۵° مشاہدہ کیا اور ۱۰۰ فٹ بُرج کی سمت میں جانے پر زاویۂ ارتفاع ۶۰° دیکھا۔ بُرج کی بلندی اور پائین بُرج سے اس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مینار کی چوٹی ع ہے اور ا اور ب دو مقامات ہیں جہاں سے زاویوں کے ارتفاع مشاہدہ کیے گئے ہیں۔ ا ب ممدودہ پر عمود ع م نکالو اور فرض کرو کہ م ع = لا

ہمیں معلوم ہے ا ب = ۱۰۰ فٹ

∠ م ا ع = ۴۵°

اور ∠ م ب ع = ۶۰°

اس سے ا م / لا = مم ۴۵°

اور ب م / لا = مم ۶۰° = ۱ / √۳

اس لیے ا م = لا اور ب م = لا / √۳

∴ ۱۰۰ = ا م - ب م = لا - لا / √۳ = لا (√۳ - ۱) / √۳

∴ لا = ۱۰۰√۳ / (√۳ - ۱) = ۱۰۰√۳ (√۳ + ۱) / (۳ - ۱) = ۵۰ (۳ + √۳)

= ۵۰ (۳ + ۱٫۷۳۲۰۵.......) = ... ۲۳۶٫۶ فٹ

نیز ا م = لا، اس سے معلوم ہوا کہ ہر دو مطلوبہ فاصلے .... ۲۳۶٫۶ فٹ ہیں۔

۱۵- ۱۱گ ۱۰' ۳۰''   ۱۶- ۳۴۵گ ۲۵' ۳۶''

۱۷- ایک مثلث قائم الزاویہ کے دو حادے زاویوں کا فرق $\frac{۳۲}{۵}$ نیمقطری زاویوں کے برابر ہے - ان کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۱۸- ایک مثلث کا ایک زاویہ ($\frac{۲}{۴}$ لا)گ ہے، اور دوسرا ($\frac{۳}{۴}$ لا)° اور تیسرا ($\frac{۳۲ لا}{۷۵}$)نق، ان سب کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۱۹- کسی مثلث کے دو زاویوں کا قوسی ناپ بالترتیب $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۴}$ ہے تیسرے زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۰- ایک مثلث کے زاویے سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، سب سے چھوٹے زاویے میں انگریزی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویے میں نیمقطریوں کی تعداد سے نسبت ۶۰ : ۲ہ ہے، ان زاویوں کو انگریزی درجوں میں دریافت کرو۔

۲۱- ایک مثلث کے زاویے سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، سب سے چھوٹے زاویے میں جو نیمقطریوں کی تعداد ہے اس کو درمیانی زاویے کی انگریزی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۱ : ۱۲۰ ہے، زاویوں کی قیمت قوسی ناپ میں دریافت کرو۔

۲۲- اشکال ذیل کے اندرونی زاویوں کو نیمقطریوں اور انگریزی درجوں میں بیان کرو- (۱) منتظم مخمس (۲) منتظم مسبع (۳) منتظم مثمن (۴) بارہ اضلاع کا منتظم کثیر الاضلاع (۵) ۱۷ اضلاع کا منتظم کثیر الاضلاع -

۲۳- دو منتظم کثیر الاضلاعوں میں ایک کے زاویہ کو دوسرے کے زاویہ سے نسبت ۳ : ۲ ہے، نیز پہلے کثیر الاضلاع کی تعدادِ اضلاع دوسرے کی تعدادِ اضلاع کی دو چند ہے، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعدادِ اضلاع دریافت کرو۔

۲۴- دو کثیر الاضلاعوں کی تعدادِ اضلاع میں نسبت ۵ : ۴ ہے، ان کے زاویوں کا فرق ۹° ہے، ہر ایک کی تعدادِ اضلاع دریافت کرو۔

۲۵- دو کثیر الاضلاع معلوم کرو جو منتظم ہوں اور جن کی تعدادِ اضلاع میں نسبت ۳ اور ۴ کی ہو، نیز پہلے کثیر الاضلاع کے ایک زاویے میں جو انگریزی درجوں کی تعداد ہو اس کو دوسرے کثیر الاضلاع کے کسی زاویے میں فرانسیسی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۴ : ۵ ہو۔

۲۶- ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویے سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، سب سے بڑا زاویہ سب سے

چھوٹے زاویہ کا دوچند ہے، سب سے چھوٹے زاویہ کو نیمقطریوں میں تعبیر کرو۔

۲۷۔ اوقات مندرجۂ ذیل پر گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان جو زاویے بنیں ان کو نیمقطریوں، انگریزی اور فرانسیسی درجوں میں بیان کرو (۱) ساڑھے تین بجے۔ (۲) چھ بجنے میں ۲۰ منٹ (۳) سوا گیارہ بجے۔

۲۸۔ وقت معلوم کرو (۱) چار اور پانچ بجے کے درمیان جب گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان زاویہ ۸۰° ہو (۲) سات اور آٹھ بجے کے درمیان جب یہ زاویہ ۵۴° ہو۔

۳۱۔ مسئلہ۔ کسی زاویے میں نیمقطریوں کی تعداد اُس کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ وہ قوس ہو جس کے محاذی کسی دائرہ کے مرکز پر زاویۂ مذکورہ بنے، اور جس (کسر) کا نسب نما دائرہ کا نصف قطر ہو۔

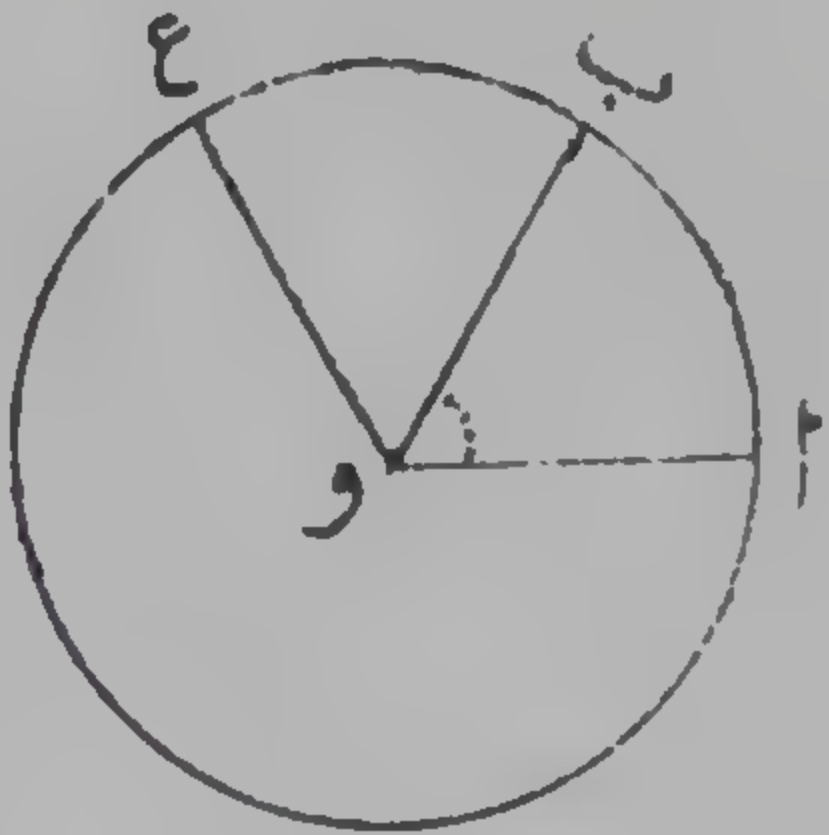
فرض کرو کہ خط دائر و ا سے شروع ہو کر مقام و ع تک حرکت کرنے سے زاویہ ا و ع مرتسم کرتا ہے۔

و کو مرکز مان کر کسی نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچو جو خطوط و ا اور و ع کو نقاط ا اور ع پر قطع کرے۔

فرض کرو کہ ∠ ا و ب زاویہ نیمقطری ہے یعنی قوس ا ب نصف قطر دائرہ کے برابر ہے۔

بحکم اقلیدس م ۶، ش ۳۳

$$\frac{\angle \text{ا و ع}}{\text{ایک نیمقطری}} = \frac{\angle \text{ا و ع}}{\angle \text{ا و ب}} = \frac{\text{قوس ا ع}}{\text{قوس ا ب}} = \frac{\text{قوس ا و ع}}{\text{نصف قطر}}$$

$$\text{یعنی } \angle \text{ا و ع} = \frac{\text{قوس ا ع}}{\text{نصف قطر}} \times \text{ایک نیمقطری}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

۲۲۔ مثال ۱۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اس کی ۱ فٹ قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ دریافت کرو۔

زاویہ میں نیمقطریوں کی تعداد = قوس / نصف قطر = $\frac{1}{3}$

اس لیے زاویہ = $\frac{1}{3}$ نیمقطری

= $\frac{1}{3} \times \frac{2}{\pi}$ زاویہ قائمہ

= $\frac{2}{3\pi} \times 90° = \frac{60°}{\pi} = 19\frac{1}{11}°$ اگر π کو $\frac{22}{7}$ کے برابر فرض کیا جائے۔

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے مقابل مرکزی زاویہ ۳۳° ۱۵' ہو تو قوس کا طول دریافت کرو۔

اگر مطلوبہ طول لا ہو تو $\frac{لا}{5}$ = زاویہ ۳۳° ۱۵' میں نیمقطریوں کی تعداد

= $\frac{33\frac{1}{4}}{180}\pi$ (دفعہ ۱۹)

= $\frac{133}{720}\pi$

اس لیے لا = $\frac{133}{144}\pi$ فٹ = $\frac{133}{144} \times \frac{22}{7}$ فٹ تقریباً

= $2\frac{65}{72}$ فٹ تقریباً

مثال ۳۔ فرض کرو کہ سورج اور زمین کے درمیان اوسط فاصلہ ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل ہے اور سورج ایک شخص کی آنکھ پر ۳۲' کا زاویہ بناتا ہے، سورج کا قطر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ میلوں میں سورج کا قطر ق ہے۔

چونکہ سورج کے محاذی زاویہ نہایت چھوٹا ہے اس لیے اس کا قطر

ایک ایسے دائرہ کی چھوٹی سی قوس کے برابر ہے جس کا مرکز دیکھنے والے کی آنکھ ہے - نیز ہمیں معلوم ہے کہ اس دائرہ کے مرکز پر سورج کے مقابل زاویہ ۳۲ بنتا ہے -

اس لیے، بوجب دفعہ ۲۱

ق / ۹۲۵۰۰۰۰۰ = نیمقطریوں کی تعداد ۳۲ میں

= نیمقطریوں کی تعداد ۸/۱۵ میں

= ۸/۱۵ × π/۱۸۰ = ۳۲/۶۷۵π

اس لیے ق = ۱۸۵۰۰۰۰۰۰/۶۷۵ π میل

= ۱۸۵۰۰۰۰۰۰/۶۷۵ × ۲۲/۷ میل تقریباً

= ۸۶۲۰۰۰ میل تقریباً

مثال ۴- فرض کرو کہ ایک درست بینائی والا شخص چھاپے کے حروف کو اتنے فاصلہ سے پڑھ سکتا ھے کہ حروف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۵ کا زاویہ بنتا ھے اُن حروف کی اونچائی دریافت کرو جو وہ مُفصلۂ ذیل فاصلوں سے پڑھ سکتا ھے ' (۱) ۱۲ فٹ (۲) ۱/۲ میل -

فرض کرو کہ لا فٹ مطلوبہ اونچائی ہے -

پہلی صورت میں لا تقریباً ایک ایسے دائرہ کی قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر ۱۲ فٹ ہے اور جس کے مرکز پر قوس کے محاذی زاویہ ۵ بنتا ہے -

اس لیے لا/۱۲ = تعداد نیمقطریوں کی ۵ میں

= ۱/۱۲ × π/۱۸۰

اس لیے لا = π/۱۸۰ فٹ = ۱/۱۸۰ × ۲۲/۷ فٹ تقریباً

= ۱/۱۵ × ۲۲/۷ انچ = ۱/۵ انچ تقریباً

دوسری صورت میں اگر اونچائی ما ہو تو

$$\frac{\text{ما}}{۳ \times ۴۴۰} = \text{تعداد نیم‌قطریوں کی ۵َ میں}$$

$$= \frac{۱}{۱۲} \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

اس لیے　$$\text{ما} = \pi\,\frac{۱۱}{۱۸} = \frac{۱۱}{۱۸} \times \frac{۲۲}{۷} \text{ فٹ تقریباً}$$

$$= ۲۳ \text{ انچ تقریباً}$$

امثلہ نمبری ۴

[فرض کرو کہ $\pi = ۳٫۱۴۱۵۹.....$ اور $\frac{۱}{\pi} = ۰٫۳۱۸۳۱$]

۱ - کسی دائرہ میں ایک قوس کا طول نصف قطر کا ۳٫۵۰ گنا ہے اس کے محاذی مرکز پر جو زاویہ بنیگا اس میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲ - کسی دائرہ کا نصف قطر ۲٫۵ فٹ ہے ایک ۵٫۵ فٹ قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے اس میں نیم‌قطریوں اور انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳ - ایک دائرہ کے بیرونی کنارہ پر درجے بنے ہوئے ہیں اس میں ہر ایک درجہ کی زاویئی قیمت ۵َ ہے اور آپس میں درجوں کا فاصلہ ۱ء انچ ہے دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

۴ - ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ۶ فٹ ہے اور ہر ایک درجہ کی زاویئی قیمت ۵َ ہے متصل درجوں کا فاصلہ دریافت کرو۔

۵ - اگر ایک کرہ کے ایک ہی نصف النہار پر دو مقامات کے عرض بلدوں کا فرق ۱° ۰َ ۳ہ ہو اور مقامات کے درمیان فاصلہ ½ انچ ہو تو کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔

۶ - فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے - دو ایسے مقامات کے عرض بلدوں کا فرق معلوم کرو جن میں سے ایک مقام دوسرے مقام کی نسبت ۱۰۰ میل شمال کی طرف واقع ہو۔

۷۔ فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے اور اس کے دو دوائر متوازی العرض کے درمیان فاصلہ $69\frac{1}{9}$ میل ہے اور اس فاصلہ کے محاذی زمین کے مرکز پہ زاویہ ۱° بنتا ہے، زمین کا نصف قطر دریافت کرو۔

۸۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے وتر کا طول بھی ۳ فٹ ہو تو قوس کے طول کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۹۔ دو دائروں کے مرکزوں پر مساوی قوسوں کے محاذی زاویے ۶۰° اور ۷۵° بنتے ہیں اُن کے نصف قطروں کی باہمی نسبت دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک دائرہ کا قطر ۸ فٹ ہے اگر اس کی ۱۰ فٹ قوس کے محاذی مرکزی زاویہ ۱۴۳° ۴′ ۲″ بنے تو π کی قیمت ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے محیط کو ایسے ۵ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، اگر سب سے بڑا حصہ سب سے چھوٹے کا ۶ گنا ہو تو حصوں کے محاذی مرکزی زاویوں کی مقداروں کو نیمقطریوں میں دریافت کرو۔

۱۲۔ ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا مجموعہ ایک ایسی نصف دائرہ قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو دائرہ کا ہے، قطاع کے زاویہ کو انگریزی درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱۳۔ ایک آدمی کا قد ۶ فٹ ہے کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۱۰′ کا زاویہ بنے گا ؟

۱۴۔ ایک شے کے محاذی ایک میل کے فاصلہ پر ۱′ کا زاویہ بنتا ہے اُس کی اونچائی دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک کرہ کا قطر $5\frac{1}{2}$ انچ ہے، معلوم کرو کہ کتنے فاصلے پر اُس کے محاذی ۶″ کا زاویہ بنیگا ؟

۱۶۔ ایک مینار کی اونچائی ۱۵ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے محاذی زاویہ $\frac{5}{11}$″ بنتا ہے، مینار اور آنکھ کے درمیان جو فاصلہ ہے اس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۷۔ کسی گرجے کے مینار کی اونچائی ۱۰۰ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے

محاذی زاویہ ۹َ بنتا ہے آنکھ اور گرجے کے درمیان جو فاصلہ ہے اس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۸- ایک سطح مائل کا چڑھاؤ ۲۱۰ گز طول میں ۳½ فٹ ہے سطح افقی سے اس کے میلان کی تقریبی قیمت دقیقوں میں معلوم کرو۔

۱۹ - فرض کرو کہ زمین کا قطر ۳۹۶۰ میل ہے اور چاند کا فاصلہ زمین سے زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا ہے، اگر چاند کا نصف قطر زمین پر زاویہ ۱۶َ بنائے تو اس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۰- جب کسی خاص مقام پر چاند غروب ہو رہا ہو تو زمین کا نصف قطر جو اُس مقام میں سے گزرتا ہے چاند کے مرکز پر ۵۷َ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل فرض کیا جائے تو چاند اور زمین کے فاصلے کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

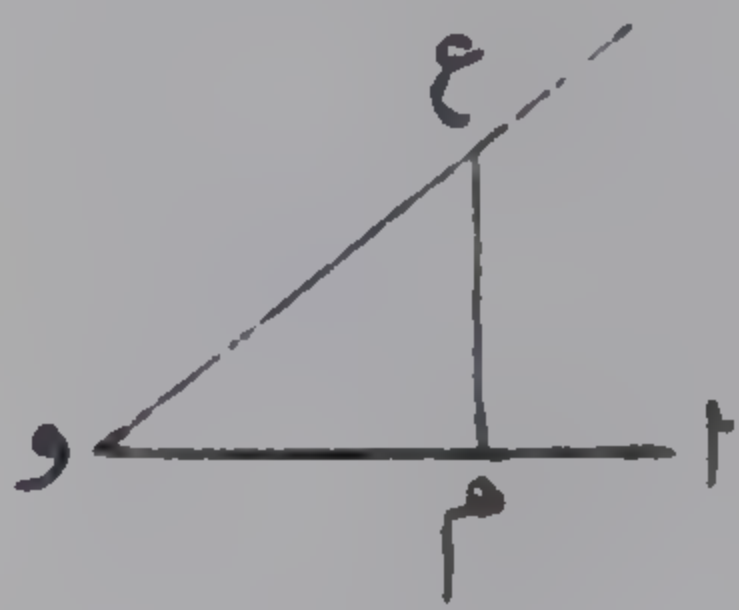
۲۱- فرض کرو کہ زمین کے نصف قطر کے محاذی سورج کے فاصلہ پر زاویہ ۸٫۶″ بنتا ہے اور ایک جغرافی میل کے مقابل زمین کے مرکز پر زاویہ ۱َ بنتا ہے ثابت کرو کہ سورج کا فاصلہ زمین سے تقریباً ۹۱۰ لاکھ جغرافی میل ہے، نیز زمین کا قطر اور محیط دونوں جغرافی میلوں میں دریافت کرو۔

۲۲- مدار زمین کا نصف قطر ۹۲٫۰۰۰۰۰ میل ہے اور اس کے محاذی ستارہ شعریٰ (سریس) پر زاویہ ۴٫۰″ بنتا ہے، ستارہ کا فاصلہ تقریبی طور پر دریافت کرو۔

دوسرا باب

ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو زاویہ قائمہ سے کم ہیں

۲۴۔ اس باب میں ہم صرف اُن زاویوں کے متعلق بحث کرینگے جو زاویۂ قائمہ سے کم ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خطِ دائرہ وع مقام و ا سے چکر لگاتا ہوا مقام وع پر پہنچتا ہے۔ اور زاویہ اوع مرتسم کرتا ہے۔

خطِ دائرہ پر ایک نقطہ ع لو اور اس سے خطِ ابتدائی و ا پر ع م عمود نکالو۔

مثلث م و ع میں وع وتر ہے' ع م عمود اور و م قاعدہ۔

زاویہ ا و ع کی مثلثی نسبتوں یا جملوں کی تعریف اکثر اس طرح کرتے ہیں۔

$\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$ کو زاویہ ا و ع کی جیب کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ،، $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$ کو زاویہ ا و ع کی جیب التمام کہتے ہیں۔

$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}$ ،، $\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$ کو زاویہ ا و ع کا مماس کہتے ہیں۔

و م / م ع یعنی قاعدہ / عمود کو زاویہ ا و ع کا مماس التمام کہتے ہیں۔

و ع / م ع " وتر / عمود کو زاویہ ا و ع کا قاطع التمام کہتے ہیں۔

و ع / و م " وتر / قاعدہ کو " " " قاطع کہتے ہیں۔

کسی زاویہ کی جیب التمام ا سے جس قدر کم ہو اُسے یعنی مقدار ا - جم ا و ع کو زاویۂ مذکور کی سہم الجیب کہتے ہیں۔ نیز کسی زاویہ کی جیب ا سے جس قدر کم ہو یعنی مقدار ا - جیب ا و ع کو زاویۂ مذکور کی سہم التمام کہتے ہیں۔

۲۴- یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مثلثی نسبتیں سب اعداد ہیں۔

اوپر آٹھ نسبتوں کو اختصار کی خاطر بالترتیب یوں لکھتے ہیں۔

جب ا و ع، جم ا و ع، مس ا و ع، مم ا و ع، قم ا و ع،
قط ا و ع، سہ ا و ع، سم ا و ع

آخری دو نسبتیں شاذ و نادر استعمال ہوتی ہیں۔

۲۵- تعریفات سے ظاہر ہے کہ قاطع التمام جیب کا اُلٹ ہے۔

یعنی قم ا و ع = ۱ / جب ا و ع

اسی طرح قاطع زاویہ جیب التمام کا اُلٹ ہے یعنی

قط ا و ع = ۱ / جم ا و ع

اور مماس التمام مماس کا اُلٹ ہے یعنی

مم ا و ع = ۱ / مس ا و ع

۲۶- ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی مثلثی نسبتیں ہمیشہ وہی رہتی ہیں۔ یعنی جب تک زاویہ نہ بدلے وہ نہیں بدلتیں۔

یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ اگر خطِ دائر وع پر کوئی اور نقطہ غَ لیا جائے اور اُس سے وا پر عمود غَ مَ نکالا جائے تو مثلثی نسبتیں جو مثلثات وغَ مَ اور وع م سے حاصل ہونگی وہ قیمت میں ایک دوسرے کے برابر ہونگی

ان مثلثوں میں زاویہ و مشترک ہے
اور م اور مَ پر کے دونوں زاویے قائمے ہیں۔
اور اس لیے برابر ہیں۔
معلوم ہوا کہ یہ دونوں مثلث متشابہ ہیں
اور اس لیے بموجب اقلیدس م ۶ ش ۴، م ع / و ع = مَ غَ / و غَ جس سے ثابت ہوا کہ زاویہ ا و ع کی جیب ہمیشہ وہی رہتی ہے خواہ کوئی سا نقطہ خطِ دائر پر لیا جائے۔
اور چونکہ بموجب مسئلہ مذکورہ

و م / و ع = و مَ / و غَ اور م ع / و م = مَ غَ / و مَ

اس سے ظاہر ہے کہ جیب التمام اور مماس زاویہ بھی ہمیشہ وہی رہتے ہیں خواہ نقطہ خطِ دائر پر کہیں لیا جائے اور باقی نسبتوں کی بھی یہی کیفیت ہے۔
اگر و م کو خطِ دائر خیال کریں اور اس کے کسی نقطہ غُ سے و ع پر عمود غُ مُ نکالیں تو مثلث و غُ مُ سے جو نسبتیں حاصل ہونگی ان کی قیمتیں بھی وہی ہونگی جو اوپر بیان ہوئیں کیونکہ دو مثلثات و ع م اور و غُ مُ میں زاویہ و مشترک ہے اور زاویے و مُ غُ اور و م ع قائمے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں مثلث متساوی الزوایا ہیں اور اس لیے متشابہ ہیں۔ لہٰذا

مُ غُ / و غُ = م ع / و ع اور و مُ / و غُ = و م / و ع

۲۷۔ کسی زاویے کی مثلثی نسبتوں کے اساسی روابط

ہمیں آگے چل کر معلوم ہوگا کہ اگر کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تو باقی سب نسبتوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ط زاویہ ا و ع کو تعبیر کرتا ہے۔

مثلث م و ع میں بموجب اقلیدس م ا ش ۴۷

$$\text{م ع}^2 + \text{و م}^2 = \text{و ع}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

و ع² پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}\right)^2 + \left(\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}\right)^2 = 1$$

یعنی

$$(\text{جب ط})^2 + (\text{جم ط})^2 = 1$$

مقدار (جب ط)² کو جب² ط لکھتے ہیں اور اسی طرح باقی سب نسبتوں کو۔

پس یہ ربط حاصل ہوا۔

$$\text{جب}^2\,\text{ط} + \text{جم}^2\,\text{ط} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

نیز طرفین مساوات (۱) کو و م² پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}\right)^2$$

یعنی

$$(\text{مس ط})^2 + 1 = (\text{قط ط})^2$$

پس

$$\text{قط}^2\,\text{ط} = 1 + \text{مس}^2\,\text{ط} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

طرفین مساوات (۱) کو م ع² پر تقسیم کرنے سے

$$1 + \left(\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}\right)^2 = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}\right)^2$$

یعنی

$$1 + (\text{مم ط})^2 = (\text{قم ط})^2$$

پس

$$\text{قم}^2\,\text{ط} = 1 + \text{مم}^2\,\text{ط} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

نیز چونکہ $\text{جب طہ} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ اور $\text{جم طہ} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$

اس لیے $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} \div \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \text{مس طہ}$

اس لیے $\text{مس طہ} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ}}$ .... (۵)

اور اسی طرح سے $\text{مم طہ} = \frac{\text{جم طہ}}{\text{جب طہ}}$ .... (۶)

۲۸- مثال ۱- ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{\text{۱ - جم ا}}{\text{۱ + جم ا}}} = \text{قم ا - مم ا}$

$$\sqrt{\frac{\text{۱ - جم ا}}{\text{۱ + جم ا}}} = \sqrt{\frac{(\text{۱ - جم ا})^{۲}}{\text{۱ - جم}^{۲}\text{ ا}}}$$

$$= \frac{\text{۱ - جم ا}}{\sqrt{\text{۱ - جم}^{۲}\text{ ا}}} = \frac{\text{۱ - جم ا}}{\text{جب ا}}$$

بموجب نتیجہ (۲) دفعہ آخر

$$= \frac{\text{۱}}{\text{جب ا}} - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \text{قم ا - مم ا}$$

مثال ۲- ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{قط}^{۲}\text{ ا + قم}^{۲}\text{ ا}} = \text{مس ا + مم ا}$

ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ $\text{قط}^{۲}\text{ ا} = \text{۱ + مس}^{۲}\text{ ا}$

اور $\text{قم}^{۲}\text{ ا} = \text{۱ + مم}^{۲}\text{ ا}$

اس لیے $\text{قط}^{۲}\text{ ا + قم}^{۲}\text{ ا} = \text{مس}^{۲}\text{ ا + ۲ + مم}^{۲}\text{ ا}$

$$= \text{مس}^{۲}\text{ ا + ۲ مس ا مم ا + مم}^{۲}\text{ ا}$$

$$= (\text{مس ا + مم ا})^{۲}$$

اس لیے $\sqrt{\text{قط}^{۲}\text{ ا + قم}^{۲}\text{ ا}} = \text{مس ا + مم ا}$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ

$$(\text{قم ا} - \text{جب ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا})(\text{مس ا} + \text{مم ا}) = \text{۱}$$

$$\text{دیا ہوا جملہ} = \left(\frac{\text{۱}}{\text{جب ا}} - \text{جب ا}\right)\left(\frac{\text{۱}}{\text{جم ا}} - \text{جم ا}\right)\left(\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}\right)$$

$$= \frac{\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{\text{۱} - \text{جم}^{\text{۲}}\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\text{ا} + \text{جم}^{\text{۲}}\text{ا}}{\text{جب ا جم ا}}$$

$$= \frac{\text{جم}^{\text{۲}}\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{۱}}{\text{جب ا جم ا}} = \text{۱}$$

امثلہ نمبری ۵

روابط ذیل کو ثابت کرو:۔

۱۔ $\text{جم}^{\text{۴}}\text{ا} - \text{جب}^{\text{۴}}\text{ا} + \text{۱} = \text{۲ جم}^{\text{۲}}\text{ا}$

۲۔ $(\text{جب ا} + \text{جم ا})(\text{۱} - \text{جب ا جم ا}) = \text{جب}^{\text{۳}}\text{ا} + \text{جم}^{\text{۳}}\text{ا}$

۳۔ $\frac{\text{جب ا}}{\text{۱} + \text{جم ا}} + \frac{\text{۱} + \text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \text{۲ قم ا}$

۴۔ $\text{جم}^{\text{۶}}\text{ا} + \text{جب}^{\text{۶}}\text{ا} = \text{۱} - \text{۳ جب}^{\text{۲}}\text{ا} \times \text{جم}^{\text{۲}}\text{ا}$

۵۔ $\sqrt{\frac{\text{۱} - \text{جب ا}}{\text{۱} + \text{جب ا}}} = \text{قط ا} - \text{مس ا}$

۶۔ $\frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} - \text{۱}} + \frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} + \text{۱}} = \text{۲ قط}^{\text{۲}}\text{ا}$

۷۔ $\frac{\text{مم ا}}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جم ا}$

۸۔ $(\text{قط ا} + \text{جم ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا}) = \text{مس}^{\text{۲}}\text{ا} + \text{جب}^{\text{۲}}\text{ا}$

۹۔ $\frac{\text{۱}}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جب ا جم ا}$

۱۰- ۱ / (قط ا - مس ا) = قط ا + مس ا

۱۱- (۱ - مس ا) / (۱ + مس ا) = (مم ا - ۱) / (مم ا + ۱)

۱۲- (۱ + مس^{2} ا) / (۱ + مم^{2} ا) = جب^{2} ا / جم^{2} ا

۱۳- (قط ا - مس ا) / (قط ا + مس ا) = ۱ - ۲ قط ا مس ا + ۲ مس^{2} ا

۱۴- مس ا / (۱ - مم ا) + مم ا / (۱ - مس ا) = قط ا قم ا + ۱

۱۵- جم ا / (۱ - مس ا) + جب ا / (۱ - مم ا) = جب ا + جم ا

۱۶- (جب ا + جم ا) (مم ا + مس ا) = قط ا + قم ا

۱۷- قط^{4} ا - قط^{2} ا = مس^{4} ا + مس^{2} ا

۱۸- مم^{4} ا + مم^{2} ا = قم^{4} ا - قم^{2} ا

۱۹- $\sqrt{\text{قم}^{2}\,\text{ا} - 1}$ = جم ا قم ا

۲۰- قط^{2} ا قم^{2} ا = مس^{2} ا + مم^{2} ا + ۲

۲۱- مس^{2} ا - جب^{2} ا = جب^{4} ا قط^{2} ا

۲۲- (۱ + مم ا - قم ا) (۱ + مس ا + قط ا) = ۲

۲۳- ۱ / (قم ا - مم ا) - ۱ / جب ا = ۱ / جب ا - ۱ / (قم ا + مم ا)

۲۴- مم ا جم ا / (مم ا + جم ا) = (مم ا - جم ا) / (مم ا جم ا)

۲۵- (مم ا + مس ب) / (مم ب + مس ا) = مم ا مس ب

۲۶۔ (1/(قط²ع - جم²ع) + 1/(قم²ع - جب²ع)) جم²ع جب²ع = (۱ - جم²ع جب²ع)/(۲ + جم²ع جب²ع)

۲۷۔ جب⁶ا - جم⁶ا = (جب²ا - جم²ا) (۱ - ۲ جب²ا جم²ا)

۲۸۔ (جم ا قم ا - جب ا قط ا)/(جم ا + جب ا) = قم ا - قط ا

۲۹۔ (مس ا + قط ا - ۱)/(مس ا - قط ا + ۱) = (۱ + جب ا)/(جم ا)

۳۰۔ (مس ع + قم ب)² - (مم ب - قط ع)² = ۲ مس ع مم ب (قم ع + قط ب)

۳۱۔ ۲ قط²ع - قط⁴ع - ۲ قم²ع + قم⁴ع = مم⁴ع - مس⁴ع

۳۲۔ (جب ع + قم ع)² + (جم ع + قط ع)² = مس²ع + مم²ع + ۷

۳۳۔ (قم ا + مم ا) سم ا - (قط ا + مس ا) سہ ا = (قم ا - قط ا) (۲ - سہ ا سم ا)

۳۴۔ (۱ + مم ا + مس ا) (جب ا - جم ا) = قط ا/قم²ا - قم ا/قط²ا

۳۵۔ ۲ سہ ا + جم²ا = ۱ + سہ²ا

۲۹۔ مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کی حدود۔

مساوات (۲) دفعہ ۲۷ سے

جب²ط + جم²ط = ۱

اب چونکہ جب²ط اور جم²ط دونوں مربع ہیں اس لیے ضروری ہے کہ وہ مثبت ہوں اور چونکہ ان کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی بھی ایک سے بڑا نہیں ہوسکتا۔

[کیونکہ اگر ان میں سے ایک مربع مثلاً جب²ط ایک سے بڑا ہو تو ضرور ہے کہ دوسرا منفی ہو اور یہ غیر ممکن ہے]

پس معلوم ہوا کہ جیب اور جیب التمام دونوں میں سے کوئی بھی تعداداً ایک سے بڑی نہیں ہوسکتی۔

اب چونکہ جب طہ ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے قم طہ جو $\frac{۱}{\text{جب طہ}}$ کے برابر ہے ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔
اسی طرح سے قط طہ جو $\frac{۱}{\text{جم طہ}}$ کے برابر ہے مقداراً ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔

۳۰۔ شکل دفعہ ہذا سے نتائج مذکورۂ بالا بآسانی حاصل ہوتے ہیں۔ کیونکہ زاویہ ا و ع کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو اضلاع و م اور م ع طول میں وتر و ع سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتے۔

اب چونکہ م ع وتر و ع سے کبھی بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے نسبت $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ ایک سے کبھی بڑی نہیں ہو سکتی اس سے ظاہر ہے کہ جیب زاویہ ایک سے کبھی بڑھ نہیں سکتی۔
نیز چونکہ و م وتر و ع سے ہمیشہ کم رہتا ہے اس لیے نسبت $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ایک سے ہمیشہ کم ہو گی یعنی جیب التمام ایک سے کبھی بڑی نہ ہو گی۔

۳۱۔ ہم کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو کسی ایک نسبت کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ اس ترکیبِ عمل کی توضیح امثلۂ ذیل سے ہو گی:۔

مثال ۱۔ کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو جیب کی رقوم میں بیان کرو۔

فرض کرو کہ ا و ع کوئی زاویہ طہ ہے اور و ع کا طول اکائی ہے اور ع م کا متناظر طول ج ہے۔

اقلیدس م ا ش ۴۷ سے $\text{و م} = \sqrt{\text{و ع}^۲ - \text{م ع}^۲} = \sqrt{۱ - \text{ج}^۲}$

اس لیے $\text{جب طہ} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ج}}{۱} = \text{ج}$

$\text{جم طہ} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \sqrt{۱ - \text{ج}^۲} = \sqrt{۱ - \text{جب}^۲ \text{طہ}}$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{1-\text{ج}^2}} = \frac{\text{جب ط}}{\sqrt{1-\text{جب}^2\,\text{ط}}}$$

$$\text{مم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{م ع}} = \frac{\sqrt{1-\text{ج}^2}}{\text{ج}} = \frac{\sqrt{1-\text{جب}^2\,\text{ط}}}{\text{جب ط}}$$

$$\text{قم ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{1}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{جب ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ج}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{جب}^2\,\text{ط}}}$$

آخری پانچ مساواتوں سے جو کچھ مطلوب تھا حاصل ہوا۔

مثال ۲۔ سب مثلثی نسبتوں کو مماس التمام کی رقوم میں بیان کرو۔

حسب معمول شکل بناؤ اور فرض کرو کہ م ع کا طول اکائی ہے اور و م کا تناظر طول لا ہے۔

اقلیدس م ۱ ش ۴۷ سے

$$\text{و ع} = \sqrt{\text{و م}^2 + \text{م ع}^2} = \sqrt{1+\text{لا}^2}$$

اس لیے

$$\text{مم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{م ع}} = \frac{\text{لا}}{1} = \text{لا}$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{مم}^2\,\text{ط}}}$$

$$\text{جم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \frac{\text{مم ط}}{\sqrt{1+\text{مم}^2\,\text{ط}}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{مم ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{مم}^{\text{۲}}\,\text{ط}}}{\text{مم ط}}$$

$$\text{اور} \quad \text{قم ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{۱}} = \sqrt{\text{۱} + \text{مم}^{\text{۲}}\,\text{ط}}$$

جو کچھ مطلوب تھا آخری پانچ مساواتوں سے حاصل ہوا۔
یاد رہے کہ اوپر کی ہر ایک صورت میں اس کسر کا نسب نما جس کی رقوم میں باقی مثلثی نسبتوں کو بیان کرنا مطلوب ہے ہمیشہ اکائی لیا گیا ہے۔ مثلاً زاویہ ط کی جیب $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ ہے۔ اس لیے مثال ۱ میں نسب نما و ع کا طول ایک کے برابر لیا گیا ہے۔ اور چونکہ مماس التمام $\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ ہے اس لیے مثال ۲ میں ضلع م ع کو ایک کے مساوی فرض کیا ہے۔

اسی طرح سے اگر باقی مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرنا ہو تو چونکہ جیب التمام $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ہے اس لیے و ع کو ایک کے برابر فرض کرنا چاہیے اور و م کو لا کے۔ اس کے بعد عمل بالکل ایسا ہی ہوگا جیسا کہ امثلہ ۱ اور ۲ میں ہوا۔

امثلہ ذیل میں اضلاع کی قیمتیں عددی ہیں۔

مثال ۳۔ اگر جم ط = $\frac{\text{۳}}{\text{۵}}$ تو باقی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

خط ابتدائی ء ا پر و م برابر ۳ کے اور ایک عمود م ع کھینچو۔ نیز فرض کرو کہ ایک خط و ع جس کا طول ۵ ہے نقطہ و کے گرد چکر لگاتا ہوا عمود م ع کو نقطہ ع پر قطع کرتا ہے تب ا و ع زاویہ مجوزہ ہوگا۔

بموجب اقلیدس م ۱ ش ۴۷، م ع = $\sqrt{\text{و ع}^{\text{۲}} - \text{و م}^{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۵}^{\text{۲}} - \text{۳}^{\text{۲}}} = \text{۴}$

اس لیے صریحاً۔

جب ط = $\frac{\text{۴}}{\text{۵}}$، مس ط = $\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$، مم ط = $\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$، قم ط = $\frac{\text{۵}}{\text{۴}}$ اور قط ط = $\frac{\text{۵}}{\text{۳}}$

مثال ۴۔ اگر زاویہ طہ کی جیب $\frac{۱}{۳}$ ہو تو باقی مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ جب طہ = $\frac{۱}{۳}$، اس لیے ربط (۲) دفعہ ۲۷ سے ظاہر ہے کہ

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} + \text{جم}^{۲}\,\text{طہ} = ۱$$

یعنی
$$\text{جم}^{۲}\,\text{ط} = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

یعنی
$$\text{جم ط} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

اس لیے
$$\text{مس ط} = \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\text{ظم ط} = \frac{۱}{\text{مس ط}} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{قم ط} = \frac{۱}{\text{جب ط}} = ۳$$

$$\text{قط ط} = \frac{۱}{\text{جم ط}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\text{سہ ط} = ۱ - \text{جم ط} = ۱ - \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\text{سم ط} = ۱ - \text{جب ط} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۳۴ - نقشۂ ذیل میں ہر مثلثی نسبت کو باقی سب نسبتوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے -

	جب طه	جم طه	مس طه	مم طه	قط طه	قم طه
جب طه	جب طه	$\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ طه}}$	$\frac{\text{مس طه}}{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ طه}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ طه}}}$	$\frac{\sqrt{\text{قط}^2\text{ طه}-1}}{\text{قط طه}}$	$\frac{1}{\text{قم طه}}$
جم طه	$\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ طه}}$	جم طه	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ طه}}}$	$\frac{\text{مم طه}}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ طه}}}$	$\frac{1}{\text{قط طه}}$	$\frac{\sqrt{\text{قم}^2\text{ طه}-1}}{\text{قم طه}}$
مس طه	$\frac{\text{جب طه}}{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ طه}}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ طه}}}{\text{جم طه}}$	مس طه	$\frac{1}{\text{مم طه}}$	$\sqrt{\text{قط}^2\text{ طه}-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{قم}^2\text{ طه}-1}}$
مم طه	$\frac{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ طه}}}{\text{جب طه}}$	$\frac{\text{جم طه}}{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ طه}}}$	$\frac{1}{\text{مس طه}}$	مم طه	$\frac{1}{\sqrt{\text{قط}^2\text{ طه}-1}}$	$\sqrt{\text{قم}^2\text{ طه}-1}$
قط طه	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ طه}}}$	$\frac{1}{\text{جم طه}}$	$\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ طه}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ طه}}}{\text{مم طه}}$	قط طه	$\frac{\text{قم طه}}{\sqrt{\text{قم}^2\text{ طه}-1}}$
قم طه	$\frac{1}{\text{جب طه}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ طه}}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ طه}}}{\text{مس طه}}$	$\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ طه}}$	$\frac{\text{قط طه}}{\sqrt{\text{قط}^2\text{ طه}-1}}$	قم طه

امثلہ نمبری ۶

۱ ۔ سب مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرو۔

۲ ۔ سب نسبتوں کو مماس کی رقوم میں بیان کرو۔

۳ ۔ سب نسبتوں کو قاطع التمام کی رقوم میں بیان کرو۔

۴ ۔ سب نسبتوں کو قاطع کی رقوم میں بیان کرو۔

۵ ۔ ایک زاویہ کی جیب $\frac{۱}{۴}$ ہے اس کی اور مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

۶ ۔ اگر جب ط = $\frac{۱۲}{۱۳}$ تو مس ط اور سہ ط کی قیمتیں دریافت کرو۔

۷ ۔ اگر جب ا = $\frac{۱۱}{۶۱}$ تو مس ط، جم ط اور قط ط دریافت کرو۔

۸ ۔ اگر جم ط = $\frac{۴}{۵}$ تو جب ط اور مم ط معلوم کرو۔

۹ ۔ اگر جم ا = $\frac{۹}{۴۱}$ تو مس ا اور قم ا دریافت کرو۔

۱۰ ۔ اگر مس ط = $\frac{۳}{۴}$ تو زاویہ ط کی جب، جم، سہ اور قم دریافت کرو۔

۱۱ ۔ اگر مس ط = $\frac{۱}{\sqrt{۷}}$ تو $\frac{\text{قم}^۲\text{ط} - \text{قط}^۲\text{ط}}{\text{قم}^۲\text{ط} + \text{قط}^۲\text{ط}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۱۲ ۔ اگر مم ط = $\frac{۱۵}{۸}$ تو جم ط اور قم ط کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۳ ۔ اگر قط ا = $\frac{۳}{۲}$ تو معلوم کرو مس ا اور قم ا ۔

۱۴ ۔ اگر ۲ جب ط = ۲ ۔ جم ط تو جب ط دریافت کرو۔

۱۵ ۔ اگر ۸ جب ط = ۴ + جم ط تو معلوم کرو جب ط ۔

۱۶ ۔ اگر مس ط + قط ط = ۱٫۵ تو معلوم کرو جب ط۔

۱۷ ۔ اگر مم ط + قم ط = ۵ تو معلوم کرو جم ط۔

۱۸ ۔ اگر ۳ قط^۴ ط + ۸ = ۱۰ قط^۲ ط تو مس ط کی قیمت دریافت کرو۔

۱۹ ۔ اگر مس^۲ ط + قط ط = ۵ تو معلوم کرو جم ط ۔

۲۰ ۔ اگر مس ط + مم ط = ۲ تو معلوم کرو جب ط۔

۲۱ ۔ اگر قط^۲ ط = ۲ + ۲ مس ط تو معلوم کرو مس ط۔

۲۲ ۔ اگر مس ط = $\frac{۲\sqrt{\text{ا}(\text{ا}+۱)}}{۲\text{ا}+۱}$ تو معلوم کرو جب ط اور جم ط ۔

چند کارآمد صورتوں میں مثلثی نسبتوں کی قیمتیں

۳۳۔ ۴۵° کا زاویہ۔

فرض کرو کہ زاویۂ مرتسمہ ا و ع = ۴۵°

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ۲ قائموں کے برابر ہوتا ہے اس لیے

زاویہ و ع م = ۱۸۰° ـ زاویہ ع و م ـ زاویہ ع م و

= ۱۸۰° ـ ۴۵° ـ ۹۰° = ۴۵° = زاویہ ع و م

∴ و م = م ع

اگر و ع کو ۲ ل کے برابر فرض کریں تو

۴ ل² = و ع² = و م² + م ع² = ۲ × و م²

یعنی و م = ل √۲

اس لیے جب ۴۵° = م ع / و ع = ل √۲ / ۲ ل = ۱ / √۲

جم ۴۵° = و م / و ع = ل √۲ / ۲ ل = ۱ / √۲

اور مس ۴۵° = ۱

۳۴۔ ۳۰° کا زاویہ۔

فرض کرو کہ ۳۰° کا زاویہ م و ع ہے،

ع م کو عَ تک خارج کرو اور م عَ کو ع م کے برابر بناؤ۔

مثلث و م ع اور و م عَ میں

اضلاع و م اور م عَ اضلاع و م اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس لیے

و عَ = و ع اور زاویہ و عَ ع = زاویہ و ع عَ = ۶۰°

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث عَ و ع مساوی الاضلاع ہے۔

اب اگر وع کا طول ۲ل ہو

تو $\text{مع} = \frac{1}{2}\,\text{عَع} = \frac{1}{2}\,\text{وع} = \text{ل}$

نیز $\text{وم} = \sqrt{\text{وع}^2 - \text{مع}^2} = \sqrt{4\text{ل}^2 - \text{ل}^2} = \sqrt{3}\,\text{ل}$

$$\therefore \text{جب } 30^\circ = \frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{جم } 30^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{ل}}{2\text{ل}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{اور مس } 30 = \frac{\text{جب } 30^\circ}{\text{جم } 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۳۵- ۶۰° کا زاویہ

فرض کرو کہ ۶۰° کا زاویہ ا و ع ہے

و ا پر ایک ایسا نقطہ ن لو کہ

م ن = وم = ل (فرض کرو)

اب مثلث وم ع کے اضلاع وم

اور م ع مثلث ن م ع کے اضلاع ن م اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس سے معلوم ہوا کہ مثلث باہم مساوی ہیں۔

اس لیے ع ن = و ع اور

$$\angle\,\text{ع ن م} = \angle\,\text{ع و م} = 60^\circ$$

اس سے ثابت ہوا کہ مثلث و ع ن مساوی الاضلاع ہے۔

اس لیے $\text{وع} = \text{ون} = 2\,\text{وم} = 2\text{ل}$

$$\therefore \text{مع} = \sqrt{\text{وع}^2 - \text{وم}^2} = \sqrt{4\text{ل}^2 - \text{ل}^2} = \sqrt{3} \times \text{ل}$$

$$\text{اس لیے جب } 60^\circ = \frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{ل}}{2\text{ل}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جم } 60^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ل}}{2\text{ل}} = \frac{1}{2}$$

اور مس ۶۰° = $\frac{\text{جب ۶۰°}}{\text{جم ۶۰°}}$ = $\sqrt{3}$

۳۶- صفر درجہ (۰°) کا زاویہ۔

فرض کرو کہ خط دائر وع نے وکے گرد گھومنے سے نہایت ہی قلیل زاویہ پیدا کیا ہے۔

یعنی فرض کرو کہ زاویہ م وع نہایت چھوٹا ہے۔

ظاہر ہے کہ مقدار ع م نہایت ہی قلیل ہے اور ابتداء میں جب وع نے اُس زاویہ کا مرتسم کرنا عین شروع ہی کیا تھا تو اُس وقت مقدار م ع ہر مقدار معینہ سے کم تھی یعنی ایک ایسی مقدار تھی جسے ہم صفر سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ

زاویہ ا وع واقعی صفر کے برابر ہے تو

تو اس صورت میں وم اور وع

(اور نقاط ع اور م) ایک دوسرے پر

منطبق ہونگے اور عمود ع م معدوم ہو جائیگا۔

اس لیے وم = وع اور ع م = ۰

∴ جب ۰° = $\frac{\text{مع}}{\text{وع}}$ = $\frac{۰}{\text{وع}}$ = ۰

جم ۰° = $\frac{\text{وم}}{\text{وع}}$ = $\frac{\text{وع}}{\text{وع}}$ = ۱

اور مس ۰° = $\frac{۰}{۱}$ = ۰

نیز مم ۰° = قیمت نسبت $\frac{\text{وم}}{\text{مع}}$ جبکہ م اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں)۔

= $\frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}}$ = ایک ایسی مقدار جو لا انتہا بڑی ہے۔

ایسی مقدار کو ∞ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اس لیے مم ۰° = ∞

اسی طرح سے $\text{قم}\ 0 = \frac{\text{وع}}{\text{مع}} = \infty$

اور $\text{قط}\ 0 = \frac{\text{وع}}{\text{وم}} = 1$

۳۷۔ ۹۰° کا زاویہ۔

فرض کرو کہ زاویہ ا و ع مقدار میں ۹۰° کے نہایت ہی قریب ہے مگر بالکل ۹۰° نہیں ہے۔

جب و ع فی الحقیقت ایک قائمہ مرتسم کریگا تو اس وقت نقطہ م نقطہ و پر منطبق ہوگا یعنی و م صفر ہوگا اور و ع برابر م ع کے ہوگا۔ پس

$$\text{جب}\ 90^\circ = \frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{\text{وع}}{\text{وع}} = 1$$

$$\text{جم}\ 90^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{0}{\text{وع}} = 0$$

$$\text{مس}\ 90^\circ = \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}} = \text{لا انتہا بڑا عدد} = \infty$$

$$\text{ظم}\ 90^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{مع}} = \frac{0}{\text{مع}} = 0$$

$$\text{قط}\ 90^\circ = \frac{\text{وع}}{\text{وم}} = \infty$$ (بعینہٖ اُس عمل سے جو ماس کی صورت میں ہوا)

اور $$\text{قم}\ 90^\circ = \frac{\text{وع}}{\text{مع}} = \frac{\text{وع}}{\text{وع}} = 1$$

۳۸۔ متمم زاویے۔ تعریف۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہو تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا متمم کہتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ کوئی زاویہ طہ ہے تو اس کا متمم زاویہ ۹۰° - طہ ہوگا۔

۳۹- دو متمم زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی روابط دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط و ا سے شروع ہو کر مقام و ع پر پہنچا ہے اور اپنے گھماؤ سے زاویہ ا و ع یعنی زاویہ طہ پیدا کرتا ہے۔ خطِ دائر و ع پر کوئی نقطہ ع لو اور اس سے و ا پر عمود ع م نکالو۔

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے اور چونکہ زاویہ و م ع قائمہ ہے اس لیے معلوم ہوا کہ زاویہ م و ع اور زاویہ و ع م کا حاصل جمع ایک قائمہ کے برابر ہے۔ پس یہ دونوں زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوئے۔

یعنی زاویہ و ع م = ۹۰° - طہ

[جس وقت زاویہ و ع م زیرِ بحث ہو تو یاد رہے کہ خط ع م "قاعدہ" ہے اور م و "عمود"]

پس

جب (۹۰° - طہ) = جب م ع و = م و / ع و = جم ا و ع = جم طہ

جم (۹۰° - طہ) = جم م ع و = ع م / ع و = جب ا و ع = جب طہ

مس (۹۰° - طہ) = مس م ع و = م و / ع م = مم ا و ع = مم طہ

مم (۹۰° - طہ) = مم م ع و = ع م / م و = مس ا و ع = مس طہ

قم (۹۰° - طہ) = قم م ع و = ع و / م و = قط ا و ع = قط طہ

قط (۹۰° - ط) = قط م ع و = $\frac{\text{ع و}}{\text{ع م}}$ = قم ا و ع = قم ط

اس لیے معلوم ہوا کہ

کسی زاویہ کی جیب = اس کے متمم کی جیب التمام کے

کسی زاویہ کا مماس = اس کے متمم کے مماس التمام کے

کسی زاویہ کا قاطع = اس کے متمم کے قاطع التمام کے

۳۴۔ طالب علم کو آگے جانے سے پیشتر جدول ذیل سے بخوبی واقف ہو جانا چاہیے [اس جدول کی توسیع کے لیے ملاحظہ ہو دفعہ ۷۶]

زاویہ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
جیب	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
مماس	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞
مماس التمام	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{۲}$	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	۱
قاطع الزاویہ	۱	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۲}$	۲	∞

اگر طالب علم صرف اس حصہ کو بخوبی یاد کر لے جو جلی خط کے اندر ہے تو اُس کی مدد سے باقی مثلثی نسبتوں کا حساب بآسانی لگ سکیگا۔

کیونکہ

(۱) جیوب ۶۰° اور ۹۰° بالترتیب جیوب التمام ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں۔

(۲) جیوب التمام ۶۰° اور ۹۰° جیوب ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں
اس سے دوسری اور تیسری سطریں معلوم ہوتی ہیں۔

(۳) کسی زاویہ کا مماس جیب کو جیب التمام پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ چوتھی سطر کی کوئی مقدار دوسری سطر کی کسی مقدار کو تیسری سطر کی تناظر مقدار پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۴) چونکہ زاویہ کا مماس التمام اس کے مماس کا متکافی ہوتا ہے اس لیے پانچویں سطر کی مقداریں چوتھی سطر کی مقداروں کے متکافیوں کے برابر ہیں۔

(۵) چونکہ قم ط = $\frac{۱}{\text{جب ط}}$ اس لیے چھٹی سطر دوسری کی مقادیر کو اُلٹنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۶) اور چونکہ قط ط = $\frac{۱}{\text{جم ط}}$ اس لیے معلوم ہوا کہ ساتویں سطر تیسری سطر کی مقادیر کو اُلٹنے سے حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۷

۱۔ اگر ا = ۳۰° تو تصدیق کرو کہ

(۱) جم ۲ ا = جم۲ ا - جب۲ ا = ۲ جم۲ ا - ۱

(۲) جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا

(۳) جم ۳ ا = ۴ جم۳ ا - ۳ جم ا

(۴) جب ۳ ا = ۳ جب ا - ۴ جب۳ ا

(۵) مس ۲ ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ - مس}^{۲}\text{ ا}}$

۲ - اگر ا = ۴۵° تو اس کی تصدیق کرو کہ

(۱) جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا

(۲) جم ۲ا = ۱ - ۲ جب² ا

(۳) مس ۲ا = ۲ مس ا / (۱ - مس² ا)

اس کی تصدیق کرو کہ

۳ - جب² ۳۰° + جب² ۴۵° + جب² ۶۰° = ۳/۲

۴ - مس² ۳۰° + مس² ۴۵° + مس² ۶۰° = ۴ ۱/۳

۵ - جب ۳۰° جم ۶۰° + جم ۳۰° جب ۶۰° = ۱

۶ - جم ۴۵° جم ۶۰° - جب ۴۵° جب ۶۰° = - (√۳ - ۱) / (۲√۲)

۷ - ۴/۳ مم² ۳۰° + ۳ جب² ۶۰° - ۲ قم² ۶۰° - ۳/۴ مس² ۳۰° = ۳ ۱/۳

۸ - قم² ۴۵° × قط² ۳۰° × جب³ ۹۰° × جم ۶۰° = ۱ ۱/۳

۹ - ۴ مم² ۴۵° - قط² ۶۰° + جب³ ۳۰° = ۱/۸

تیسرا باب

بلندیوں اور فاصلوں کے آسان سوالات

۴۱۔ علم مثلث کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ہے کہ اس کی مدد سے اشیاء کی بلندیاں اور مختلف نقاط کے باہمی فاصلے حقیقی طور پر ناپے بغیر دریافت ہوسکیں۔

۴۲۔ فرض کرو کہ و اور ع دو نقطے ہیں اور ع بہ نسبت و کے اونچی سطح پر واقع ہے۔

نقطہ و سے ایک خط اُفقی و م کھینچو جو انتصابی خط ع م کو نقطہ م پر قطع کرے۔ اگر مقام و پر کھڑے ہوکر نقطہ ع کی سمت میں دیکھیں تو زاویہ م و ع جو خطِ نظری و ع اور خطِ اُفقی و م کے درمیان بنتا ہے نقطۂ ع کا **زاویۂ ارتفاع** یا زاویہ فراز کہلاتا ہے۔

م و کے متوازی ع ن کھینچو تب نقطہ ع میں سے گزرنے والا خط مُوفقی ع ن ہوگا۔ اب اگر مقام ع سے نیچے کی طرف کو نقطہ و کی سیدھ میں دیکھیں تو زاویہ ن ع و جو خطِ نظری ع و اور خطِ اُفقی ع ن کے درمیان بنتا ہے نقطہ و کا زاویۂ **انخفاض** یا زاویۂ نشیب کہلاتا ہے۔

۴۳۔ زاویوں کی عملی پیمایش کے لیے دو آلے اکثر استعمال ہوتے ہیں۔ زاویہ گیر

(تھیوڈولائیٹ) اور سُدس (سکس ٹنٹ)۔

زاویہ گیر سے اکثر سطح انتصابی میں زاویوں کا اندازہ ہوسکتا ہے۔ اس کی نہایت سادہ صورت یہ ہے۔ ایک دوربین لکڑی کی چپٹی تختی پر قائم کر دی جاتی ہے۔ سہارے کے لیے اس تختی کے تین پایے ہوتے ہیں اور ان کو ہموار سطح پر اس طرح رکھتے ہیں کہ تختی اور دُوربین دونوں سطح اُفقی میں ہوں۔

فرض کرو کہ یہ تختی مقام و پر متوازی الافق ہے اور دُوربین کا رُخ ابتدا میں سمت و م میں ہے۔ اب دُوربین کو سطح انتصابی میں پھراتے جاؤ جب تک کہ اس کا رخ عین نقطہ ع کی سیدھ میں نہ ہوجائے۔ جب ایسا ہو تو ایک درجہ دار پیمانہ سے ہم کو دوربین کے گھماؤ کے زاویہ کی مقدار معلوم ہوجائیگی، یعنی ہم کو زاویۂ ارتفاع م و ع معلوم ہوجائیگا۔

اسی طرح سے اگر آلہ مقام ع پر ہو تو زاویہ ن ع و جس میں سے دوربین سمت افقی سے نیچے کی طرف نقطۂ و کے محاذی ہونے کے لیے پھرےگی زاویۂ انخفاض ن ع و ہوگا۔

اس آلہ کی مدد سے ان زاویوں کی پیمایش بھی ممکن ہے جو سطح اُفقی میں واقع ہوں۔

۴۴۔ سُدس (سکس ٹنٹ) سے ایسے زاویوں کی پیمایش ہوسکتی ہے جو کسی دو نقاط ا اور ع کے خطِ وصل کے محاذی تیسرے نقطہ ف پر بنیں۔ اکثر یہ آلہ جہازوں پر استعمال ہوتا ہے۔ اس کی بناوٹ اور اس کا استعمال ذرا پیچیدہ ہے لہذا ہم اس جگہ اس کا ذکر نہیں کرتے۔

۴۵۔ اب ہم فاصلوں اور بلندیوں کی چند آسان مثالیں حل کرینگے۔

مثال ا۔ سطح ہموار پر ایک علم قائم ہے اس کے پائین سے ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر ایک مقام سے اس کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع °۳۰ مشاہدہ کیا گیا ہے، علم کی بلندی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ م ع (شکل دفعہ ۴۲) علم ہے اور و ایسا نقطہ ہے جس سے زاویۂ ارتفاع دیکھا گیا ہے۔

تب و م = ۱۵۰ فٹ اور زاویہ م و ع = °۳۰

اب چونکہ ع م و زاویۂ قائمہ ہے اس لیے

$$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \text{مس م و ع} = \text{مس } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{دفعہ ۳۴})$$

$$\therefore\ \text{م ع} = \frac{\text{و م}}{\sqrt{\text{۳}}} = \frac{\text{۱۵۰}}{\sqrt{\text{۳}}} = \frac{\text{۱۵۰}\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}} = \text{۵۰}\sqrt{\text{۳}}$$

اور استخراج جذر سے $\sqrt{\text{۳}} = \text{۱٫۷۳۲۰۵} \ldots\ldots$

اس لیے $\text{م ع} = \text{۵۰} \times \text{۱٫۷۳۲۰۵} \ldots\ldots$ فٹ

$= \text{۸۶٫۶۰۲۵} \ldots\ldots$ فٹ

مثال ۲ - سطح اُفقی پر ایک گرجے کا مینار ہے اور ایک شخص اس کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے۔ سطح کے کسی مقام سے اس نے مینار کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع ۴۵° مشاہدہ کیا اور ۱۰۰ فٹ بُرج کی سمت میں جانے پر زاویۂ ارتفاع ۶۰° دیکھا۔ برج کی بلندی اور پائین بُرج سے اس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مینار کی چوٹی ع ہے اور ا اور ب دو مقامات ہیں جہاں سے زاویوں کے ارتفاع مشاہدہ کیے گئے ہیں۔ اب ممدودہ پر عمود ع م نکالو اور فرض کرو کہ م ع = لا

ہمیں معلوم ہے اب = ۱۰۰ فٹ

$$\angle\,\text{م ا ع} = \text{۴۵}^\circ$$

اور $\angle\,\text{م ب ع} = \text{۶۰}^\circ$

اس سے $\frac{\text{ا م}}{\text{لا}} = \text{مم ۴۵}^\circ$

اور $\frac{\text{ب م}}{\text{لا}} = \text{مم ۶۰}^\circ = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$

اس لیے $\text{ا م} = \text{لا}$ اور $\text{ب م} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۳}}}$

$$\therefore\ \text{۱۰۰} = \text{ا م} - \text{ب م} = \text{لا} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۳}}} = \frac{\sqrt{\text{۳}} - \text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}\,\text{لا}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \frac{\text{۱۰۰}\sqrt{\text{۳}}}{\sqrt{\text{۳}} - \text{۱}} = \frac{\text{۱۰۰}\sqrt{\text{۳}}\,(\sqrt{\text{۳}} + \text{۱})}{\text{۳} - \text{۱}} = \text{۵۰}\,(\text{۳} + \sqrt{\text{۳}})$$

$= \text{۵۰}\,(\text{۳} + \text{۱٫۷۳۲۰۵} \ldots\ldots) = \text{۲۳۶٫۶} \ldots\ldots$ فٹ

نیز ا م = لا، اس سے معلوم ہوا کہ ہر دو مطلوبہ فاصلے ۲۳۶٫۶ .... فٹ ہیں۔

مثال ۳ - ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے ایک برج کے پائین اور راس کے انخفاضی زاویے ۶۰° اور ۳۰° مشاہدہ کیے گئے ہیں، برج کی بلندی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ س د برج ہے۔

ا نقطۂ مشاہدہ اور ب ا پہاڑ کی بلندی۔

خطِ افقی ا ع کھینچو تب زاویہ ع ا س = ۳۰°

اور زاویہ ع ا د = ۶۰°

فرض کرو کہ برج کی بلندی لا فٹ ہے، د س کو اتنا خارج کرو کہ وہ ا ع کو نقطۂ ع پر ملے یعنی

س ع = ا ب - لا = ۲۰۰ - لا

اب چونکہ $\angle$ ا د ب = $\angle$ د ا ع = ۶۰° (اقلیدس م ۱، ش ۲۹)

$\therefore$ د ب = ا ب مم ا د ب = ۲۰۰ مم ۶۰° = $\frac{۲۰۰}{\sqrt{۳}}$

نیز $\frac{۲۰۰ - لا}{د ب} = \frac{س ع}{ا ع} =$ مس ۳۰° $= \frac{۱}{\sqrt{۳}}$

اس لیے ۲۰۰ - لا $= \frac{د ب}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۰۰}{۳}$

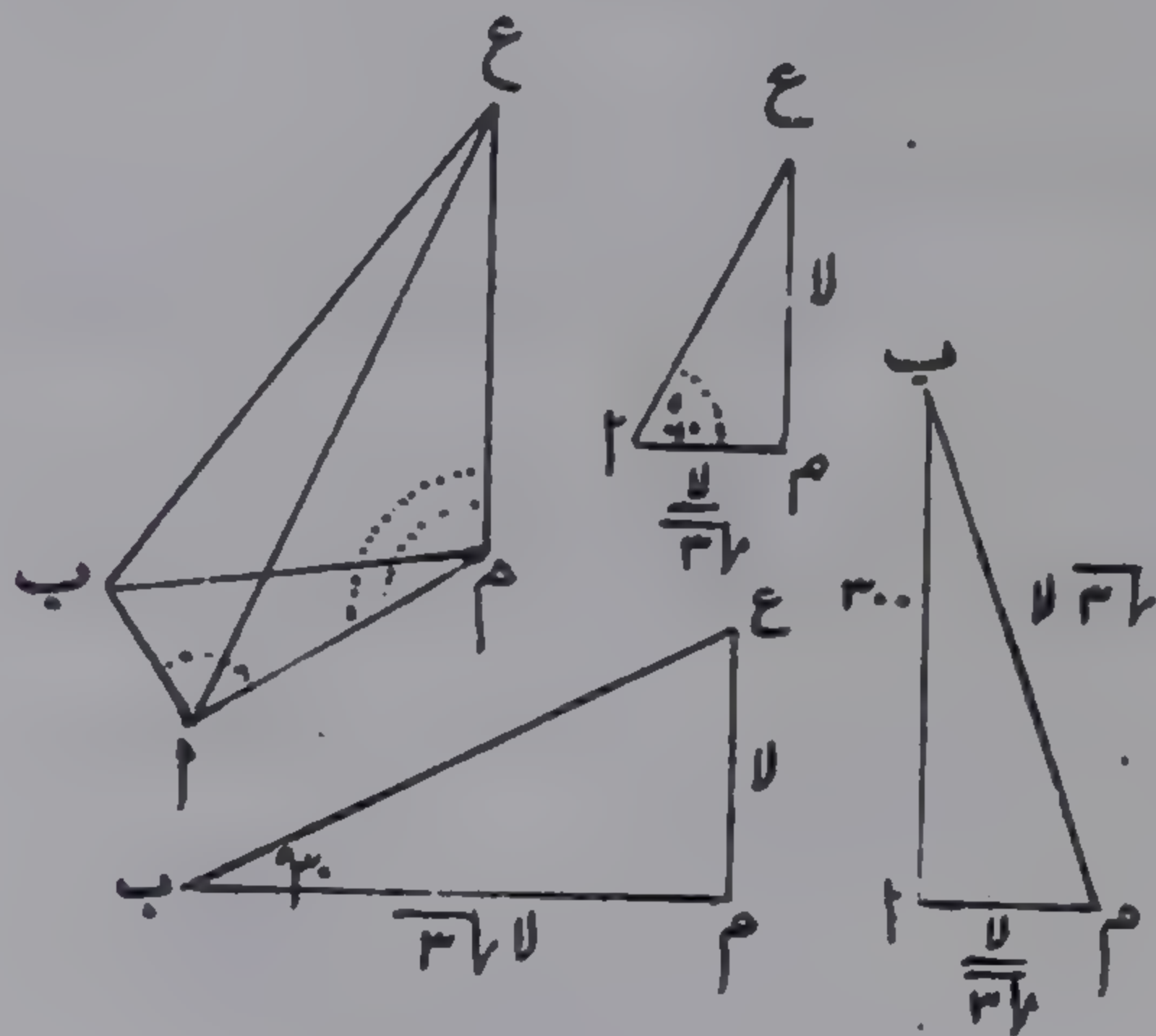
پس لا = ۲۰۰ - $\frac{۲۰۰}{۳}$ = ۱۳۳ $\frac{۱}{۳}$ فٹ

مثال ۴ - ایک برج کے جنوب میں کسی مقام سے ایک شخص نے برج کا زاویۂ ارتفاع ۶۰° دیکھا، اس کے بعد ایک سطحِ افقی پر وہ ۳۰۰ فٹ مغرب کی طرف گیا اور وہاں زاویۂ ارتفاع ۳۰° پایا، برج کی بلندی اور برج سے اس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ع برج کی چوٹی ہے اور ع م بلندی۔ نقطہ ا برج کے جنوب میں اور ب نقطہ ا کے مغرب میں واقع ہے۔

زاویے ع م ا، ع م ب، م ا ب سب قائمے ہیں۔

چونکہ مثلثات ع ا م، ع ب م، ا ب م سب مختلف سطحوں میں واقع ہیں اس لیے سہولت کی خاطر ان کو جداگانہ دوسری، تیسری، چوتھی شکلوں میں

ایک ہی پیمانہ پر دکھایا گیا ہے ۔

ہمیں معلوم ہے کہ ا ب = ۳۰۰ فٹ، اور زاویہ ع ا م = °۶۰

اور زاویہ ع ب م = °۳۰

فرض کرو کہ بُرج کی بلندی لا فٹ ہے ۔

دوسری شکل سے

$$\frac{\text{ا م}}{\text{لا}} = \text{مم}\ \text{۶۰}^\circ = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$$

یعنی

$$\text{ا م} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۳}}}$$

تیسری شکل سے

$$\frac{\text{ب م}}{\text{لا}} = \text{مم}\ \text{۳۰}^\circ = \sqrt{\text{۳}}$$

یعنی

$$\text{ب م} = \sqrt{\text{۳}} \times \text{لا}$$

آخری شکل سے $\quad \text{ب م}^{۲} = \text{ا م}^{۲} + \text{ا ب}^{۲}$

یعنی $\quad ۳\,\text{لا}^{۲} = \frac{۱}{۴}\,\text{لا}^{۲} + ۳۰۰^{۲}$

$\therefore \quad ۸\,\text{لا}^{۲} = ۳ \times ۳۰۰^{۲}$

$\therefore \quad \text{لا} = \frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}} = ۱۵۰\sqrt{\frac{۶}{۲}} = ۷۵\sqrt{۶}$

$= ۷۵ \times ......۲٫۴۴۹۴۹ = ۱۸۳٫۷۱۰.....$ فٹ

نیز اس شخص کا بُرج سے ابتدائی فاصلہ

$= \text{لا م } ۶۰^{\circ} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{۳}} = ۷۵ \times \sqrt{۲}$

$= ۷۵ \times (۱٫۴۱۴۲......) = ۱۰۶٫۰۶۵......$ فٹ

امثلہ نمبری ۸

۱۔ دریا کے ایک کنارے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے مقابل کے کنارے پر ایک درخت کے محاذی زاویہ ۶۰° مشاہدہ کیا کنارے سے ۴۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہی زاویہ ۳۰° دیکھا، درخت کی اونچائی اور دریا کی چوڑائی دریافت کرو۔

(۲) کسی خاص مقام سے ایک بُرج کا زاویۂ ارتفاع دیکھا گیا تو اس کا مماس التمام $\frac{۳}{۵}$ تھا، بُرج کی سیدھ میں ۳۲ فٹ جانے پر پھر وہی زاویہ دیکھا تو اس کا مماس التمام $\frac{۲}{۵}$ تھا۔ برج کی بلندی دریافت کرو۔

۳۔ مقام ا سے ایک بُرج کا زاویۂ ارتفاع دیکھا گیا اس وقت اس کا مماس $\frac{۵}{۱۲}$ تھا۔ بُرج کی طرف ۲۴۰ فٹ جانے پر زاویۂ ارتفاع دوبارہ دیکھا گیا تو اس کا مماس $\frac{۳}{۴}$ تھا۔ برج کی بلندی دریافت کرو۔

۴۔ ایک ایسے دودکش کی بلندی دریافت کرو۔ جبکہ اس کے پائین کی سیدھ میں ۱۰۰ فٹ ایک خط افقی پر جانے سے اس کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع ۳۰° سے ۴۵° ہو جائے۔

(۵) ایک پہاڑ سطح سمندر سے ۲۰۰ فٹ اونچا ہے، اس کی چوٹی سے کسی شخص نے

دو جہازوں کے انخفاضی زاویے بالترتیب ۴۵° اور ۳۰° مشاہدہ کیے اگر جہازوں کو ملانیوالا خط پہاڑ کے پائین میں سے گذرے تو جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

(۶) ایک چٹان کی چوٹی سے کسی شخص نے سمندر میں دو لنگروں کے انخفاضی زاویے ۳۹° اور ۲۶° مشاہدہ کیے۔ اگر لنگروں کا درمیانی فاصلہ ۳۰۰ گز ہو اور ان کو ملانے والا خط چٹان کے پائین میں سے گزرے تو چٹان کی بلندی اور سب سے نزدیک کے لنگر کا فاصلہ چٹان کے پائین سے دریافت کرو۔ معلوم ہے:

مم ۲۶° = ۲٫۰۵۰۳ اور مم ۳۹° = ۱٫۲۳۴۹

۷۔ ایک درخت کے اوپر کا حصہ آندھی سے ٹوٹ کر سطح زمین سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے اور جڑ سے اس نقطہ کا فاصلہ جہاں درخت کی چوٹی زمین سے مس کرتی ہے ۵۰ فٹ ہے درخت کی بلندی دریافت کرو۔

۸۔ دو برجوں کے درمیان افقی فاصلہ ۶۰ فٹ ہے اور دوسرے برج کی چوٹی سے جو ۱۵۰ فٹ بلند ہے پہلے برج کی چوٹی کا زاویۂ انخفاض ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے، پہلے برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک نامکمل برج کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع (۴۵°) ایک ایسے مقام سے مشاہدہ کیا گیا ہے جو پائین برج سے ۱۲۰ فٹ کے فاصلہ پر ہے معلوم کرو کہ مینار اور کتنا اونچا کیا جائے کہ اس کا زاویۂ ارتفاع اسی مقام سے ۶۰° ہو۔

۱۰۔ ایک سڑک ۱۰۰ فٹ چوڑی ہے اور اس کے دونوں طرف دو ستون ہیں جن کی اونچائی ایک ہی ہے، ستونوں کے درمیان سڑک کے کسی نقطہ سے ان کی چوٹیوں کے ارتفاع ۶۰° اور ۳۰° مشاہدہ کیے گئے ہیں۔ ستونوں کی بلندی اور نقطہ کا مقام دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک برج کے راس کا زاویۂ ارتفاع ایک مقام سے ۶۰° دیکھا گیا۔ اس سے ۴۰ فٹ اونچے مقام پر ارتفاع ۴۵° تھا، برج کی بلندی اور مشاہدہ کرنے والے مقامات سے اس کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۲۔ دامنِ کوہ میں کسی مقام سے ایک پہاڑ کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع ۴۵° دکھائی دیا، جب ایک سطح مائل پر جو افق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی ایک میل اوپر چڑھے تو وہی زاویۂ ارتفاع ۶۰° تھا۔ پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۳- اگر ایک لکڑی کا سایہ اس کی بلندی کا $\sqrt{3}$ گنا ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو۔

۱۴- سطح ہموار پر ایک برج ہے۔ جب سورج کا ارتفاع °۳۰ ہو تو برج کے سایہ کا طول بہ نسبت اُس صورت کے جبکہ ارتفاع °۴۵ ہو ۶۰ فٹ زیادہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ برج کی بلندی $30(1+\sqrt{3})$ فٹ ہے۔

۱۵- تین مقامات ا، ب، ج سمندر کے سیدھے کنارے پر اس طرح واقع ہیں کہ اب = ب ج = ۲ میل۔ ایک جہاز کنارے کی عمودی سمت میں مقام ب کی طرف آرہا ہے اور راستہ کے کسی مقام پر طول اج کے محاذی جہاز پر زاویہ °۶۰ بنتا ہے اس کے بعد جہاز دس منٹ کے لیے اُس سمت میں اسی رفتار سے جاتا ہے اور پھر اج کے محاذی زاویہ °۱۲۰ بنتا ہے۔ معلوم کرو کہ جہاز کس رفتار سے جا رہا ہے۔

۱۶- دو علم سطح ہموار پر قائم ہیں، علموں کے درمیان اور ان کے ملانے والے خط پر ا اور ب دو نقطے ہیں۔ اگر ا سے علموں کے ارتفاعی زاویے دیکھے جائیں، تو وہ °۳۰ اور °۶۰ ہیں اور اگر ب سے دیکھے جائیں تو °۶۰ اور °۴۵ ہیں۔ اگر اب کا طول ۳۰ فٹ ہو تو علموں کی بلندیاں اور ان کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۷- فرض کرو کہ سطح افقی پر ایک مینار ہے، س اُس کا سر اور پ پائین ہے۔ دو مقامات ا اور ب اسی سطح میں لیے گئے ہیں، اب = ۳۲ فٹ اور زاویہ پ اب = °۹۰ نیز یہ معلوم ہے کہ مم س اپ = $\frac{2}{5}$ اور مم س ب پ = $\frac{3}{5}$، مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۸- سطح ہموار پر ایک مربع برج ہے۔ سطح کے کسی مقام سے برج کے سر کے تین کونے دکھائی دیتے ہیں اور وہاں کھڑے ہوکر کونوں کے تین ارتفاعی زاویے °۴۵، °۶۰، °۴۵ مشاہدہ کیے گئے ہیں، ثابت کرو کہ برج کے ارتفاع کو ہر ایک ضلع کے طول سے وہی نسبت ہے جو $\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)$ کو ۴ سے ہے۔

۱۹- ایک روشنی کے مینار کا رُخ شمال کی طرف ہے اور اس سے روشنی کی شعاعیں قطاع دائرہ کی شکل میں سمتوں شمال مشرق اور شمال مغرب کے درمیانی حصہ میں پڑتی ہیں۔ ایک جہاز مغرب کی طرف جا رہا تھا۔ اس پر ایک مسافر کو روشنی کی شعاعیں سب سے اول اُس وقت دکھائی دیتی ہیں جبکہ جہاز روشنی گھر سے ۵ میل کے

فاصلہ پر ہے اور وہ شعاعیں ۳۰ ۲ ۱/۲ منٹ تک دکھائی دیتی رہتی ہیں۔ جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک دریا کے کنارے متوازی اور مستقیم ہیں۔ ایک شخص نے ایک کنارے لا ما کے کسی مقام لا پر کھڑے ہو کر دیکھا کہ مقام لا اور مقابل کے کنارے پر کے مقام ہے کو ملانے والا خطِ مستقیم' لا ما سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے' اس کے بعد وہ دریا کے کنارے ۲۰۰ گز مقام ما تک چلا اور اس نے دیکھا کہ زاویہ ہے ما لا = ۶۰° دریا کا عرض دریافت کرو۔

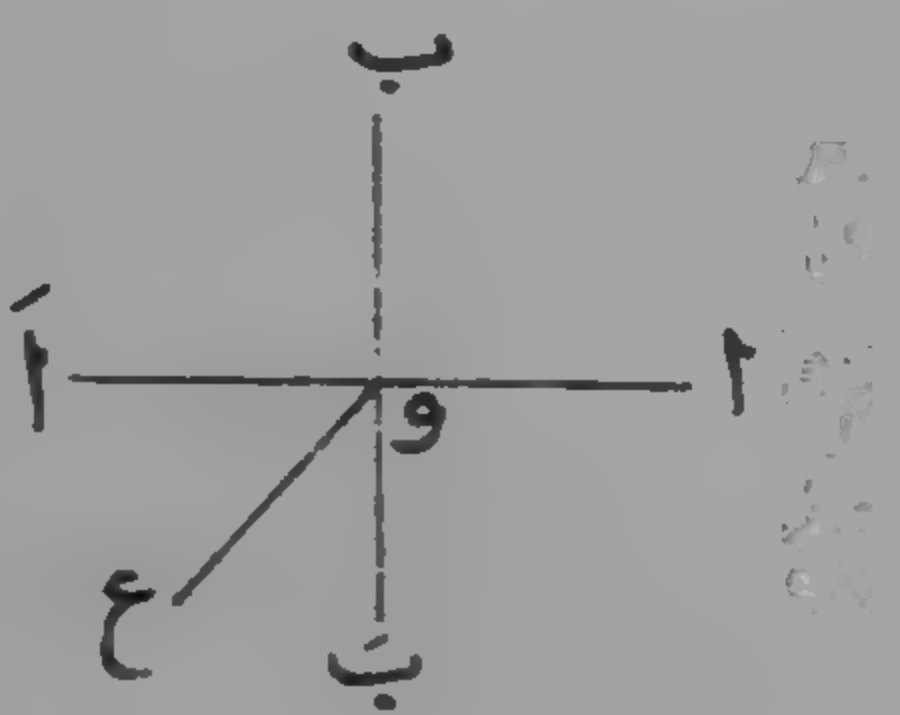
۲۱۔ ایک شخص شمال کی طرف جا رہا تھا اُس نے اپنے ٹھیک مشرق کی طرف ایک غبارہ کو شمال مغرب کی طرف جاتے دیکھا' غبارہ کا ارتفاع اس وقت ۶۰° تھا جب وہ ۴۰۰ گز آگے چلا تو غبارہ عین اس کی سمت راس میں تھا اگر غبارہ کا ارتفاع اس اثنا میں یکساں رہا تو اس کی بلندی دریافت کرو۔

چوتھا باب

علمِ مثلث میں علاماتِ جبریہ کا استعمال

۴۶۔ **مثبت اور منفی زاویے**۔ دفعہ ۶ میں ہم نے ایسے زاویوں کا ذکر کیا تھا جن کی مقدار پر قائمہ سے کم ہونے کی قید نہ تھی تو ہم نے یہ فرض کر لیا کہ خطِ دائر ہمیشہ گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں چکر لگاتا ہے جبکہ گھڑی کا رُخ اوپر کی طرف ہو۔ اس سمت کو ہم **مقابل سمتِ ساعت** کہینگے۔ اور آئندہ جب کوئی خط دائر اس سمت میں حرکت کریگا تو ہم اس کو یوں بیان کرینگے کہ یہ مثبت سمت میں چکر لگاتا ہے یا مثبت زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

جب خطِ دائر سمت مذکورۂ بالا کے مخالف یعنی گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں حرکت کرے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ منفی سمت میں چکر لگاتا ہے۔ اور منفی زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

اس منفی سمت کو **موافق سمتِ ساعت** بھی کہتے ہیں۔

۴۷۔ فرض کرو کہ خطِ دائر مقام و ا سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام و ع پر پہنچتا ہے جو و اَ اور و بَ کے درمیان واقع ہے اور زاویہ اَ و بَ کی تنصیف کرتا ہے۔ اب اگر یہ مثبت سمت میں گھوم کر اس مقام پر پہنچا ہو تو اس نے ایک مثبت زاویہ یعنی + ۲۲۵°

مرتسم کیا ہے۔ لیکن اگر اس کی گردش کی سمت منفی ہو تو اس نے ایک منفی زاویہ
- ۱۳۵° اپنی حرکت سے پیدا کیا ہے۔
فرض کرو کہ ہمیں صرف یہی معلوم ہے کہ خطِ دائر مقام مذکورہ پر ہے۔
اب ممکن ہے کہ اس نے ایک، دو، تین،...... پورے چکر لگانے کے بعد
ایک مثبت زاویہ + ۲۲۵° مرتسم کیا ہو یا ایک، دو، تین،.... پورے چکر
منفی سمت میں لگانے کے بعد ایک منفی زاویہ - ۱۳۵° اپنی گردش سے
پیدا کیا ہو۔

صورتِ اول میں یہ زاویۂ مرتسمہ ۲۲۵° ہوگا یا ۳۶۰° + ۲۲۵°،
یا　۲ × ۳۶۰° + ۲۲۵°، یا ۳ × ۳۶۰° + ۲۲۵°،.......
یعنی　۲۲۵°، یا ۵۸۵°، یا ۹۴۵°، یا ۱۳۰۵°،........

صورتِ دوم میں زاویۂ مرتسمہ - ۱۳۵° ہوگا یا - ۳۶۰° - ۱۳۵°،.....
یا　- ۲ × ۳۶۰° - ۱۳۵°، یا - ۳ × ۳۶۰° - ۱۳۵°،........
یعنی　- ۱۳۵°، یا - ۴۹۵°، یا - ۸۵۵°، یا - ۱۲۱۵°،........

۴۸ - **مثبت اور منفی خطوط** - فرض کرو کہ ایک شخص سے یہ
کہا جاتا ہے کہ وہ ایک سیدھی سڑک پر کے ایک میلی پتھر سے روانہ ہو کر ۱۰۰ گز سڑک
مذکور پر چلے اور پھر ٹھہر جائے۔ جب تک ہمیں یہ نہ بتایا جائے کہ وہ کس سمت
میں چلتا ہے ہم اُس کے ٹھہرنے کے مقام کو متعین نہیں کر سکتے۔ ہم صرف
اس قدر بتا سکتے ہیں کہ وہ میلی پتھر سے ۱۰۰ گز کے فاصلہ پر یا تو اِس طرف
ہوگا یا اُس طرف۔

بنائر علیہ ایک خطِ مستقیم پر فاصلوں کے ناپنے کے لیے یہ سہولت بخش ہے
کہ ایک خاص سمت کو معیار مان لیا جائے۔ اس سمت کو مثبت سمت کہتے ہیں اور وہ
سب فاصلے جو اس خط پر اس سمت میں ناپے جائیں ان کو مثبت فاصلے کہتے ہیں۔ مخالف
سمت کو منفی سمت کہتے ہیں اور تمام فاصلے جو اس خط پر اس سمت میں ناپے جائیں
منفی فاصلے کہلاتے ہیں۔

صفحہ کے سب سے نچلے کنارے کے متوازی خطوں کے لیے معیاری

یا مثبت سمت دائیں طرف کی سمت ہے۔

طول و ا مثبت سمت میں ہے اور و اَ منفی سمت میں ہے۔ اگر و ا یا و اَ کا مطلق طول ل ہو تو نقطہ ا ' و سے + ل فاصلہ پر کہلائیگا اور نقطہ اَ ' و سے - ل فاصلہ پر کہلائیگا۔

اَ ——— و ——— ب ——— ا

پس اُن تمام خطوط کے ساتھ جو دائیں جانب کو ناپے جائیں مثبت علامت لگائی جاتی ہے اور ان تمام خطوط کے ساتھ جو بائیں جانب کو ناپے جائیں منفی علامت لگائی جاتی ہے۔

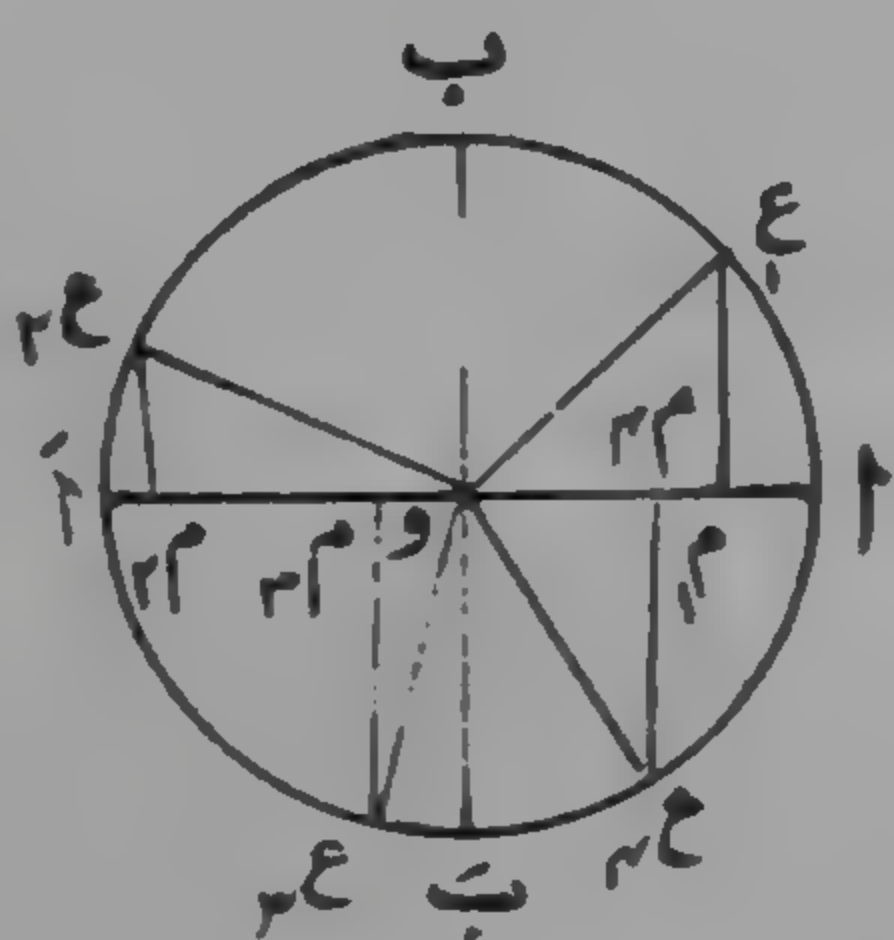
اگر ایک نقطہ و سے روانہ ہو کر مثبت فاصلہ و ا طے کرے اور پھر پیچھے کی طرف ایک فاصلہ ا ب ' و کی طرف طے کرے تو مثبت سمت میں اس کا فاصلہ طے شدہ = و ا + (- ا ب) = و ا - ا ب

۴۹۔ اُن خطوط کے لیے جو ا اَ پر عمود وار ہوں مثبت سمت وہ ہوتی ہے جو و سے صفحہ کے بالائی کنارہ کی طرف و ب کی سمت میں ناپی جائے اور وہ تمام خطوط جو و سے صفحہ کے پائین کی طرف ناپے جائیں (یعنی و بَ کی سمت میں) منفی خط کہلاتے ہیں۔

۵۰۔ کسی مقدار کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں۔

فرض کرو کہ خط ابتدائی و ا مثبت سمت میں کھینچا گیا ہے اور و اَ کی سمت و ا کے مقابل ہے۔

فرض کرو کہ ب و بَ خط و ا سے زاویۂ قائمہ بناتا ہے اور اس کی مثبت سمت و ب ہے۔

فرض کرو کہ خط دائر و ع

مقام و ا سے شروع ہو کر کسی سمت (مثبت یا منفی) میں چکر لگاتا ہے اور اپنی گردش سے کوئی زاویہ پیدا کرتا ہے جس کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے۔

خطِ دائر پر کسی نقطہ ع سے ا و اَ پر عمود ع م نکالو۔

[اوپر کی شکل میں چکر لگانے والے خط کے چار مقامات دکھائے گئے ہیں، ہر ایک ربع میں ایک مقام ہے اور امتیاز کی خاطر اعداد موخرہ ۱، ۲، ۳، ۴ حرف ع کے ساتھ لگائے گئے ہیں۔

پس جب زاویوں کی مقدار پر قائمہ سے چھوٹی ہونے کی قید نہ ہو تو مثلثی نسبتوں کی تعریفات کسی مقدار کے زاویوں کے لیے مفصلۂ ذیل ہونگی اور یاد رہے کہ زاویۂ مادہ کی صورت میں جو تعریفات ہم نے مثلثی نسبتوں کی دفعہ ۲۳ میں دی ہیں وہ بالکل وہی ہیں جو ہم اب لکھتے ہیں۔

$\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ کو زاویہ ا و ع کی جیب کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ " " " جیب التمام "

$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}$ " " " کا مماس "

$\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ " " " مماس التمام "

$\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}$ " " " قاطع "

$\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}$ " " " قاطع التمام "

مقادیر ا۔ جم ا و ع اور ا۔ جب ا و ع کو زاویہ ا و ع کا بالترتیب سہم اور سہم التمام کہتے ہیں۔

۵۱۔ بعینہٖ اُس عمل سے جو دفعہ ۲۷ میں ہوا ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ زاویہ او ع (= ط) کی تمام قیمتوں کے لیے۔

$$\text{جب}^2\text{ط} + \text{جم}^2\text{ط} = ۱$$

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \text{مس ط}$$

$$\text{قط}^2\text{ط} = ۱ + \text{مس}^2\text{ط}$$

اور

$$\text{قم}^2\text{ط} = ۱ + \text{مم}^2\text{ط}$$

۵۲۔ مثلثی نسبتوں کی علامات

رُبع اول۔ فرض کرو کہ خطِ دائر رُبع اول میں ہے جیسے و ع$_1$ چکر لگانے والے خط کو ہمیشہ مثبت خیال کرو۔

اس صورت میں و م$_1$ اور م$_1$ ع$_1$ دونوں مثبت ہیں جس سے معلوم ہوا کہ مثلثی نسبتیں سب مثبت ہیں۔

رُبع دوم۔ فرض کرو کہ خطِ دائر و ع$_2$ ربع دوم میں ہے۔ اس صورت میں م$_2$ ع$_2$ مثبت ہے اور و م$_2$ منفی۔

چونکہ زاویہ کی جیب دو مثبت مقادیر کی باہمی نسبت کے برابر ہے اس لیے وہ مثبت ہے، چونکہ جیب التمام ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ منفی ہے اور نسب نما مثبت، اس لیے وہ منفی ہے۔

زاویہ کا مماس ایک ایسی نسبت کے برابر جس کا شمار کنندہ مثبت ہے اور نسب نما منفی اس لیے وہ منفی ہے۔

مماس التمام منفی ہے۔

قاطع التمام مثبت ہے۔

قاطع منفی ہے۔

رُبع سوم۔ فرض کرو کہ خطِ دائر ربع سوم میں ہے جیسے و ع$_3$ اس صورت میں م$_3$ ع$_3$ اور و م$_3$ دونوں منفی ہیں۔

جیب منفی ہے۔

جیب التمام منفی ہے۔
مماس مثبت ہے۔
مماس التمام مثبت ہے۔
قاطع التمام منفی ہے۔
قاطع منفی ہے۔

رُبع چہارم۔ فرض کرو کہ چکر لگانے والا خط و ع ہ رُبع چہارم میں ہے، تب م ہ ع ہ منفی ہوگا اور و م ہ مثبت، اس لیے

جیب منفی ہے۔
جیب التمام مثبت ہے۔
مماس منفی ہے۔
مماس التمام منفی ہے۔
قاطع التمام منفی ہے۔
قاطع مثبت ہے۔

جدول ذیل میں مثلثی نسبتوں کی علامات اُن تمام صورتوں میں مندرج ہیں جب خطِ دائر کسی ایک رُبع میں واقع ہو اور کسی زاویۂ زیرِ بحث کا ایک طرف سے احاطہ کرے۔

ب

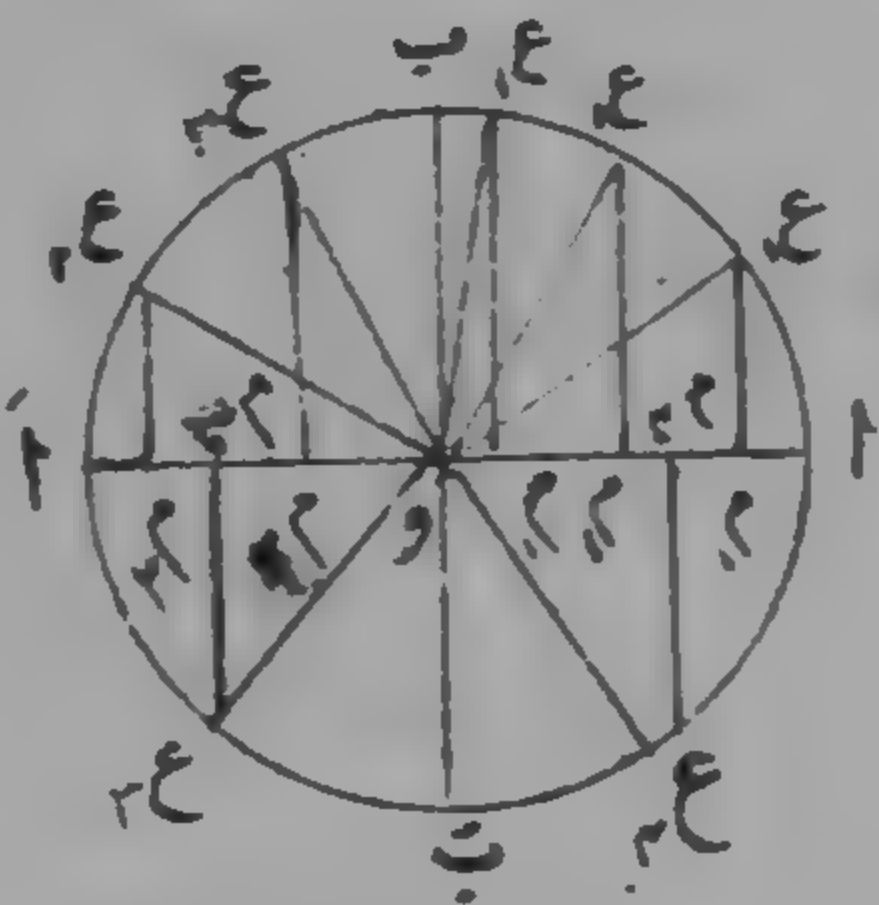
اَ		و		ا
جب +			جب +	
جم −			جم +	
مس −			مس +	
مم −			مم +	
قم +			قم +	
قط −			قط +	
جب −			جب −	
جم −			جم +	
مس +			مس −	
مم +			مم −	
قم −			قم −	
قط −			قط +	

بَ

۵۳۔ جب زاویہ ۰° سے ۳۶۰° تک بڑھے تو اس کی ہر ایک مثلثی نسبت کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ چکر لگانے والے خط و ع کا مستقل طول ا ہے۔

جب یہ و ا پر منطبق ہوتا ہے تو طول و م۱ برابر ا کے ہوتا ہے اور جب یہ و ب پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ م۱ نقطہ و پر منطبق ہوتا ہے اور و م۱ صفر ہوتا ہے یعنی جب خطِ دائر و ا سے و ب تک حرکت کرتا ہے تو طول و م۱ کی قیمت ا سے صفر تک گھٹتی ہے۔

جب خطِ دائر دوسرے ربع میں و ب سے و اَ تک حرکت کرتا ہے تو طول و م۲ منفی ہوتا ہے اور تعداداً صفر سے ا تک بڑھتا ہے (یعنی جبری طور پر صفر سے -ا تک گھٹتا ہے)۔

تیسرے رُبع میں طول و م۳ ازروئے الجبرا -ا سے صفر تک بڑھتا ہے اور چوتھے رُبع میں طول و م۴ صفر سے ا تک بڑھتا ہے۔

رُبع اول میں طول م۱ ع۱ صفر سے ا تک بڑھتا ہے، م۲ ع۲ رُبع دوم میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے، رُبع سوم میں م۳ ع۳ جبری طور پر صفر سے -ا تک گھٹتا ہے اور رُبع چہارم میں م۴ ع۴ جبری طور پر -ا سے صفر تک بڑھتا ہے۔

۵۴۔ جیب۔ رُبع اول میں جب زاویہ ۰° سے ۹۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب (م۱ع۱/ا) متواتر ۰/ا سے ا/ا تک یعنی صفر سے ا تک بڑھتی ہے۔

دوسرے رُبع میں جب زاویہ ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب ا/ا سے ۰/ا تک یعنی ا سے صفر تک گھٹتی ہے۔

رُبع سوم میں جب زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی

جیب $\frac{ن}{ر}$ سے $\frac{-ر}{ر}$ تک یعنی صفر سے -۱ تک گھٹتی ہے۔
ربع چہارم میں جب زاویہ °۲۷۰ سے °۳۶۰ تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب $\frac{-ر}{ر}$ سے $\frac{ن}{ر}$ تک یعنی -۱ سے صفر تک بڑھتی ہے۔

۵۵- جیب التمام - ربع اول میں جیب التمام $\frac{و م}{ر}$ کے برابر ہے اور $\frac{ر}{ر}$ سے $\frac{ن}{ر}$ یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔
ربع دوم میں یہ $\frac{ن}{ر}$ سے $\frac{-ر}{ر}$ یعنی صفر سے -۱ تک گھٹتی ہے۔
ربع سوم میں یہ $\frac{-ر}{ر}$ سے $\frac{ن}{ر}$ تک یعنی -۱ سے صفر تک بڑھتی ہے۔
ربع چہارم میں یہ $\frac{ن}{ر}$ سے $\frac{ر}{ر}$ تک یعنی صفر سے ۱ تک بڑھتی ہے۔

۵۶- مماس - ربع اول میں م۱ ع۱ متواتر صفر سے ا تک بڑھتا ہے اور و م۱ متواتر ر سے صفر تک گھٹتا ہے پس نسبت $\frac{م۱ ع۱}{و م۱}$ متواتر بڑھتی ہے (کیونکہ اس کا شمار کنندہ متواتر بڑھتا ہے اور نسب نما متواتر گھٹتا ہے)۔
جب و ع، و ا پر منطبق ہوتا ہے تو مماس صفر ہوتا ہے اور جب خط دائر ایک ایسے زاویے سے گھوم چکتا ہے جو قائمہ سے ذرا کم ہو یعنی جب و ع۱ تقریباً و ب پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت م۱ ع۱ تقریباً ر کے برابر ہوتا ہے اور طول و م۱ نہایت چھوٹا ہوتا ہے، اس وقت نسبت $\frac{م۱ ع۱}{و م۱}$ کی قیمت بہت بڑی ہوتی ہے اور و ع۱ جتنا قریب و ب کے آتا جاتا ہے اتنا ہی اس نسبت کی قیمت بڑھتی جاتی ہے اس سے معلوم ہوا کہ خط دائر کو و ب کے کافی قریب لانے سے ہم مماس کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں، اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ جب زاویہ °۹۰ ہوتا ہے تو اس کا مماس غیر متناہی ہوتا ہے۔
مقدار غیر متناہی کو تعبیر کرنے کے لیے علامت ∞ استعمال کرتے ہیں۔
ربع اول میں مماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔
دوسرے ربع میں جب خط دائر ایک ایسا زاویہ ا و ع۱ مرتسم کرتا ہے جو قائمہ

سے ذرا زیادہ ہو تو اس وقت م۲ ع۲ تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے اور و م۲ منفی اور نہایت چھوٹا ہوتا ہے یعنی اُس وقت مماس ایک منفی، غیر متناہی مقدار کے برابر ہوتا ہے۔

نیز جب خطِ دائر وب سے وأ تک حرکت کرتا ہے تو م۲ ع۲ مقدار میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے اور و م۲ منفی ہوتا ہے اور صفر سے -ا تک گھٹتا ہے پس جب چکر لگانے والا خط وأ پر منطبق ہوتا ہے تو مماس صفر کے برابر ہوتا ہے۔

لہٰذا ثابت ہوا کہ رُبع دوم میں مماس -∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

تیسرے رُبع میں م۳ ع۳ اور و م۳ دونوں منفی ہوتے ہیں اس لیے ان کی نسبت مثبت ہوتی ہے، نیز جب خطِ دائر وبَ پر منطبق ہوتا ہے تو مماس غیر متناہی ہوتا ہے۔ اس لیے ثابت ہوا کہ ربع سوم میں مماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

چوتھے رُبع میں م۴ ع۴ منفی ہوتا ہے اور و م۴ مثبت اور ان کی نسبت منفی ہوتی ہے، نیز جب خطِ دائر مقام وبَ پر سے ہو کر گزرتا ہے تو مماس کی قیمت +∞ سے بدل کر -∞ ہو جاتی ہے (جیسا اوپر ہم نے مقام وب پر دیکھا)۔ پس معلوم ہوا کہ رُبع چہارم میں مماس -∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

۵۷- مماس التمام۔ جب خطِ دائر وا پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت م۱ ع۱ نہایت چھوٹا اور و م۱ تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے، پس مماس التمام (یعنی نسبت و م۱ / م۱ ع۱) ابتدا میں ہی غیر متناہی ہوتا ہے اور جب خطِ دائر وا سے وب تک گردش کرتا ہے تو م۱ ع۱ مقدار میں صفر سے ا تک بڑھتا ہے اور و م۱ کی قیمت ا سے صفر تک گھٹتی ہے۔ لہٰذا ربع اول میں مماس التمام ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے۔

دوسرے رُبع میں م۲ ع۲ مثبت ہوتا ہے اور و م۲ منفی، پس معلوم ہوا کہ

مماس التمام صفر سے $\frac{1}{0}$ تک یعنی صفر سے -∞ تک گھٹتا ہے۔
تیسرے رُبع میں مماس التمام مثبت ہوتا ہے اور ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے [کیونکہ جب خطِ دائر مقام و اَ پر سے ہو کر گزرتا ہے تو مماس التمام کی قیمت -∞ سے بدل کر +∞ ہو جاتی ہے]
رُبع چہارم میں مماس التمام منفی ہوتا ہے اور صفر سے -∞ تک گھٹتا ہے۔

۵۸۔ **قاطع** ۔ جب خطِ دائر و ا پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت وم$_1$ کی قیمت ا ہوتی ہے اس لیے قاطع کی قیمت بھی ایک ہوتی ہے۔
جب خط دائر و ا سے و ب تک گردش کرتا ہے تو وم$_1$ مقدار میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے اور جب چکر لگانے والا خط و ب پر منطبق ہوتا ہے تو قاطع کی قیمت $\frac{1}{0}$ یعنی ∞ ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ ربع اول میں قاطع ا سے ∞ تک بڑھتا ہے۔
رُبع دوم میں وم$_2$ منفی ہوتا ہے اور مقدار میں صفر سے -ا تک گھٹتا ہے۔ اس لیے اس ربع قاطع -∞ سے -ا تک بڑھتا ہے [کیونکہ جب خطِ دائر مقام و ب پر سے ہو کر گزرتا ہے تو مقدار وم$_1$ کی علامت بدل جاتی ہے اور اس لیے قاطع کی قیمت ∞ سے -∞ تک بدل جاتی ہے۔]
رُبع سوم میں وم$_3$ ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور -ا سے صفر تک بڑھتا ہے اس لیے قاطع -ا سے -∞ تک گھٹتا ہے۔
رُبع چہارم وم$_4$ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور صفر سے ا تک بڑھتا ہے۔ اس لیے اس ربع میں قاطع الزاویہ ∞ سے +ا تک گھٹتا ہے۔

۵۹۔ **قاطع التمام** ۔ اس کے تغیرات کی تحقیق بھی اسی طرح سے ہو سکتی ہے جیسے قاطع الزاویہ کے تغیرات کی ہوئی۔
رُبع اول میں قاطع التمام ∞ سے +ا تک گھٹتا ہے۔
رُبع دوم میں یہ +ا سے +∞ تک بڑھتا ہے۔
رُبع سوم میں یہ -∞ سے -ا تک بڑھتا ہے۔

$\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ یعنی $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$ کو زاویہ ا و ع کا مماس التمام کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}$ 〃 $\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$ کو زاویہ ا و ع کا **قاطع التمام** کہتے ہیں۔

$\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}$ 〃 $\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$ کو 〃 〃 〃 **قاطع** کہتے ہیں۔

کسی زاویہ کی جیب التمام ا سے جس قدر کم ہو اُسے یعنی مقدار ا - جم ا و ع کو زاویۂ مذکور کی سہم الجیب کہتے ہیں۔ نیز کسی زاویہ کی جیب ا سے جس قدر کم ہو یعنی مقدار ا - جیب ا و ع کو زاویۂ مذکور کی سہم التمام کہتے ہیں۔

۲۴ - یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مثلثی نسبتیں سب اعداد ہیں۔

اوپر آٹھ نسبتوں کو اختصار کی خاطر بالترتیب یوں لکھتے ہیں۔

جب ا و ع، جم ا و ع، مس ا و ع، مم ا و ع، قم ا و ع، قط ا و ع، سہ ا و ع، سم ا و ع

آخری دو نسبتیں شاذ و نادر استعمال ہوتی ہیں۔

۲۵ - تعریفات سے ظاہر ہے کہ قاطع التمام جیب کا اُلٹ ہے۔

یعنی قم ا و ع = $\frac{1}{\text{جب ا و ع}}$

اسی طرح قاطع زاویہ جیب التمام کا اُلٹ ہے یعنی

قط ا و غ = $\frac{1}{\text{جم ا و ع}}$

اور مماس التمام مماس کا اُلٹ ہے یعنی

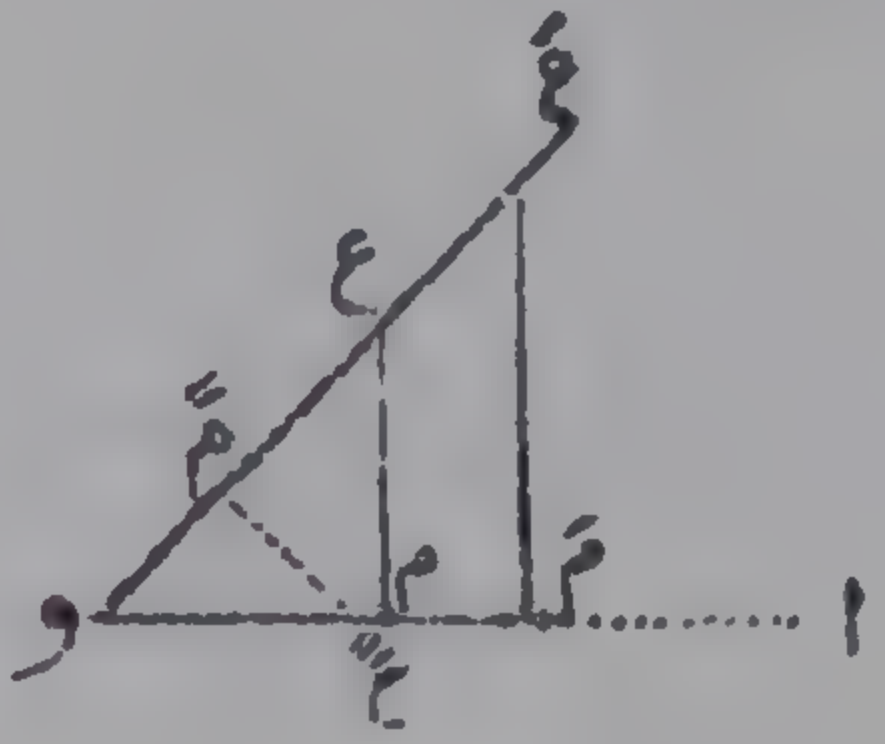
مم ا و ع = $\frac{1}{\text{مس ا و ع}}$

۲۶ - ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی مثلثی نسبتیں ہمیشہ وہی رہتی ہیں - یعنی جب تک زاویہ نہ بدلے وہ نہیں بدلتیں۔

یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ اگر خطِ دائر و ع پر کوئی اَور نقطہ عً لیا جائے اور اُس سے و ا پر عمود عً مً نکالا جائے تو مثلثی نسبتیں جو مثلثات و عً مً اور و ع م سے حاصل ہونگی وہ قیمت میں ایک دوسرے کے برابر ہونگی

ان مثلثوں میں زاویہ و مشترک ہے

اور م اور مً پر کے دونوں زاویے قائمہ ہیں۔

اور اس لیے برابر ہیں ۔

معلوم ہوا کہ یہ دونوں مثلث متشابہ ہیں

اور اس لیے بموجب اقلیدس م ۶ ش ۴، $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{مً عً}}{\text{و عً}}$ جس سے ثابت ہوا کہ زاویہ ا و ع کی جیب ہمیشہ وہی رہتی ہے خواہ کوئی سا نقطہ خطِ دائر پر لیا جائے ۔

اور چونکہ بموجب مسئلہ مذکورہ

$$\frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{و مً}}{\text{و عً}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{مً عً}}{\text{و مً}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جیب التمام اور مماس زاویہ بھی ہمیشہ وہی رہتے ہیں خواہ نقطہ خطِ دائر پر کہیں لیا جائے اور باقی نسبتوں کی بھی یہی کیفیت ہے ۔

اگر و ا کو خطِ دائر خیال کریں اور اس کے کسی نقطہ غً سے و ع پر عمود غً مً نکالیں تو مثلث و غً مً سے جو نسبتیں حاصل ہونگی ان کی قیمتیں بھی وہی ہونگی جو اوپر بیان ہوئیں

کیونکہ دو مثلثات و ع م اور و غً مً میں زاویہ و مشترک ہے اور زاویے و مً غً اور و م ع قائمے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں مثلث متساوی الزوایا ہیں اور اس لیے متشابہ ہیں ۔ لہٰذا

$$\frac{\text{مً غً}}{\text{و غً}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{و مً}}{\text{و غً}} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$$

۲۷ ۔ کسی زاویے کی مثلثی نسبتوں کے اساسی روابط

جیب کی ترسیم

فرض کرو کہ و لا اور و ما دو خطوط ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور زاویوں کی مقداریں اُن طولوں سے تعبیر ہوتی ہیں جو زاویوں کے متناسب و لا پر نلپے جائیں۔ نیز فرض کرو کہ

نقاط م$_1$، م$_2$، م$_3$ .... خط و لا پر اس طرح واقع ہیں کہ

و م$_1$ = م$_1$ م$_2$ = م$_2$ م$_3$ .... مساوی ہیں۔

اب اگر و م$_1$ سے ایک قائمہ تعبیر ہو تو و م$_2$، و م$_3$، و م$_4$ .... سے دو، تین، چار، .... قائمے تعبیر ہونگے۔

نیز اگر ع کوئی نقطہ و لا پر ہو تو و ع سے ایک ایسا زاویہ تعبیر ہوگا جس کی نسبت ایک قائمہ سے وہی ہوگی جو و ع کی و م$_1$ سے ہے۔

[مثلاً اگر و ع = $\frac{1}{2}$ و م$_1$ تو و ع ایک زاویہ قائمہ کے $\frac{1}{2}$ کو تعبیر کریگا اور اگر ع نقطۂ تنصیف م$_3$ م$_4$ کا ہو تو و ع سے $\frac{1}{2}$ ۳ قائمے تعبیر ہونگے]

و م$_1$ کو اس طرح منتخب کرو کہ طول کی ایک اکائی ایک زاویۂ نیمقطری کو تعبیر کرے، اب چونکہ و م$_2$ سے دو قائمے یعنی π نیمقطری زاویے تعبیر ہوتے ہیں اس لیے طول و م$_2$ سے طول کی π اکائیاں یعنی طول کی تقریباً $\frac{1}{7}$ ۳ اکائیاں تعبیر ہونگی۔

اسی طریقے سے منفی زاویے و کی منفی جانب میں طولوں و مَ$_1$، و مَ$_2$.... سے تعبیر ہونگے۔

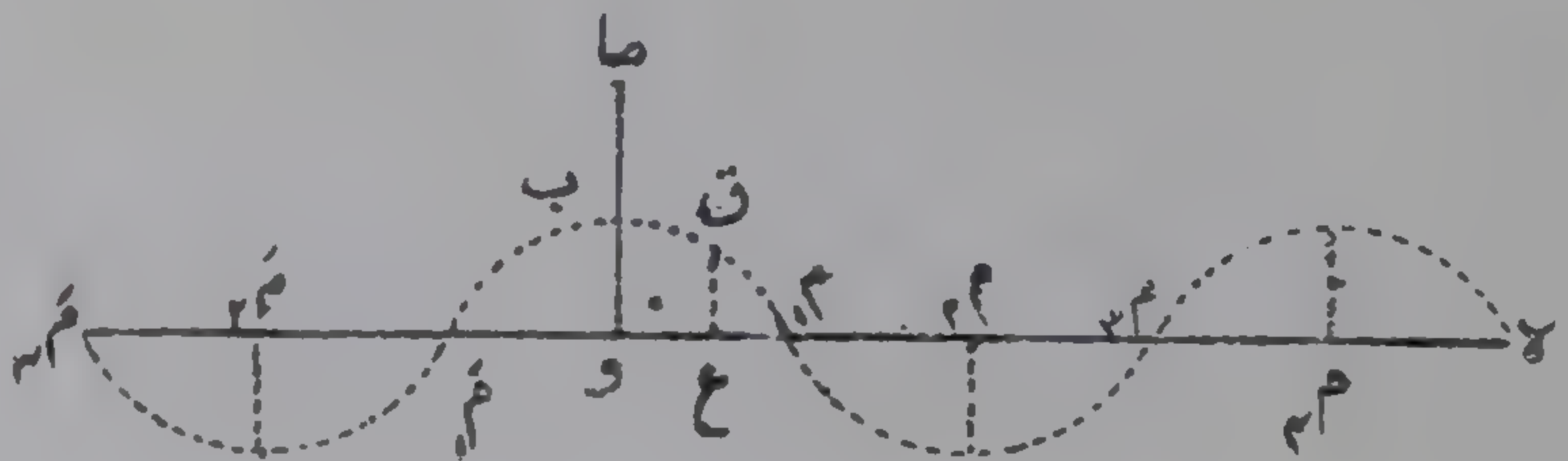
ہر ایک نقطہ ع پر کا عمود ع ق اُس زاویے کی جیب کے متناسب بناؤ جو و ع سے تعبیر ہوتا ہے، اگر جیب مثبت ہو تو یہ عمود مثبت سمت میں و ما کے متوازی ہوگا اور اگر جیب منفی ہو تو یہ منفی سمت میں ہوگا۔

[مثلاً چونکہ و م$_1$ ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے جس کی جیب ۱ ہے اس لیے ہم عمود م$_1$ ب$_1$ کو طول کی ایک اکائی کے برابر لینگے، چونکہ و م$_2$ سے دو قائمے تعبیر ہوتے ہیں اور ان کی جیب صفر ہے اس لیے اس نقطہ پر عمود کا طول صفر ہوگا، چونکہ و م$_3$ تین قائموں کی مقدار کے متناسب ہے اور ان کی جیب ۱- ہے اس لیے م$_3$ پر

کے عمود کا طول -۱ ہوگا یعنی م۳ ب۳ خط د لا کے نیچے کی طرف کھینچا جائیگا اور اس کا طول ایک ہوگا' اگر دع' د م۱ کی ایک تہائی کے برابر ہو تو یہ $\frac{1}{3}$ قائمہ یعنی ۳۰° کو تعبیر کریگا اور اس کی جیب $\frac{1}{2}$ ہوگی پس اس صورت میں ہم نقطہ ع پر ایک عمود ع ق قائم کرینگے جس کا طول مقررہ اکائی طول کا نصف ہوگا۔

ان سب خطوط کے سرے ایک خطِ منحنی پر واقع ہونگے جس کی شکل مندرجہ بالا منحنی کی سی ہوگی۔

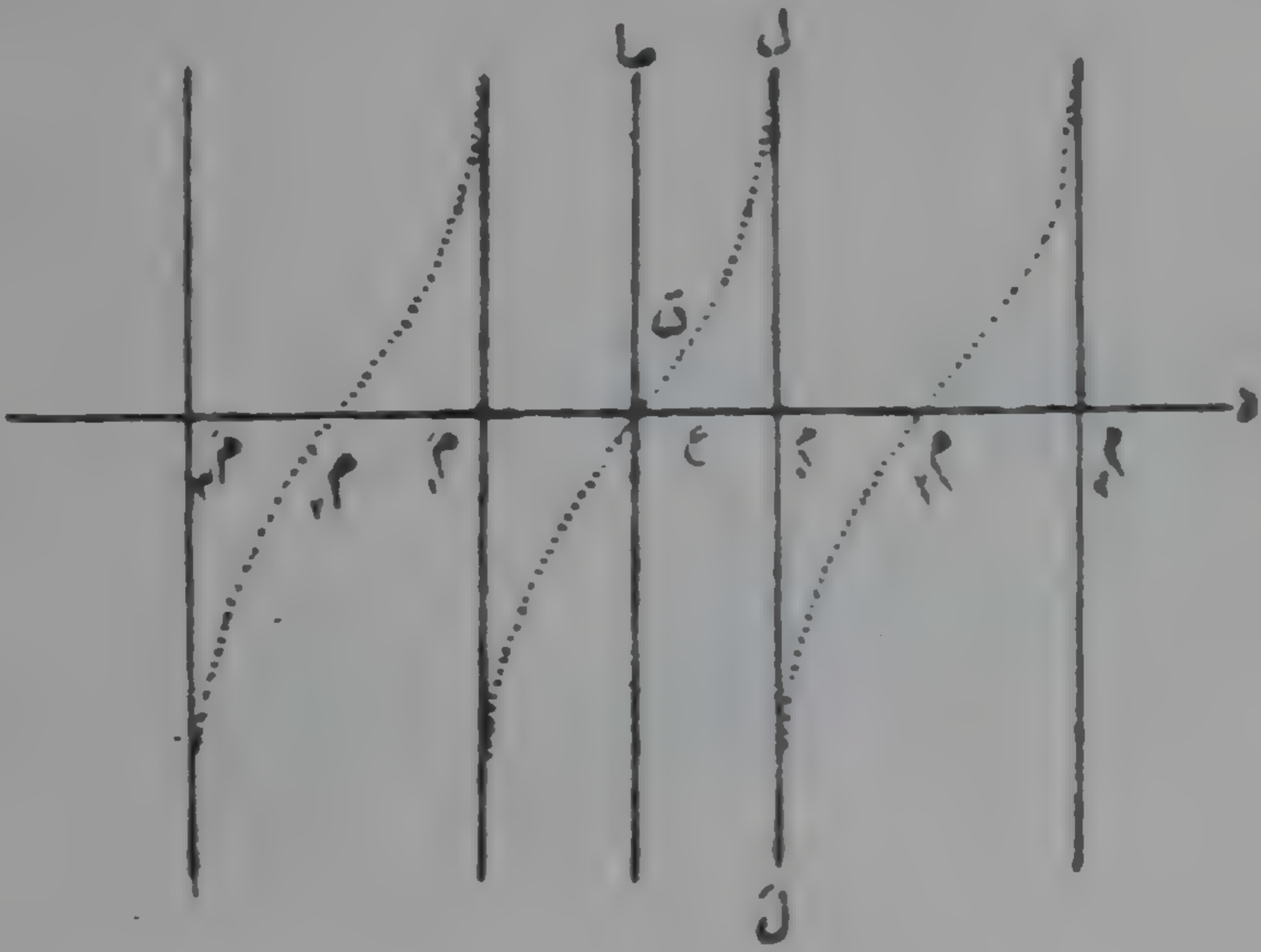
پوری شکل کھینچنے سے معلوم ہوگا کہ خطِ منحنی کے د ب۱ م۲ ب۳ م۴ جیسے اور کئی حصے ہیں اور اس کا یہ مطلب ہے کہ جب کوئی زاویہ بقدر ۴ق کے بڑھتا ہے تو اس کی وہی قیمتیں تکرار پاتی ہیں۔

۶۳۔ جیب التمام کی ترسیم ——

جیب التمام کی ترسیم بھی اسی طرح سے حاصل ہوتی ہے جیسی جیب کی' صرف فرق یہ ہے کہ جیب التمام کی صورت میں عمود ع ق سے اس زاویہ کی جیب التمام تعبیر ہوتی ہے جو طول دع سے تعبیر ہوتا ہے۔

اگر شکل دفعہ ۶۲ میں نقطہ د حرکت کرکے م۱ پر آجائے اور دما کا مقام م۱ ب۱ سے بدل دیا جائے تو جیب التمام کا خطِ منحنی جیب کے بالکل مماثل ہوگا۔

۶۴۔ مماس کی ترسیم ——

چونکہ زاویۂ قائمہ کا مماس غیر متناہی ہوتا ہے اور طول دم۱ ایک قائمہ کو

تغیر کرتا ہے اس لیے جو عمود نقطہ م$_1$ پر قائم ہوگا اس کا طول غیر متناہی ہوگا اور مماس کا منحنی م$_1$ ل کو غیر متناہی فاصلے پر ملیگا۔

اگر زاویہ ایک قائمہ سے ذرا زیادہ ہو تو اس کا مماس منفی اور غیر متناہی ہوگا۔ اس لیے خط ل م$_1$ ل کے عین دائیں طرف مماس کا منحنی ایک ایسے مقام سے ہوگا جو و لا کے نیچے بے انتہا فاصلہ پر واقع ہے۔

مماس کی ترسیم میں صریحاً بے شمار حائل اور متوازی حصے شامل ہیں اور ان میں سے ہر ایک حصہ باقی سب سے الگ ہے۔

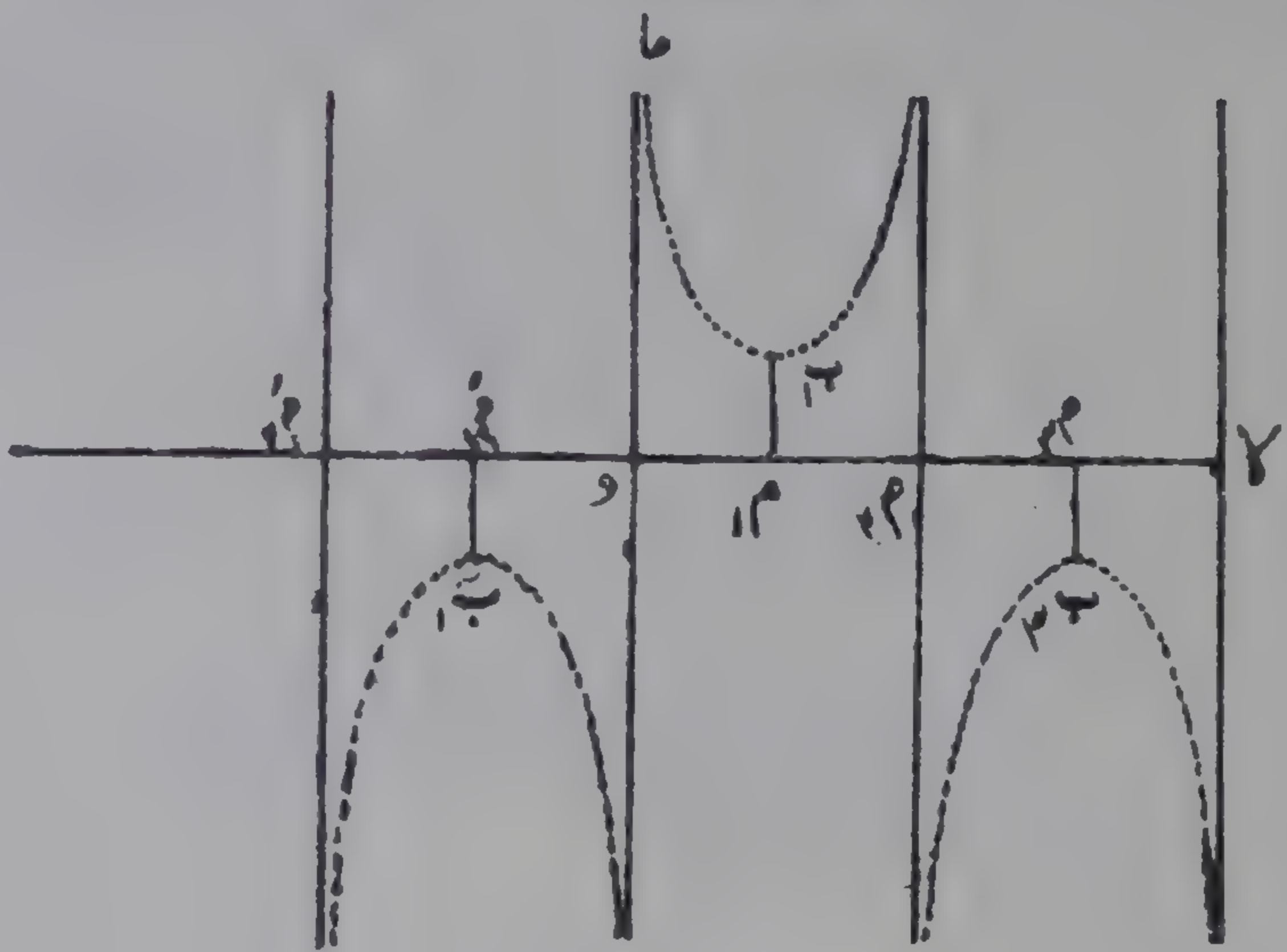
اس قسم کے خطِ منحنی کو غیر مسلسل کہتے ہیں۔ بر خلاف اس کے جیب اور جیب التمام ہر دو کے منحنی مسلسل ہیں۔

٦٥۔ مماس التمام کی ترسیم

اگر مماس التمام کا خطِ منحنی کھینچا جائے تو وہ وما کو و کے اوپر غیر متناہی فاصلہ پر ملیگا، یہ خط نقطہ م$_1$ میں سے گزریگا اور نقطہ م$_2$ پر جو عمود ہوگا اس کو و لا کی منفی جانب میں غیر متناہی فاصلے پر مس کریگا، اس کے بعد

م۲ کے عین دائیں طرف یہ خط نقطہ م۲ کے اوپر ایک غیر متناہی فاصلے سے شروع ہوگا اور پہلے حصے کی طرح م۲ میں سے گزریگا اور م۲ پر کے عمود کو د۲ کے نیچے غیر متناہی فاصلے پر مس کریگا وغیرہ وغیرہ ۔

جاس التمام کا منحنی غیر مسلسل ہوگا اور اس کے بے شمار حصے ایک دوسرے کے ساتھ ساتھ ترتیب وار واقع ہونگے ۔

۶۶ - قاطع التمام کی ترسیم -

جب زاویہ صفر ہوتا ہے تو اس کی جیب صفر ہوتی ہے اور اس لیے اس کا قاطع التمام غیر متناہی ہوتا ہے لہذا منحنی وما کو غیر متناہی فاصلے پر ملتا ہے

جب زاویہ ایک قائمہ کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام ایک ہوتا ہے اور اسی لیے عمود م۱ب۱ کا طول ایک ہوتا ہے ۔

جب زاویہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام غیر متناہی ہوتا ہے یعنی م۲ پر جو عمود ہو اس کو خط منحنی غیر متناہی فاصلہ پر ملتا ہے ۔

نیز جب زاویہ دو قائموں سے ذرا کم ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام $+\infty$

ہوتا ہے اور جب زاویہ دو قائموں سے ذرا بڑا ہوتا ہے تو اس وقت قاطع التمام
$-\infty$ ہوتا ہے یعنی جب زاویہ کی قیمت "دو قائمہ" میں سے ہوکر گزرتی ہے تو
دفعتہً قاطع الزاویہ کی قیمت $+\infty$ سے $-\infty$ ہوجاتی ہے پس معلوم ہوا کہ
م۲ کے عین دائیں طرف خطِ منحنی و لا کے نیچے غیر متناہی فاصلے سے شروع
ہوتا ہے۔

۶۷۔ قاطع کی ترسیم

اگر قاطع کا منحنی اسی طرح مرتسم کیا جائے تو اس کی شکل بالکل وہی ہوگی جو قاطع التمام کے منحنی کی ہے صرف و ما کو حرکت دے کر م۱ ب۱ پر لے آنا چاہیے۔

امثلہ متفرقہ نمبری (۹)

۱۔ کسی مثلث کے ایک زاویے میں فرانسیسی درجوں کی تعداد اتنی ہی ہے جتنی کہ دوسرے زاویے میں انگریزی درجوں کی تعداد ہے، اور تیسرے زاویے میں اتنے فرانسیسی ثانیے ہیں جتنے کہ باقی دو کے مجموعہ میں انگریزی ثانیے ہیں، ہر ایک زاویے میں نیمقطریوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۔ کسی دائرے کی ۶ فٹ قوس کے محاذی جو مرکزی زاویہ بنتا ہے اس میں انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں کی تعداد دریافت کرو، دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ نیمقطری زاویوں کو ثانیوں میں تبدیل کرنے کے لیے ۲۰۶۲۶۵ سے ضرب دینی چاہیے اور ثانیوں کو نیمقطری زاویوں میں منتقل کرنے کے لیے مضروب فیہ ۰۰۰۰۰۴۸ء ہونا چاہیے۔

۴۔ اگر جب ط = $\frac{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ تو جم ط اور مم ط کی قیمتیں دریافت کرو۔

۵ اگر جب ط = $\frac{\text{م}^2 + ۲\,\text{م ن}}{\text{م}^2 + ۲\,\text{م ن} + ۲\,\text{ن}^2}$ تو ثابت کرو۔

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م}^2 + ۲\,\text{م ن}}{۲\,\text{م ن} + ۲\,\text{ن}^2}$$

۶ اگر جم ط - جب ط = $\sqrt{۲}$ جب ط تو ثابت کرو کہ

جم ط + جب ط = $\sqrt{۲}$ جم ط

۷- ثابت کرو کہ قم^{۶} ء - مم^{۶} ء = ۳ قم^{۲} ء مم^{۲} ء + ۱

۸- ۲ قط^{۲} ا - قط^{۴} ا - ۲ قم^{۲} ا + قم^{۴} ا کو + قم^{۴} ا کو مس ا کی رقوم میں بیان کرو۔

۹- مساوات ۳ قم^{۲} ط = ۲ قط ط کو حل کرو۔

۱۰- ایک شخص کسی ٹیلے پر کھڑا ہو کر ایک کشتی کا زاویۂ انخفاض ۳۰° مشاہدہ کرتا ہے۔ کشتی کنارے کے اُس مقام کی طرف آرہی ہے جو عین اس شخص کے پاؤں کے نیچے ہے، تین منٹ کے بعد کشتی کا زاویۂ انخفاض ۶۰° ہوجاتا ہے، معلوم کرو کہ کتنی دیر میں کشتی کنارے پر آلگیگی۔

۱۱- ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو مساوات جب ط = لا + $\frac{۱}{لا}$ ناممکن ہے۔

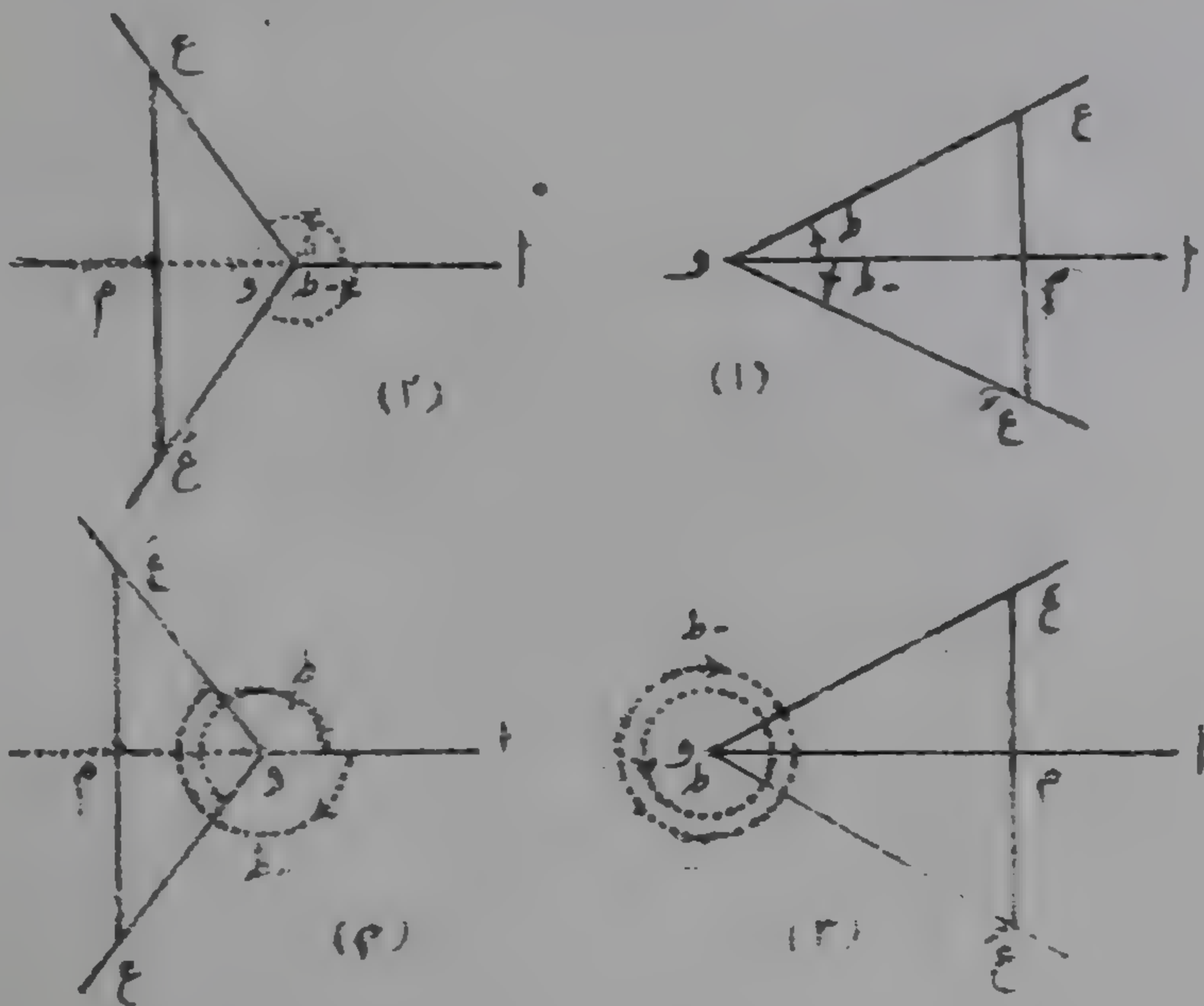
۱۲- ثابت کرو کہ مساوات قط^{۲} ط = $\frac{۴ لا ا}{(ا + لا)^{۲}}$ صرف اُسی صورت میں ممکن ہے جبکہ لا = ا

پانچواں باب

کسی مقدار اور علامت کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں

[پہلی مرتبہ اس مضمون کا مطالعہ کرتے وقت طالب علم کو چاہیے کہ دفعات ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۲، کی چار اشکال میں سے صرف پہلی شکل پر ہی توجہ محدود رکھے]

۶۸- ایک زاویہ (-ط) کی مثلثی نسبتیں ط کی تمام قیمتوں کے لیے ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

(۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کرو کہ خطِ دائر مقام و ا سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام
و ع پر پہنچتا ہے اور اس طرح سے زاویہ ط مرتسم کرتا ہے۔

و ا یا و ا ممدودہ پر عمود ع م نکالو اور اس کو عَ تک اتنا خارج
کرو کہ ع م اور م عَ باہم برابر ہوں۔

مثلث م و ع اور م و عَ میں اضلاع و م اور م ع، اضلاع
و م اور م عَ کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاویے و م ع اور و م عَ
قائمے ہیں۔ اس لیے (بموجب اقلیدس م ا ش ۴) زاویے م و ع اور م و عَ برابر ہیں
اور و ع، و عَ کے مساوی ہے۔ ان چاروں شکلوں میں زاویہ ا و ع کی مقدار (جس
میں زاویہ کو گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں ناپا گیا ہے) زاویہ ا و عَ کی مقدار
کے برابر ہے (جس میں اس زاویے کو گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ناپا گیا ہے)
نیز م ع اور م عَ مقدار میں مساوی اور علامت میں مخالف ہیں اس لیے

$$\text{جب}(-\text{ط}) = \frac{\text{م عَ}}{\text{و عَ}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و ع}} = -\text{جب ط}$$

$$\text{جم}(-\text{ط}) = \frac{\text{و م}}{\text{و عَ}} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \text{جم ط}$$

$$\text{مس}(-\text{ط}) = \frac{\text{م عَ}}{\text{و م}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و م}} = -\text{مس ط}$$

$$\text{مم}(-\text{ط}) = \frac{\text{و م}}{\text{م عَ}} = \frac{\text{و م}}{-\text{م ع}} = -\text{مم ط}$$

$$\text{قم}(-\text{ط}) = \frac{\text{و عَ}}{\text{م عَ}} = \frac{\text{و ع}}{-\text{م ع}} = -\text{قم ط}$$

$$\text{قط}(-\text{ط}) = \frac{\text{و عَ}}{\text{و م}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \text{قط ط}$$

[اس دفعہ میں اور بعد کی دفعات میں شکل کا حوالہ دینے کے بغیر پہلی دو مثلثی

نسبتوں کی مدد سے آخری چار مثلثی نسبتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثلاً مس (- طہ) = جب (- طہ) / جم (- طہ) = - جب طہ / جم طہ = - مس طہ

مم (- طہ) = جم (- طہ) / جب (- طہ) = جم طہ / - جب طہ = - مم طہ

قم (- طہ) = ۱ / جب (- طہ) = ۱ / - جب طہ = - قم طہ

اور قط (- طہ) = ۱ / جم (- طہ) = ۱ / جم طہ = قط طہ]

مثال۔ جب (- °۳۰) = - جب °۳۰ = - ۱/۲

مس (- °۶۰) = - مس °۶۰ = - √۳

جم (- °۴۵) = جم °۴۵ = ۱/√۲

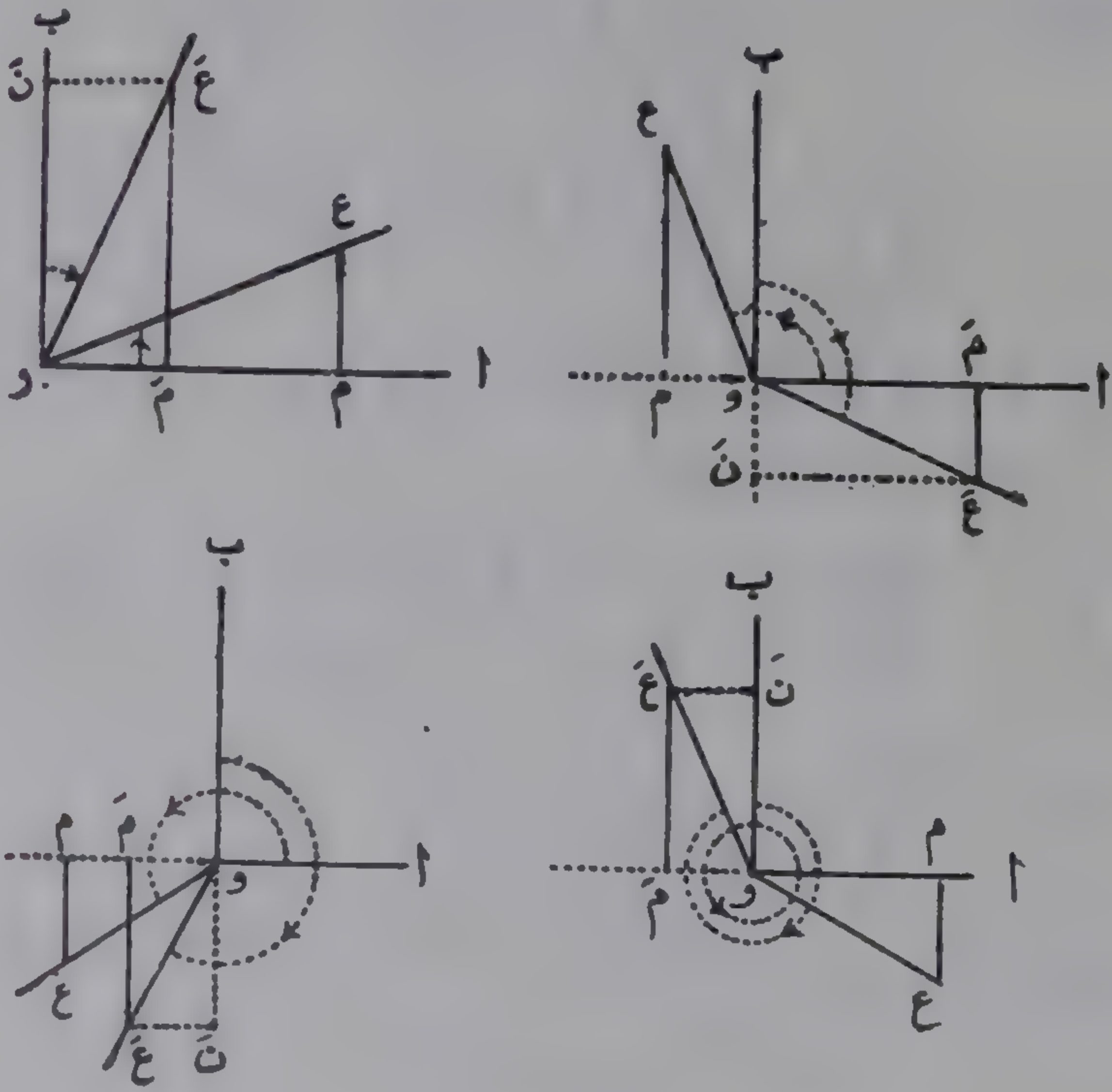
۶۹۔ طہ کی تمام قیمتوں کے لیے زاویہ (°۹۰ - طہ) کی مثلثی نسبتوں کو طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۳۹ میں جہاں زاویہ، قائمہ سے کم تھا ان روابط پر ایک دفعہ بحث ہو چکی ہے، فرض کرو کہ خط دائر مقام و ا سے شروع ہو کر زاویہ ا و ع مرتسم کرتا ہے جہاں ا و ع = طہ

زاویہ °۹۰ - طہ حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ خطِ دائر ابتدا میں ب تک حرکت کرتا ہے اور اس کے بعد ب سے سمتِ مخالف میں بقدر زاویہ طہ کے اُلٹا پھرتا ہے اور اس وقت اس کا مقام و عَ ہوتا ہے۔

ا و عَ زاویہ مطلوبہ °۹۰ - طہ ہے۔

و عَ کو و ع کے مساوی بناؤ اور عمود عَ مَ اور ع م خط ابتدائی و ا یا ا و ممدودہ پر نکالو، نیز و ب یا ب و ممدودہ پر عمود عَ نَ کھینچو۔

ہر ایک شکل میں از روئے عمل زاویے ا و ع اور ب و عَ تعداداً برابر ہیں۔

∠ م و ع = ∠ نَ و عَ = ∠ و عَ مَ

چونکہ ہر ایک شکل میں و نَ اور مَ عَ متوازی ہیں

لہذا مثلث م و ع اور مَ عَ و ہر طرح سے مساوی ہیں۔

اور اس لیے و م = مَ عَ تعداداً

اور و مَ = م ع تعداداً

نیز ہر ایک شکل میں و م اور مَ عَ موافق العلامت ہیں اور نیز م ع اور و مَ کی علامت ایک ہی ہے۔

یعنی و م = + مَ عَ اور و مَ = + م ع

اس لیے جب (۹۰° - طہ) = جب او عَ = مَ عَ / و عَ = و م / و ع = جم طہ

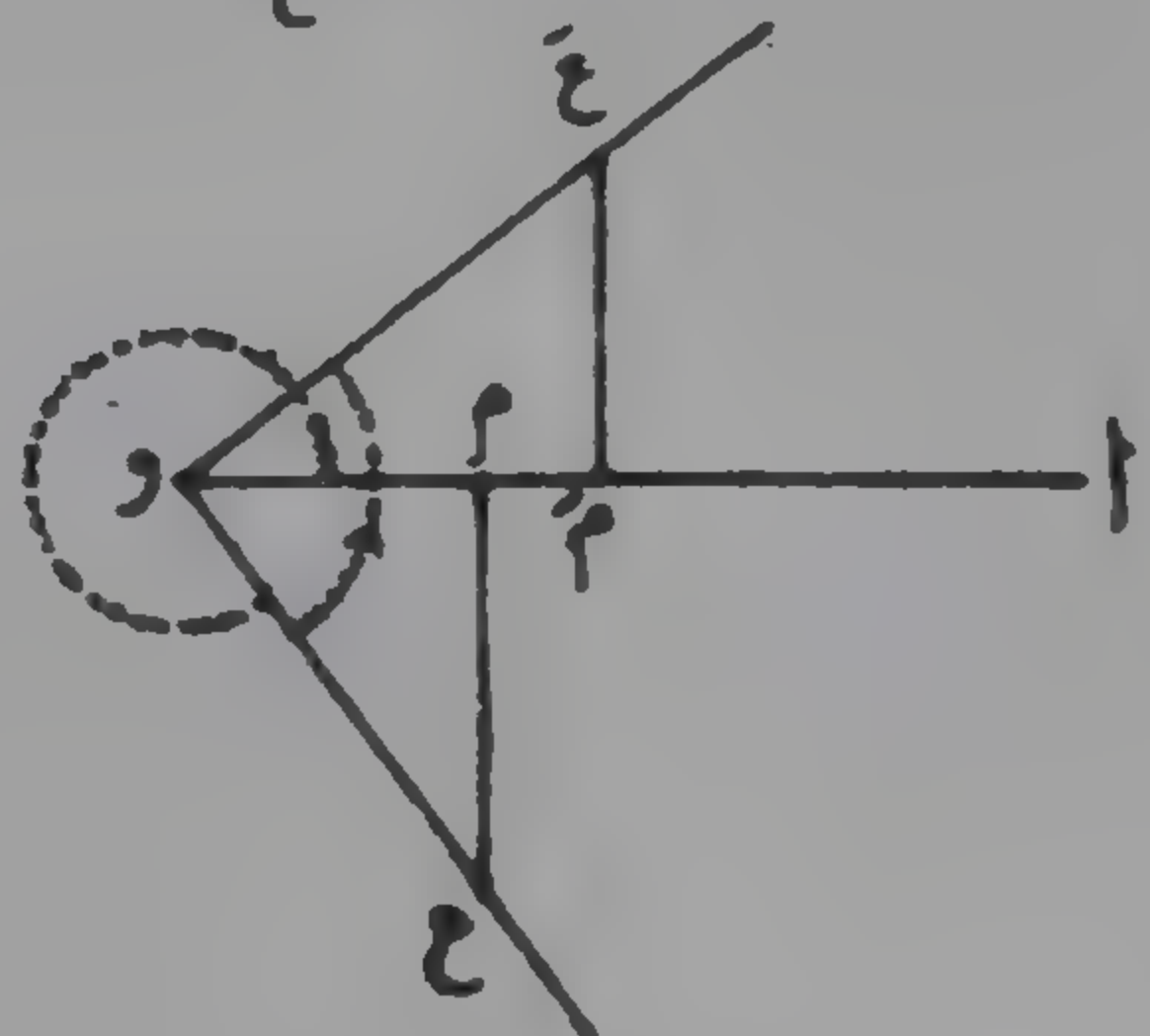
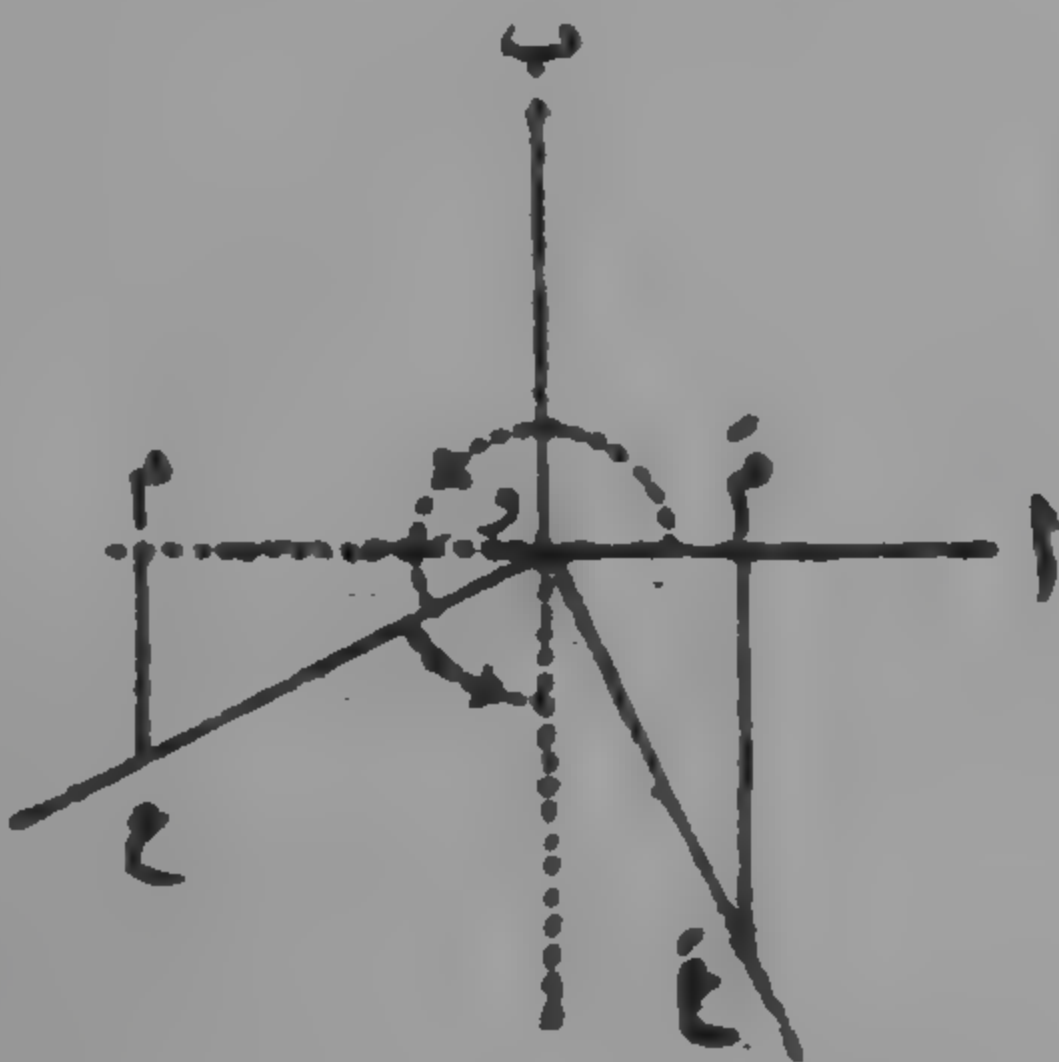
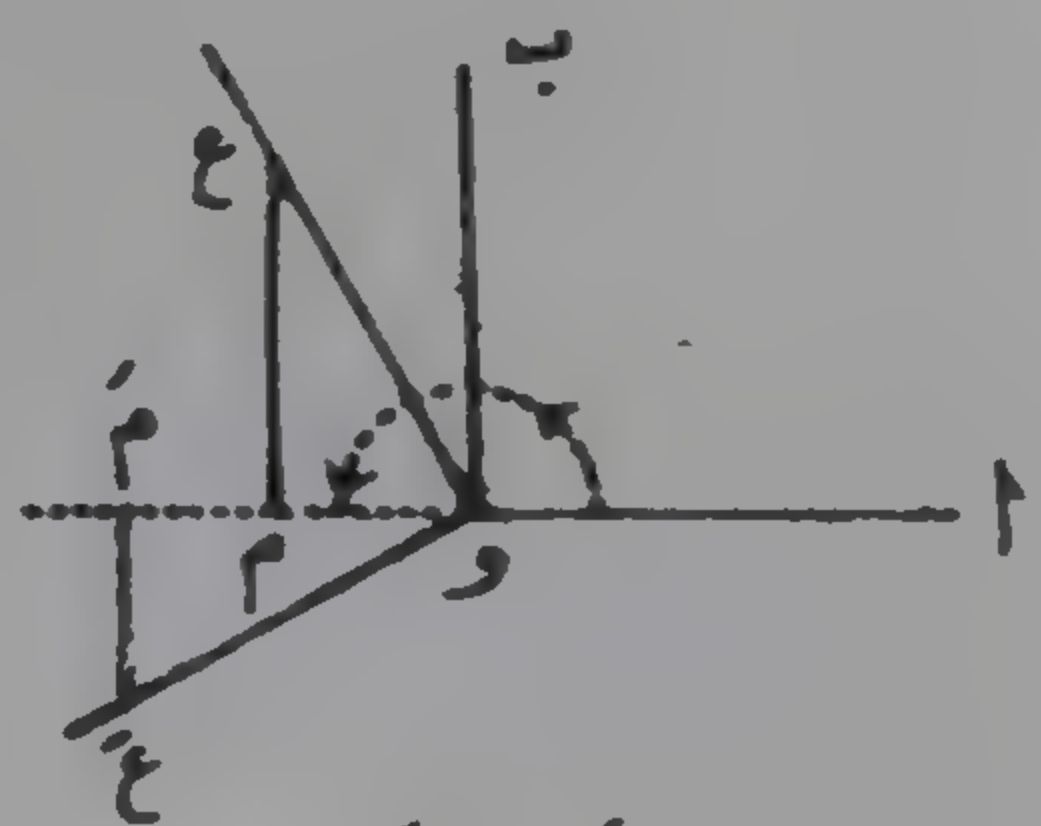
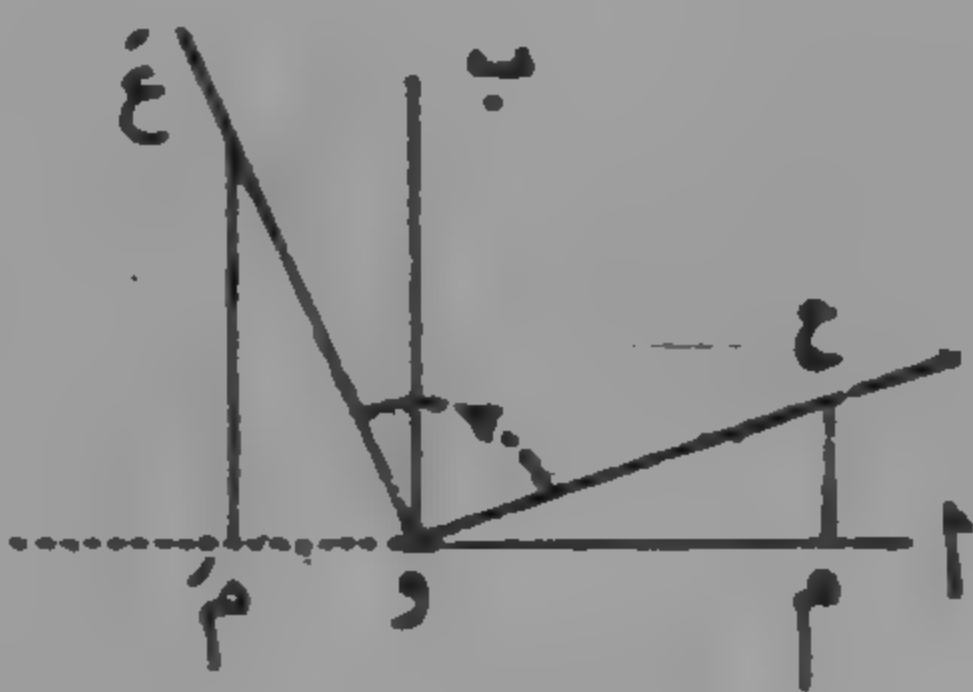
جم (۹۰° - طہ) = جم او عَ = و مَ / و عَ = م ع / و ع = جب طہ

مس (۹۰° - طہ) = مس او عَ = مَ عَ / و مَ = و م / م ع = مم طہ

مم (۹۰° - طہ) = مم او عَ = و مَ / مَ عَ = م ع / و م = مس طہ

قط (۹۰° - طہ) = قط او عَ = و عَ / و مَ = و ع / م ع = قم طہ

اور قم (۹۰° - طہ) = قم او عَ = و عَ / مَ عَ = و ع / و م = قط طہ

۷۰ ۔ زاویہ (۹۰° + طہ) کی مثلثی نسبتوں کو طہ کی تمام قیمتوں کے لیے طہ کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خطِ دائر و ا سے شروع ہو کر زاویہ طہ مرتسم کرتا ہے۔ اور
اس وقت اس کا مقام و ع ہوتا ہے یعنی زاویہ ا و ع = طہ

فرض کرو کہ اس کے بعد خطِ دائر و ع سے مقام و عَ تک ایک زاویۂ قائمہ
میں حرکت کرتا ہے یعنی فرض کرو کہ زاویہ ا و عَ = (۹۰° + طہ)

و عَ کو و ع کے مساوی قطع کرو اور ع م اور عَ مَ عمود ا و یا ا و ممدودہ
پر نکالو، ہر ایک شکل میں چونکہ ع و عَ قائمہ ہے اس لیے زاویوں م و ع
اور عَ و مَ کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہے۔

اس لیے ∠ م و ع = ۹۰° - ∠ عَ و مَ = ∠ و عَ مَ

لہذا مثلث م و ع اور مَ عَ و ہر طرح سے باہم مساوی ہیں۔
اس لیے و م اور مَ عَ تعداداً مساوی ہیں، اسی طرح سے م ع اور
و مَ تعداداً مساوی ہیں۔

ہر ایک شکل میں و م اور مَ عَ موافق العلامت ہیں لیکن م ع اور
و مَ کی علامتیں مختلف ہیں یعنی

مَ عَ = + و م اور و مَ = - م ع

اس لیے

$$\text{جب}(90^\circ + \text{طہ}) = \text{جب ا و عَ} = \frac{\text{مَ عَ}}{\text{و عَ}} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \text{جم طہ}$$

$$\text{جم}(90^\circ + \text{طہ}) = \text{جم ا و عَ} = \frac{\text{و مَ}}{\text{و عَ}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و ع}} = -\text{جب طہ}$$

$$\text{مس}(90^\circ + \text{طہ}) = \text{مس ا و عَ} = \frac{\text{مَ عَ}}{\text{و مَ}} = \frac{\text{و م}}{-\text{م ع}} = -\text{مم طہ}$$

$$\text{مم}(90^\circ + \text{طہ}) = \text{مم ا و عَ} = \frac{\text{و مَ}}{\text{مَ عَ}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و م}} = -\text{مس طہ}$$

$$\text{قط}(90^\circ + \text{طہ}) = \text{قط ا و عَ} = \frac{\text{و عَ}}{\text{و مَ}} = \frac{\text{و ع}}{-\text{م ع}} = -\text{قم طہ}$$

اور $\text{قم}(90^\circ + \text{طہ}) = \text{قم ا و ع}' = \dfrac{\text{و ع}'}{\text{م}'\text{ع}'} = \dfrac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \text{قط طہ}$

امثلہ　$\text{جب } 150^\circ = \text{جب}(90^\circ + 60^\circ) = \text{جم } 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{جم } 135^\circ = \text{جم}(90^\circ + 45^\circ) = \text{جب } 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{مس } 120^\circ = \text{مس}(90^\circ + 30^\circ) = -\text{مم } 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

۷۱۔ مکمل زاویے۔

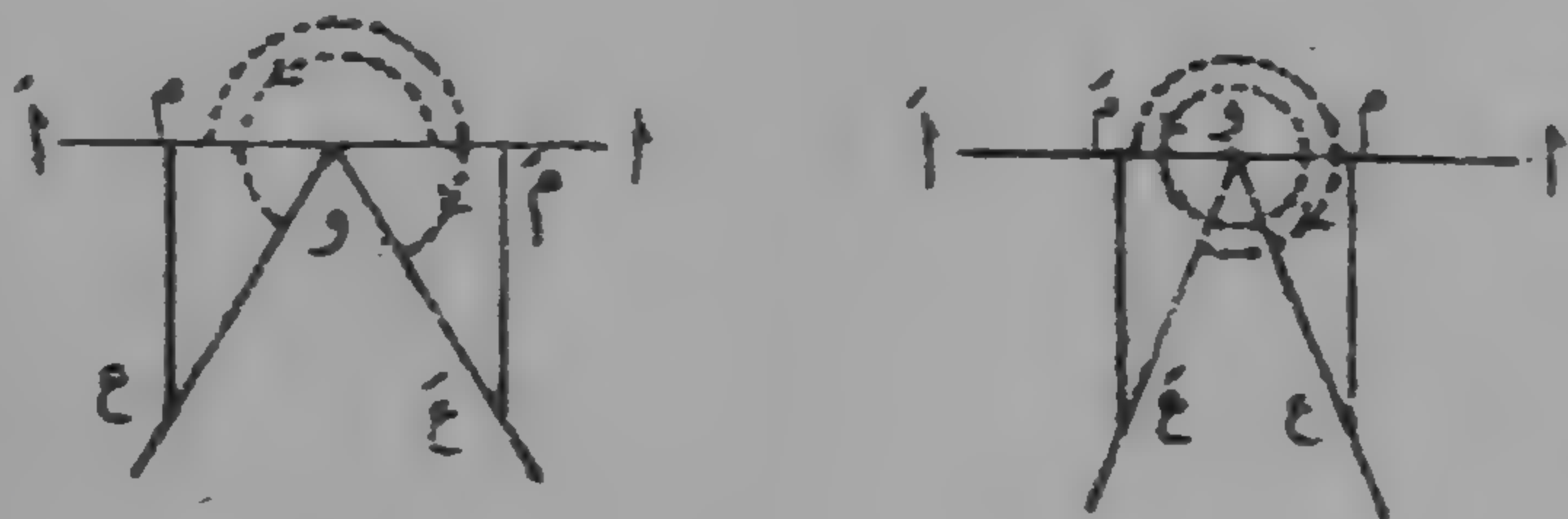
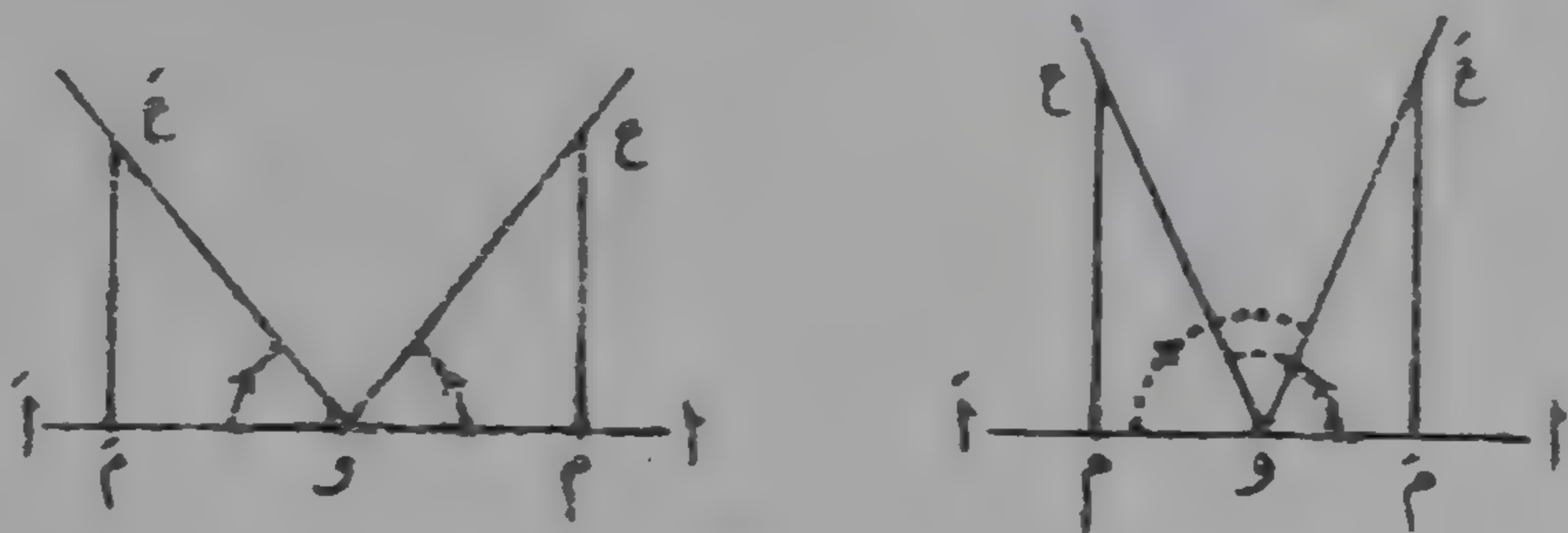
جب دو زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہو تو اُن میں سے ہر ایک کو دوسرے کا مکمل یا تکملہ کہتے ہیں۔ مثلاً کسی زاویہ طہ کا تکملہ 180° ـ طہ ہے۔

امثلہ　30° کا تکملہ $= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

120° کا تکملہ $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

275° کا تکملہ $= 180^\circ - 275^\circ = -95^\circ$

-126° کا تکملہ $= 180^\circ - (-126^\circ) = 306^\circ$

۷۲۔ زاویہ (180° ـ طہ) کی مثلثی نسبتیں طہ کی تمام قیمتوں کے لیے طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خطِ دائر مقام و ا سے شروع ہو کر کوئی زاویہ ا و ع (= طہ) مرتسم کرتا ہے۔

زاویہ ۱۸۰° - طہ حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ خطِ دائر و ا سے شروع ہو کر دو قائمے مرتسم کرتا ہے اور مقام و اَ پر پہنچتا ہے اس کے بعد سمت مخالف میں بقدر زاویہ طہ کے حرکت کر کے مقام و عَ پر آتا ہے اور اس طرح سے ایک ایسا زاویہ اَ و عَ مرتسم کرتا ہے جو مقدار میں زاویہ ا و ع کے مساوی لیکن علامت میں اس سے مختلف ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ زاویہ ا و عَ = ۱۸۰° - طہ

و عَ کو و ع کے برابر قطع کرو اور ا و اَ پر عَ مَ اور ع م عمود نکالو۔ زاویے م و ع اور مَ و عَ برابر ہیں اور اس لیے مثلث م و ع اور مَ و عَ ہر طرح سے مساوی، لہذا و م اور و مَ مقدار میں برابر ہیں اور نیز م ع اور مَ عَ بھی باہم مساوی ہیں۔

ہر ایک شکل میں و م اور و مَ مختلف سمتوں میں کھینچے گئے ہیں لیکن م ع اور مَ عَ ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں۔ یعنی

و مَ = - و م اور مَ عَ = + م ع

اس لیے

جب (۱۸۰° - طہ) = جب ا و عَ = مَ عَ / و عَ = م ع / و ع = جب طہ

جم (۱۸۰° - طہ) = جم ا و عَ = و مَ / و عَ = - و م / و ع = - جم طہ

مس (۱۸۰° - طہ) = مس ا و عَ = مَ عَ / و مَ = م ع / - و م = - مس طہ

مم (۱۸۰° - طہ) = مم ا و عَ = و مَ / مَ عَ = - و م / م ع = - مم طہ

قط (۱۸۰° - طہ) = قط ا و عَ = و عَ / و مَ = و ع / - و م = - قط طہ

اور قم (۱۸۰° - طہ) = قم ا و ع = $\frac{\text{و ع}}{\text{مَ عَ}}$ = $\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}$ = قم طہ

امثلہ جب ۱۲۰° = جب (۱۸۰° - ۶۰°) = جب ۶۰° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جم ۱۳۵° = جم (۱۸۰° - ۴۵°) = - جم ۴۵° = - $\frac{1}{\sqrt{2}}$

مس ۱۵۰° = مس (۱۸۰° - ۳۰°) = - مس ۳۰° = - $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۷۳ - طہ کی تمام قیمتوں کے لیے زاویہ (۱۸۰° + طہ) کی مثلثی نسبتیں طہ کی مثلثی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

مطلوبہ روابط حسب دفعہ ماقبل ہندسی طور پر حاصل ہو سکتے ہیں۔ اس مسئلہ کی شکلیں کھینچنا آسان ہے ان کو طالب علم کے لیے بطور مشق کے چھوڑ دیا گیا ہے نیز ان کو دفعہ ۷۰ کے نتائج کی مدد سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جو زاویہ کی کسی مقدار کے لیے صحیح ثابت کیے جا چکے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ۹۰° + طہ = ب

اس لیے جب (۱۸۰° + طہ) = جب (۹۰° + ب) = جم ب (دفعہ ۷۰)

= جم (۹۰° + طہ) = - جب طہ (دفعہ ۷۰)

اور جم (۱۸۰° + طہ) = جم (۹۰° + ب) = - جب ب (دفعہ ۷۰)

= - جب (۹۰° + طہ) = - جم طہ (دفعہ ۷۰)

نیز مس (۱۸۰° + طہ) = مس (۹۰° + ب) = - مم ب

= - مم (۹۰° + طہ) = مس طہ

اور اسی طرح سے مم (۱۸۰° + طہ) = مم طہ

قط (۱۸۰° + طہ) = - قط طہ

اور قم (۱۸۰° + طہ) = - قم طہ

۷۴ - طہ کی تمام قیمتوں کے لیے زاویہ (۳۶۰° + طہ) کی مثلثی نسبتیں طہ کی مثلثی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خطِ دائر کوئی زاویہ طہ مرتسم کرنے کے بعد کسی خاص مقام پر واقع ہے، اب اگر یہ مثبت سمت میں ایک پورا چکر لگائے یعنی زاویہ ۳۶۰° + طہ مرتسم کرے تو اس کے مقام میں کوئی فرق نہیں آئیگا، خطِ دائر بعینہٖ اسی مقام پر ہوگا جہاں پہلے تھا۔

معلوم ہوا کہ زاویہ ۳۶۰° + طہ کی مثلثی نسبتیں وہی ہوتی ہیں جو زاویہ طہ کی ہیں۔

اور اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی زاویہ میں ۳۶۰° یا ۳۶۰° کا کوئی ضعف زیادہ کرنے یا زاویہ میں سے ۳۶۰° یا اس کا کوئی ضعف کم کرنے سے اس کی مثلثی نسبتوں میں کچھ فرق نہیں آتا۔

۷۵۔ اس باب کے مسائل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑے زاویے کی مثلثی نسبتوں کی تحویل ایک ایسے زاویے کی مثلثی نسبتوں میں ہوسکتی ہے جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان میں واقع ہو۔

مثلاً جب ۱۷۶۵° = جب [۴ × ۳۶۰° + ۳۲۵°] = جب ۳۲۵° (دفعہ ۷۴)

= جب (۱۸۰° + ۱۴۵°) = - جب ۱۴۵° (دفعہ ۷۳)

= - جب (۱۸۰° - ۳۵°) = - جب ۳۵° (دفعہ ۷۲)

مس ۱۱۹۰° = مس (۳ × ۳۶۰° + ۱۱۰°) = مس ۱۱۰° (دفعہ ۷۴)

= مس (۹۰° + ۲۰°) = - قم ۲۰° (دفعہ ۷۰)

اور - قم (- ۱۴۶۵°) = - قم ۱۴۶۵° (دفعہ ۶۸)

= - قم (۴ × ۳۶۰° + ۲۵°) = - قم ۲۵° (دفعہ ۷۴)

اسی طرح سے اور زاویوں کی تحویل ہوسکتی ہے، سب سے اول زاویہ مجوزہ سے ۳۶۰° کے اضعاف تفریق کرتے جاؤ جبتک کہ زاویہ ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان آجائے، اب اگر یہ ۱۸۰° سے بڑا ہو تو اس میں سے ۱۸۰° منفی کرو، اس کے بعد اگر یہ ۹۰° سے بڑا ہو تو ضوابط دفعہ ۷۰ کو استعمال کرو اور آخرالامر اگر ضرورت ہو تو ضابطہ دفعہ ۶۹ سے مدد لو۔

۷۶۔ قائمہ سے بڑے چند مشہور زاویوں کی صورت میں جدول دفعہ ۴۰ کی توسیع اس طرح ہوسکتی ہے۔

زاویہ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
جیب	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
جیب التمام	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
مماس	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
مماس التمام	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
قاطع التمام	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
قاطع الزاویہ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1

امثلہ نمبری (۱۰)

ثابت کرو کہ

۱- جب ۴۲۰° جم ۳۹۰° + جم (-۳۰۰°) جب (-۳۳۰°) = ۱

۲- جم ۵۷۰° جب ۵۱۰° - جب ۳۳۰° جم ۳۹۰° = ۰

۳- مس ۲۲۵° مم ۴۰۵° + مس ۷۶۵° مم ۶۷۵° = ۰

اگر ا کی قیمتیں مفصلۂ ذیل ہوں تو جم ا - جب ا اور مس ا + مم ا کی قیمتیں دریافت کرو۔

۴- $\frac{\pi}{۳}$ ۵- $\frac{۲\pi}{۳}$ ۶- $\frac{۵\pi}{۴}$

۷- $\frac{۷\pi}{۴}$ ۸- $\frac{۱۱\pi}{۳}$

ا کی قیمتیں دریافت کرو جو ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ہوں جبکہ

۹- جب ا = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۱۰- جم ا = $-\frac{۱}{۲}$

۱۱- مس ا = -۱   ۱۲- مم ا = $-\sqrt{۳}$

۱۳- قط ا = $-\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۱۴- قم ا = -۲

مقادیر ذیل کو ایک ایسے مثبت زاویہ کی مثلثی نسبتوں کی رقوم میں بیان کرو جو ۴۵° سے کم ہو۔

۱۵- جب (-۶۵۰°)   ۱۶- جم (-۸۴۰°)

۱۷- مس ۱۳۷°   ۱۸- جب ۱۶۸°

۱۹- جم ۲۸۷°   ۲۰- مس (-۲۴۶°)

۲۱- جب ۸۴۳°   ۲۲- جم (-۹۲۸°)

۲۳- مس ۱۱۴۵°   ۲۴- جم ۱۴۱۰°

۲۵- مم (-۱۰۵۴°)   ۲۶- قط ۱۳۲۷°

۲۷- قم (-۷۵۶°)

ا کی مفصلۂ ذیل قیمتوں کے لیے جب ا + جم ا کی علامت دریافت کرو۔

۲۸- ۱۴۰°   ۲۹- ۲۷۸°   ۳۰- -۳۵۶°   ۳۱- -۱۱۲۵°

ا کی مفصلۂ ذیل قیمتوں کے لیے جب ا - جم ا کی علامات دریافت کرو

۳۲- ۲۱۵° ۳۳- ۸۲۵° ۳۴- -۶۳۴° ۳۵- -۴۵۷°

۳۶- اُن سب زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام دریافت کرو جو پہلے چار رُبعوں میں واقع ہوں اور جن کے مماس، جم ۱۳۵° کے برابر ہوں -

ثابت کرو کہ

۳۷- جب (۲۷۰° + ا) = - جم ا اور مس (۲۷۰° + ا) = - مم ا

۳۸- جم (۲۷۰° - ا) = - جب ا اور مم (۲۷۰° - ا) = مس ا

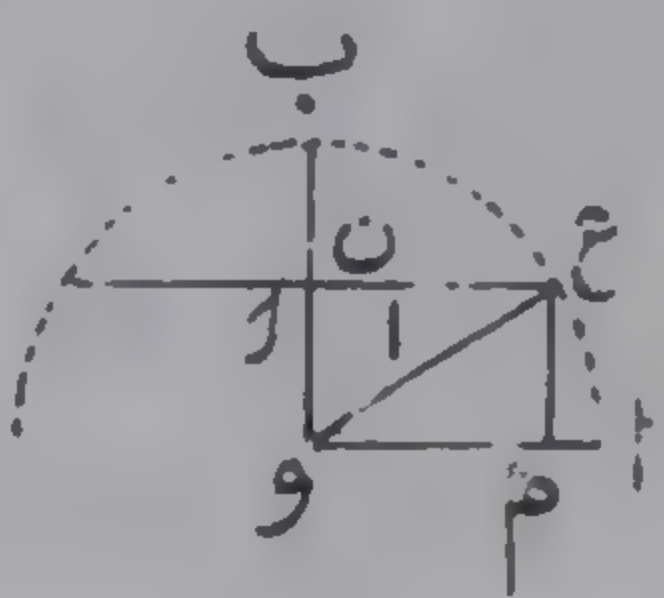
۳۹- جم ا + جب (۲۷۰° + ا) - جب (۲۷۰° - ا) + جم (۱۸۰° + ا) = ۰

۴۰- قط (۲۷۰° - ا) قط (۹۰° - ا) - مس (۲۷۰° - ا) مس (۹۰° + ا) + ۱ = ۰

۴۱- مم ا + مس (۱۸۰° + ا) + مس (۹۰° + ا) + مس (۳۶۰° - ا) = ۰

چھٹا باب

جملات عامہ اُن سب زاویوں کے لیے جو ایک مقررہ مثلثی نسبت رکھتے ہوں

۷۷ - ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کی جیب ایک کسرِ واجب ل کے برابر ہو۔

فرض کرو کہ و ا خطِ ابتدائی ہے اور و ب مثبت سمت میں و ا پر عمود ہے، و ب پر فاصلہ و ن برابر ل کے ناپو۔ [اگر ل منفی ہو تو نقطہ ن، ب و ممدودہ پر واقع ہوگا۔]

نقطہ ن سے ن ع متوازی و ا کے کھینچو۔ اور و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو خط ن ع کو نقطہ ع پر ملے، تب ا و ع زاویہ مطلوبہ ہوگا۔

و ا پر عمود ع م نکالو پس

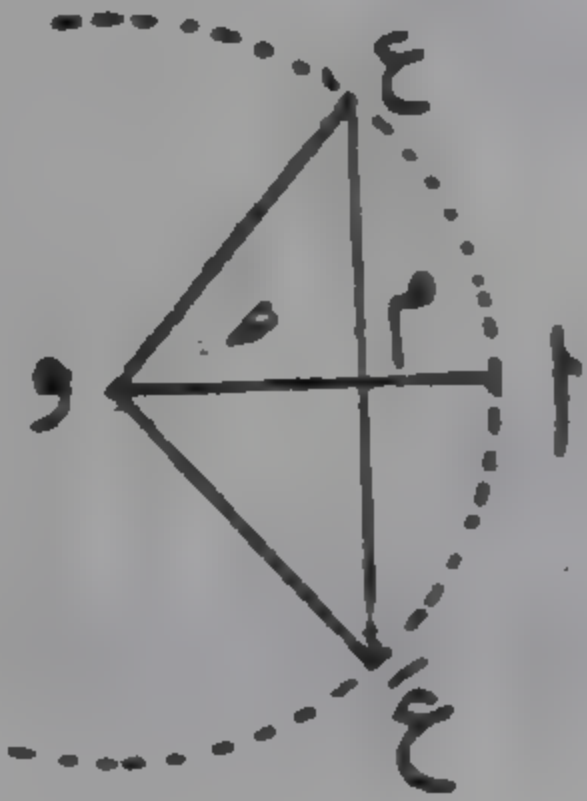
جب ا و ع = ع م / و ع = و ن / و ع = ل / ا = ل

زاویہ ا و ع کی جیب مقدارِ معلومہ کے برابر ہے اس لیے ا و ع

زاویہ مطلوبہ ہے۔

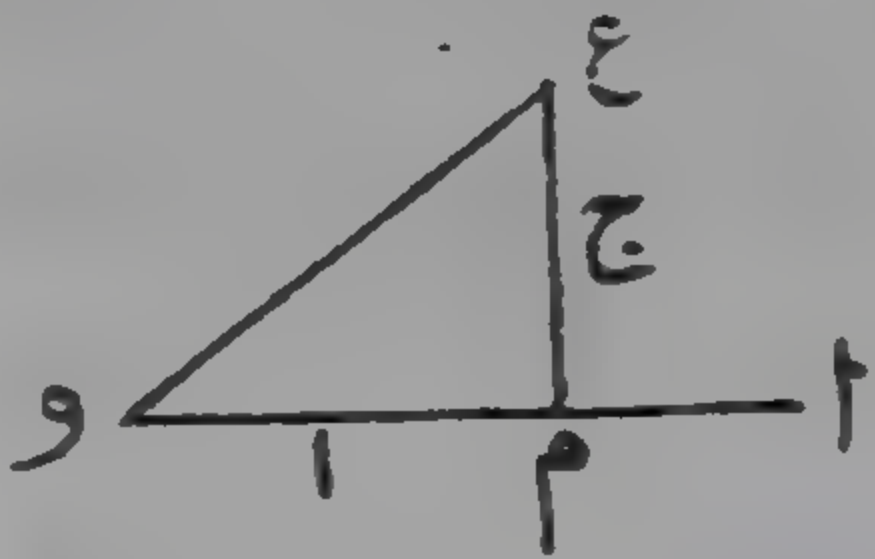
۷۸ - ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام ایک کسر واجب ب کے برابر ہو۔

خطِ ابتدائی پر ایک فاصلہ و م برابر ب کے قطع کرو اور و ا پر عمود م ع نکالو [اگر ب منفی ہو تو م نقطہ و کی دوسری طرف ا و ممدودہ پر واقع ہوگا] و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو م ع کو نقطہ ع پر ملے۔

تب ا و ع زاویہ مطلوبہ ہے کیونکہ

$$\text{جم ا و ع} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{۱}} = \text{ب}$$

۷۹ - ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کا مماس ج کے برابر ہو۔

خطِ ابتدائی پر و م برابر ایک کے لے لو اور نقطہ م پر ایک عمود م ع برابر ج کے قائم کرو۔ تب

$$\text{مس ا و ع} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \text{ج}$$

پس ا و ع زاویہ مطلوبہ ہے۔

۸۰ - دفعہ کی تعریفات سے ظاہر ہے کہ جب کوئی زاویہ معلوم ہو تو اس کی جیب بھی معلوم ہو سکتی ہے مگر اس کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ ایک سے زیادہ زاویے ایسے ہوتے ہیں جن کی ایک ہی جیب ہو مثلاً ذیل کے سب زاویوں کی جیب $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے۔

۳۰°، ۱۵۰°، ۳۹۰°، – ۲۱۰°، ....

اس سے ظاہر ہے کہ جب کسی زاویہ کی جیب دی ہوئی ہو تو زاویہ کی مقدار صحیح طور پر معلوم نہیں ہو سکتی، صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ زاویوں کی ایک کثیر تعداد میں سے کوئی ایک زاویہ مطلوبہ زاویہ ہے۔

جب کسی زاویہ کی جیب التمام، مماس یا اور مثلثی نسبتیں معلوم ہوں تو بھی اسی قسم کے بیانات صادق آتے ہیں۔

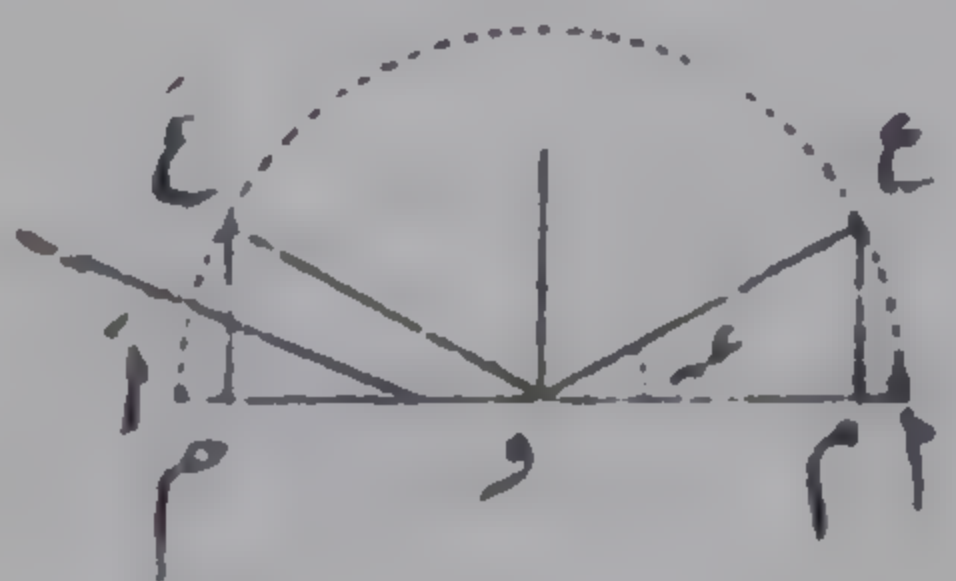
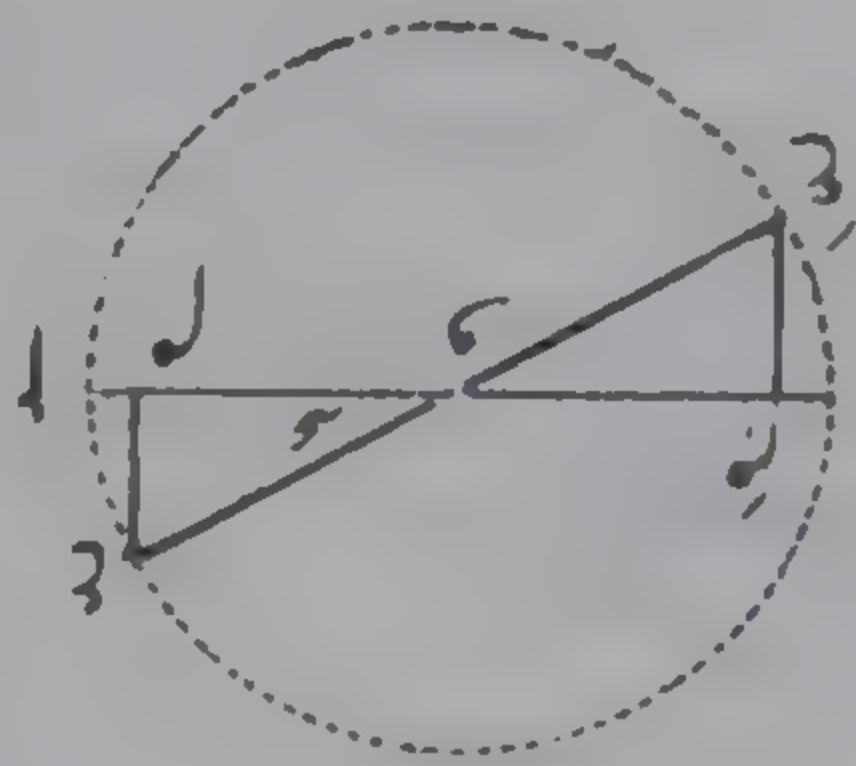
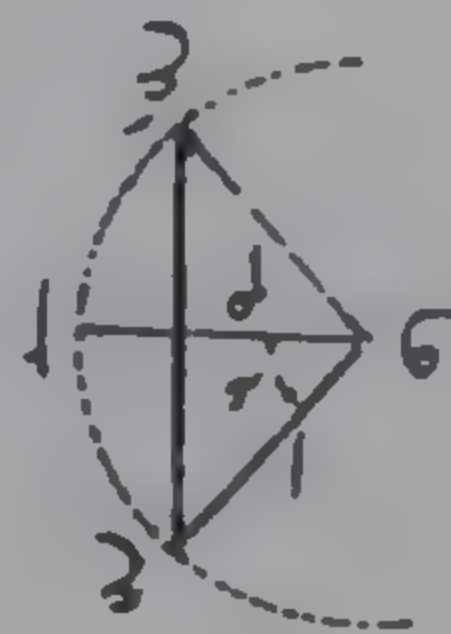
پس معلوم ہوا کہ اگر کسی زاویے کی کوئی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو مقدار زاویہ بغیر اشتباہ کے معلوم نہیں ہو سکتی۔

۸۱ - فرض کرو کہ خطِ دائر و ع خطِ ابتدائی و ا پر منطبق ہوتا ہے۔ اس سے ہمیں صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ خطِ دائر نے مثبت یا منفی سمت میں ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳، ...... مکمل چکر لگائے ہیں۔

لیکن جب خطِ دائر ایک چکر لگاتا ہے تو اس کا زاویۂ مرتسمہ (دفعہ ۷۰) ۲π یعنی ۴ قائمہ زاویوں کے برابر ہوتا ہے، اس لیے جب خطِ دائر و ع خطِ ابتدائی و ا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویۂ مرتسمہ مثبت یا منفی سمت میں ۲π کا ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳..... گنا ہوتا ہے۔ یعنی ۰، یا ± ۲π، یا ± ۴π، یا ± ۶π، ...... ہوتا ہے۔

اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جب خطِ دائر خطِ ابتدائی پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویۂ مرتسمہ ۲ ن π ہوتا ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۸۲ - مسئلہ - اُن سب زاویوں کے لیے جن کی ایک ہی جیب ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویہ ا و ع (= ع) کی جیب معلوم ہے۔

و ا پر عمود ع م نکالو اور م و کو مَ تک اتنا خارج کرو کہ و مَ برابر و م کے ہو اور مَ عَ کو متوازی اور مساوی م ع کے بناؤ۔

نیز زاویہ ا و ع = ۳ + عہ

جب خطِ دائر مقام و ع پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر لگانے کے بعد زاویہ عہ مرتسم کیا ہے۔

یعنی اس نے زاویہ

۲ ر ۳ + عہ .... (۱)

مرتسم کیا ہے جہاں ر صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

جب خطِ دائر مقام و عَ پر ہو تو اس نے زاویہ ۲ ر ۳ + (۳ + عہ)

یعنی زاویہ (۲ ر + ۱) ۳ + عہ .... (۲)

مرتسم کیا ہے۔

اوپر کے تمام زاویے جملہ

ن ۳ + عہ .... (۳)

میں شامل ہیں، جہاں ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے اور اس کی وجہ یہ ہے، کہ جب ن جفت ہو (یعنی = ۲ ر) تو جملہ (۳) سے وہی زاویے حاصل ہوتے ہیں جو جملہ (۱) میں شامل ہیں۔

نیز جب ن طاق ہو (یعنی = ۲ ر + ۱) تو جملہ (۳) سے وہ سب زاویے حاصل ہوتے ہیں جو (۲) میں شامل ہیں۔

نتیجہ صریح ۔ جملہ (۳) میں وہ سب زاویے شامل ہیں جن کا ماس التمام وہی ہو جو عہ کا ہے۔

۸۵ ۔ دفعات ۸۲، ۸۳، اور ۸۴ میں زاویہ عہ کوئی زاویہ ہے جو شرائطِ معلومہ کو پورا کرتا ہے، مگر عملی مثالوں میں بالعموم بہتر ہوگا کہ عہ چھوٹے سے چھوٹا وہ مثبت زاویہ منتخب کیا جائے جو شرائطِ سوال کو پورا کرے۔

مثال ۱ ۔ اُن سب زاویوں کے لیے ایک جملہ عامہ دریافت کرو:-

(۱) جن کی جیب، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کے برابر ہو۔

(۲) جن کی جیب التمام - $\frac{۱}{۲}$ کے برابر ہو۔

اور (۳) جن کا ماس، $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ کے برابر ہو۔

(۱) چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جس کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو وہ ۶۰° یعنی $\frac{\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے۔

اس لیے بموجب دفعہ ۸۲ اُن سب زاویوں کے لیے جن کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$\text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{3}$$ ہوگا۔

(۲) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب التمام $-\frac{1}{2}$ ہو۔ ۱۲۰° یعنی $\frac{2\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے۔

اس لیے بموجب دفعہ ۸۳ اُن سب زاویوں کے لیے جن کی جیب التمام $-\frac{1}{2}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$2\,\text{ن}\,\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$ ہوگا

(۳) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کا مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہو ۳۰° یعنی $\frac{\pi}{6}$ کے برابر ہوتا ہے۔

اس لیے بموجب دفعہ ۸۴ اُن سب زاویوں کے لیے جن کا مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{6}$$ ہوگا۔

مثال ۲۔ طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط مساوات $\text{جب}^2\,\text{طہ} = \frac{1}{4}$ کو پورا کرے۔

اس صورت میں $\text{جب طہ} = \pm\frac{1}{2}$

علامت مثبت لینے سے

$$\text{جب طہ} = \frac{1}{2} = \text{جب}\,\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ \text{طہ} = \text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{6}$$

علامت منفی لینے سے

$$\text{جب طہ} = -\frac{1}{2} = \text{جب}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\ \text{طہ} = \text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

طہ کی قیمت کے دونوں جملوں کو اکٹھا کرنے سے

۱۵- ۴ جب^۲ طہ = ۳   ۱۶- ۲ مم^۲ طہ = قم^۲ طہ

۱۷- قط^۲ طہ = ۴/۳

۱۸- طہ کی قیمتِ عامہ دریافت کرو جو دونوں مساواتوں جم طہ = -۱/√۲ اور مس طہ = کو پورا کرے -

۱۹- طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو دونوں مساواتوں مم طہ = -√۳ اور قم طہ = -۲ کو پورا کرے -

۲۰- اگر جم (ا - ب) = ۱/۲، اور جب (ا + ب) = ۱/۲، تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز ان کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو -

۲۱- اگر مس (ا - ب) = ۱ اور قط (ا + ب) = ۲/√۳، تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز ان کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو -

۲۲- ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان جداگانہ وہ زاویے معلوم کرو جن کی (۱) جیوب = √۳/۲ ہوں (۲) جیوب التمام = -۱/۲ ہوں (۳) مماس = ۱/√۳ ہوں -

۲۳- اگر صرف اُن زاویوں کو ملحوظ رکھا جائے جو ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوں تو معلوم کرو کہ ذیل کی مختلف صورتوں میں لا کی کتنی قیمتیں ہیں (۱) جب لا = ۵/۶ (۲) جم لا = ۱/۵ (۳) جم لا = -۴/۵ (۴) مس لا = ۲/۳ (۵) مم لا = -۷

۲۴- زاویہ لا معلوم ہے، زاویہ ما بناؤ اگر (۱) جب ما = ۲ جب لا (۲) مس ما = ۳ مس لا (۳) جم ما = ۱/۲ جم لا اور (۴) قط ما = قم لا

۲۵- ثابت کرو کہ ذیل کے دونوں ضابطوں سے وہی زاویے تعبیر ہوتے ہیں:
(۱) (۲ن - ۱) π/۲ + (-۱)^ن π/۳ اور (۲) ۲ن π ± π/۶ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے -

۲۶- ثابت کرو کہ ذیل کے دو ضابطوں
(۱) (۲ن + ۱/۲) π ± عہ اور (۲) ن π + (-۱)^ن (π/۲ - عہ)
سے وہی زاویے تعبیر ہوتے ہیں جہاں ن کوئی عدد صحیح ہے -
شکل سے اس کی توضیح کرو -

۲۷- اگر طہ - عہ = ن π + (-۱)^ن بہ تو

ثابت کرو کہ طہ = ۲ م π + عہ + بہ یا
طہ = (۲م + ۱) π + عہ - بہ جہاں م اور ن کوئی دو صحیح عدد ہیں۔

۲۸۔ اگر جم ک طہ + جم ق طہ = ۰ تو ثابت کرو کہ اس مساوات کو حل کرنے سے طہ کی مختلف قیمتوں کے دو حسابیہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں، جن میں سے ایک کا فرق مشترک $\frac{۲\pi}{ک + ق}$ ہے اور دوسرے کا $\frac{۲\pi}{ک - ق}$۔

۲۹۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب $\frac{۲}{۲ + \sqrt{۵}}$ ہو۔

۸۶۔ جس مساوات میں کسی زاویۂ غیر معلومہ کی مثلثی نسبتیں شامل ہوں اس کو مثلثی مساوات کہتے ہیں۔

مساوات کا حل پورے طور پر حاصل نہیں ہوتا جب تک کہ اُن سب زاویوں کے لیے جو شرائط مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک جملہ عامہ حاصل نہ ہو جائے۔

مثلثی مساواتوں کی چند آسان مثالیں دفعہ ذیل میں مندرج ہیں۔

۸۷۔ مثال ۱۔ مساوات ۲ جیب^۲^ لا + $\sqrt{۳}$ جم لا + ۱ = ۰ کو حل کرو۔

یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$۲ - ۲\ \text{جم}^۲\ \text{لا} + \sqrt{۳}\ \text{جم لا} + ۱ = ۰$$

یعنی
$$۲\ \text{جم}^۲\ \text{لا} - \sqrt{۳}\ \text{جم لا} - ۳ = ۰$$

یعنی
$$(\text{جم لا} - \sqrt{۳})(۲\ \text{جم لا} + \sqrt{۳}) = ۰$$

معلوم ہوا کہ شرائط مساواتِ معلومہ جم لا = $\sqrt{۳}$ یا جم لا = $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ سے پوری ہوتی ہیں۔

چونکہ کسی زاویے کی جیب التمام تعداداً ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی اس لیے پہلے جزوِ ضربی سے کوئی حل حاصل نہیں ہوتا۔

چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب التمام $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ہے ۱۵۰° یعنی $\frac{۵\pi}{۶}$ ہے اس لیے جس زاویہ کی جیب التمام $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ہو اس کی عام سے عام قیمت

۲ ن π ± $\frac{۵\pi}{۶}$ ہوگی (دفعہ ۸۳)۔

یہ مساوات بالا کا عام حل ہے ۔

مثال ۲ ۔ مساوات مس ۵ طہ = مم ۲ طہ کو حل کرو ۔

یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے ۔

مس ۵ طہ = مس (π/۲ - ۲ طہ)

اس زاویہ کی عام سے عام قیمت جس کا مماس وہی ہو جو π/۲ - ۲ طہ کا ہے بموجب دفعہ ۸۴ ، ن π + π/۲ - ۲ طہ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے ۔

اس لیے مساوات مجوزہ کا عام سے عام حل

۵ طہ = ن π + π/۲ - ۲ طہ ہے

اس لیے طہ = ۱/۷ (ن π + π/۲) جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے ۔

امثلہ نمبری ۱۲

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو ۔

۱ ۔ جم^۲ طہ - جب طہ - ۱/۴ = ۰

۲ ۔ ۲ جب^۲ طہ + ۳ جم طہ = ۰

۳ ۔ ۲ √۳ جم^۲ طہ = جب طہ

۴ ۔ جم طہ + جم^۲ طہ = ۱

۵ ۔ ۴ جم طہ - ۳ قط طہ = ۲ مس طہ

۶ ۔ جب^۲ طہ - ۲ جم طہ + ۱/۴ = ۰

۷ ۔ مس^۲ طہ - (۱ + √۳) مس طہ + √۳ = ۰

۸ ۔ مم^۲ طہ + (√۳ + ۱/√۳) مم طہ + ۱ = ۰

۹ ۔ مم طہ - ا ب مس طہ = ا - ب

۱۰ ۔ مس^۲ طہ + مم^۲ طہ = ۲

۱۱ ۔ قط طہ - ۱ = (√۲ - ۱) مس طہ

۱۲ ۔ ۳ (قط^۲ طہ + مس^۲ طہ) = ۵

۱۳ ۔ مم طہ + مس طہ = ۲ قم طہ

۱۴ ۔ ۴ جم^۲ طہ + √۳ = ۲ (√۳ + ۱) جم طہ

۱۵ ۔ ۳ جب^۲ طہ - ۲ جب طہ = ۱

۱۶ ۔ جب ۵ طہ = ۱/√۲

۱۷ ۔ جب ۹ طہ = جب طہ

۱۸ ۔ جب ۳ طہ = جب ۲ طہ

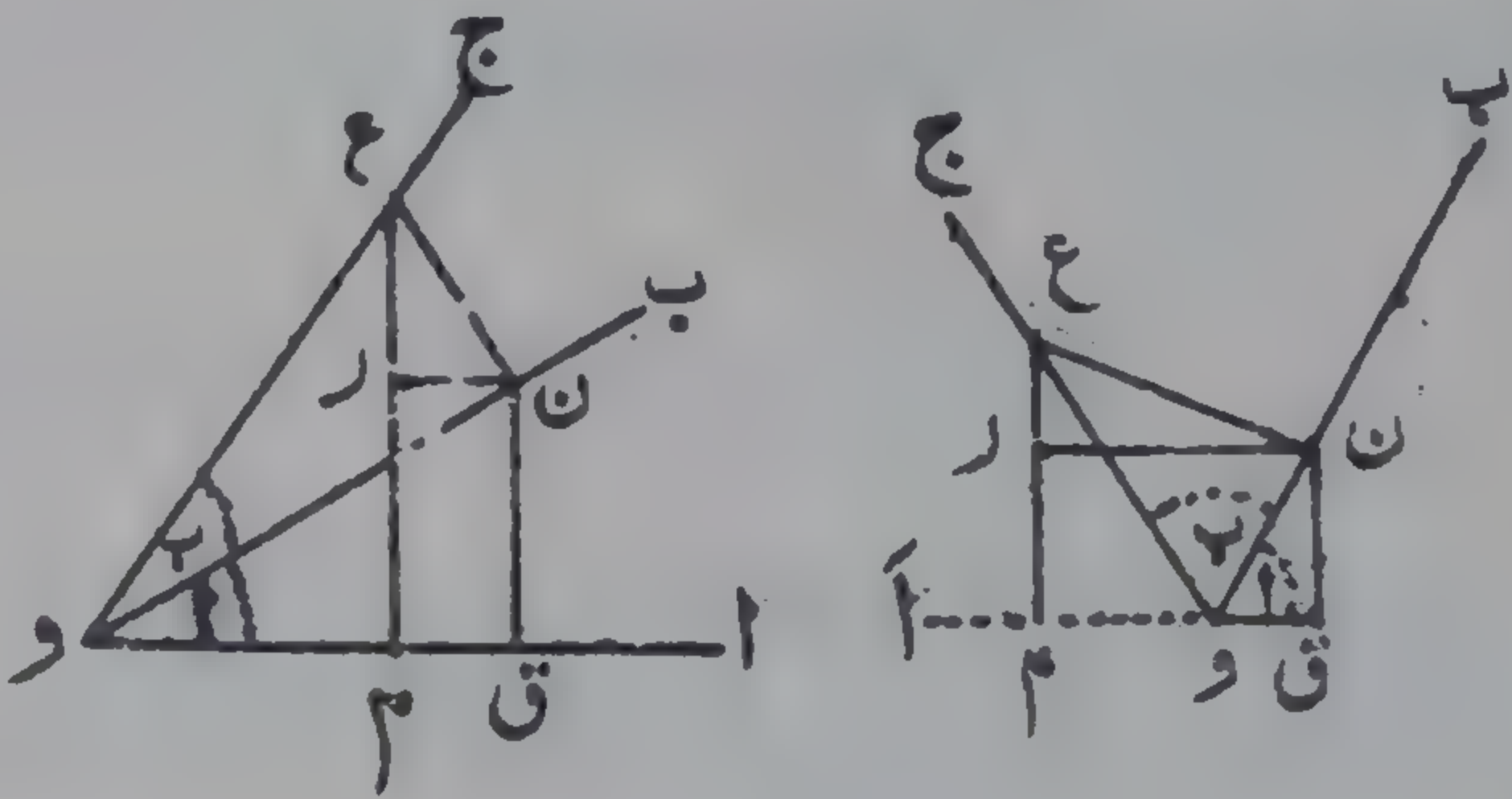
۱۹۔ جم م ط = جم ن ط
۲۰۔ جب ۲ ط = جم ۳ ط
۲۱۔ جم ۵ ط = جم ۴ ط
۲۲۔ جم م ط = جب ن ط
۲۳۔ مم ط = مس ۸ ط
۲۴۔ مم ط = مس ن ط
۲۵۔ مس ۲ ط = مس $\frac{۲}{ط}$
۲۶۔ مس ۲ ط مس ط = ۱
۲۷۔ مس۲ ۳ ط = مم۲ عہ
۲۸۔ مس ۲ ط = مم ط
۲۹۔ مس۲ ۳ ط = مس۲ عہ
۳۰۔ ۳ مس۲ ط = ۱
۳۱۔ مس م لا + مم ن لا = ۰
۳۲۔ مس (π مم ط) = مم (π مس ط)
۳۳۔ جب (ط ۔ عہ) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (ط + عہ) = $\frac{۱}{۲}$
۳۴۔ جم (۲ لا + ۳ ما) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (۳ لا + ۲ ما) = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳۵۔ وہ سب زاویے دریافت کرو جو ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوں اور جو مساوات قط۲ ط قم۲ ط + ۲ قم۲ ط = ۸ کو پورا کریں۔
۳۶۔ اگر ۲ ز۲ ط = $\frac{۵}{۴}$ تو سہ ط دریافت کرو۔ اور دوہرے جواب کی وجہ بیان کرو۔
۳۷۔ اگر کسی زاویہ کا سہم التمام $\frac{۱}{۳}$ ہو تو اس کی جیب التمام اور مماس التمام دریافت کرو۔

ساتواں باب

دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں

۸۸۔ مسئلہ۔ ثابت کرو کہ

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

اور جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

فرض کرو کہ خطِ دائر مقام ابتدائی و ا سے شروع ہو کر زاویہ ا و ب (= ا) مرتسم کرتا ہے اور اس کے بعد ایک اور زاویہ ب و ج (= ب) مرتسم کرتا ہے۔

خطِ دائر کے آخری مقام و ج پر کوئی نقطہ ع لو اور و ا اور و ب

پر بالترتیب عمود ع م اور ع ن نکالو۔

نقطہ ن میں سے ن ر متوازی او کے اس طرح کھینچو کہ وہ م ع کو نقطہ ر پر قطع کرے اور و ا پر عمود ن ق نکالو۔

زاویہ ر ع ن = ۹۰° - ∠ ع ن ر = ∠ ر ن و = ن و ق = ا

$$\text{اس لیے}\quad \text{جب (ا + ب) = جب ا و ع} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$$

$$= \frac{\text{م ر + ر ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ق ن}}{\text{و ع}} + \frac{\text{ر ع}}{\text{و ع}}$$

$$= \frac{\text{ق ن}}{\text{و ن}} \times \frac{\text{و ن}}{\text{و ع}} + \frac{\text{ر ع}}{\text{ن ع}} \times \frac{\text{ن ع}}{\text{و ع}}$$

$$= \text{جب ا جم ب + جم ر ع ن جب ب}$$

$$\therefore\quad \text{جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب}$$

$$\text{نیز جم (ا + ب) = جم ا و ع} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{و ق - م ق}}{\text{و ع}}$$

$$= \frac{\text{و ق}}{\text{و ع}} - \frac{\text{ر ن}}{\text{و ع}} = \frac{\text{و ق}}{\text{و ن}} \times \frac{\text{و ن}}{\text{و ع}} - \frac{\text{ر ن}}{\text{ن ع}} \times \frac{\text{ن ع}}{\text{و ع}}$$

$$= \text{جم ا جم ب - جب ر ع ن} \times \text{جب ب}$$

$$\therefore\quad \text{جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب}$$

۸۹ - دفعہ گذشتہ کی اشکال صرف اس صورت کے لیے کھینچی گئی ہیں جب دونوں زاویے ا اور ب حادے ہوں، لیکن یہی ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حاوی ہوگا بشرطیکہ ان سب مقادیر کی علامات کا جو ایسے حسابات میں شامل ہوں خاص لحاظ رکھا جائے۔

نتائج مندرجہ بالا کی عمومیت سب زاویوں کے لیے بغیر اور شکلیں کھینچنے کے

اس طرح ثابت ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ا اور ب دو حادّے زاویے ہیں پس بموجب دفعہ ۸۸ ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ا اور ب کے لیے صحیح ہے۔

فرض کرو کہ $ا_{1}$ = ۹۰° + ا   اس لیے بموجب دفعہ ۷۰

جب $ا_{1}$ = جم ا اور جم $ا_{1}$ = جب ا

تب۔ جب ($ا_{1}$ + ب) = جب {۹۰° + (ا + ب)} = جم (ا + ب) بموجب دفعہ ۷۰

= جم ا جم ب - جب ا جب ب = جب $ا_{1}$ جم ب + جم $ا_{1}$ جب ب

نیز جم ($ا_{1}$ + ب) = جم {۹۰° + (ا + ب)} = -جب (ا + ب)

= -جب ا جم ب - جم ا جب ب

= جم $ا_{1}$ جم ب - جب $ا_{1}$ جب ب

اگر زاویہ ب پر ۹۰° زیادہ کر دیے جائیں تو بھی اسی طرح کا عمل ہو سکتا ہے لہٰذا ثابت ہوا کہ ضوابط دفعہ ۸۸ اس صورت میں بھی درست رہتے ہیں جب مقدار زاویہ ا یا ب پر ۹۰° زیادہ کر دیے جائیں یعنی اگر ان کے ترکیبی زاویوں کی قیمتیں ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح سے $ا_{1}$ کو ۹۰° + $ا_{1}$ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکور کی صداقت کو اس صورت میں بھی ثابت کر سکتے ہیں جب ایک یا دونوں ترکیبی زاویوں کی قیمتیں ۰° اور ۲۷۰° کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح کا عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسائل مذکورہ بالعموم صحیح ہیں۔

۹۰۔ مسئلہ۔ ثابت کرو کہ

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

اور   جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

فرض کرو کہ خطِ دائر خطِ ابتدائی د ا سے شروع ہو کر زاویہ ا د ب (= ا) مرتسم کرتا ہے اور اس کے بعد سمت مخالف میں حرکت کرنے سے ایک زاویہ ب د ج پیدا کرتا ہے جس کی مقدار ب ہے اس لیے

زاویہ ا د ج = ا - ب

خطِ دائر کے آخری مقام و ج پر کوئی نقطہ ع لو اور خطوط و ا اور و ب پر بالترتیب عمود ع م اور ع ن کھینچو، نقطہ ن سے خطوط و ا اور م ع پر بالترتیب عمود ن ق اور ن ر نکالو۔

زاویہ ر ع ن = ۹۰° - ∠ ع ن ر = ∠ ر ن ب = ∠ ق و ن = ا

اس لیے

جب (ا - ب) = جب ا و ج = ع م / و ع = (م ر - ع ر) / و ع

= ق ن / و ع - ع ر / و ع = ق ن / و ن × و ن / و ع - ع ر / ع ن × ع ن / و ع

= جب ا جم ب - جم ر ع ن جب ب

اس لیے

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

نیز جم (ا - ب) = و م / و ع = (و ق + ق م) / و ع = و ق / و ع + ن ر / و ع

= و ق / و ن × و ن / و ع + ن ر / ن ع × ع ن / و ع

= جم ا جم ب + جب ن ع ر جب ب

اس لیے

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

۹۱۔ دفعہ گذشتہ کے ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حاوی ہونگے بشرطیکہ مقادیر زیرِ بحث کی علامات کا مناسب خیال رکھا جائے۔

اگر حادّے زاویوں کی صورت میں نتائج مندرجہ مان لیے جائیں تو بغیر اور شکلیں کھینچنے کے ان کی صداقت بالعموم اس طرح ثابت ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ا۱ = ۹۰° + ا تب

(چونکہ جب ا۱ = جم ا اور جم ا۱ = ـ جب ا)

جب (ا۱ ـ ب) = جب [۹۰° + (ا ـ ب)] = جم (ا ـ ب) دفعہ ۰،

= جم ا جم ب + جب ا جب ب

= جب ا۱ جم ب ـ جم ا۱ جب ب

نیز جم (ا۱ ـ ب) = جم [۹۰° + (ا ـ ب)] = ـ جب (ا ـ ب) دفعہ ۰،

= ـ جب ا جم ب + جم ا جب ب

= جم ا۱ جم ب + جب ا۱ جب ب

اور اسی طرح کا عمل ہو سکتا ہے جبکہ زاویہ ب میں ۹۰° زیادہ کر دیے جائیں۔
لہٰذا یہ مسئلہ اُن سب زاویوں کے لیے صحیح ثابت ہوا جو دو قائموں سے بڑے نہ ہوں۔
اِسی طرح ا۲ کو ۹۰° + ا۱ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ کو تین قائموں سے کم مقدار کے زاویوں کے لیے بھی ثابت کر سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس، لہٰذا اسی قسم کے عمل سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ مسئلے سب زاویوں کے لیے درست ہیں۔

۹۲۔ مسائل دفعات ۸۸ اور ۹۰ جن کی مدد سے دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں خود ان زاویوں کی نسبتوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں۔ اِن زاویوں کے **مسائل جمع و تفریق** کہلاتے ہیں۔

۹۳۔ مثال ۱۔ جب ۷۵° اور جم ۷۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

جب ۷۵° = جب (۴۵° + ۳۰°)

= جب ۴۵° جم ۳۰° + جم ۴۵° جب ۳۰°

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

اور جم ۷۵° = جم (۴۵° + ۳۰°)

= جم ۴۵° جم ۳۰° - جب ۴۵° جب ۳۰°

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ جب (ا + ب) جب (ا - ب) = جب^2 ا - جب^2 ب

اور جم (ا + ب) جم (ا - ب) = جم^2 ا - جب^2 ب

دفعات ۸۸ اور ۹۰ کی مدد سے

جب (ا + ب) جب (ا - ب)

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) (جب ا جم ب - جم ا جب ب)

= جب^2 ا جم^2 ب - جم^2 ا جب^2 ب

= جب^2 ا (۱ - جب^2 ب) - (۱ - جب^2 ا) جب^2 ب

= جب^2 ا - جب^2 ب

نیز ان ہی دفعات کی مدد سے

جم (ا + ب) جم (ا - ب)

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) (جم ا جم ب + جب ا جب ب)

= جم^2 ا جم^2 ب - جب^2 ا جب^2 ب

= جم^2 ا (۱ - جب^2 ب) - (۱ - جم^2 ا) جب^2 ب

= جم^2 ا - جب^2 ب

مثال ۳۔ جب (لا + ما) اور جم (لا + ما) کے ضابطوں کو صحیح مان کر اُن سے جملات جب (لا - ما) اور جم (لا - ما) کے ضابطوں کو مستنبط کرو۔

جب لا = جب {(لا - ما) + ما}

= جب (لا - ما) جم ما + جم (لا - ما) جب ما ...... (۱)

اور جم لا = جم {(لا - ما) + ما}

= جم (لا - ما) جم ما - جب (لا - ما) جب ما ...... (۲)

(۱) کو جم ما سے اور (۲) کو جب ما سے ضرب دو اور تفریق کرو۔

تب　جب لا جم ما ۔ جم لا جب ما = جب (لا ۔ ما) { جم^{2} ما + جب^{2} ما }

= جب (لا ۔ ما)

نیز (۱) کو جب ما سے اور (۲) کو جم ما سے ضرب دو اور جمع کرو تو حاصل ہوگا

جب لا جب ما + جم لا جم ما = جم (لا ۔ ما) { جم^{2} ما + جب^{2} ما }

= جم (لا ۔ ما)

لہٰذا دونوں ضابطے ثابت ہوئے۔

یہ دونوں ضابطے زاویوں کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہیں کیونکہ جن ضابطوں سے ان کا استنباط ہوا ہے وہ سب زاویوں کے لیے بالعموم صحیح ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۳

۱۔ اگر جب عہ = $\frac{۳}{۵}$ اور جم بہ = $\frac{۹}{۴۱}$ تو جب (عہ ۔ بہ) اور جم (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے ان کی تصدیق کرو۔

۲۔ اگر جب عہ = $\frac{۴۵}{۵۳}$ اور جب بہ = $\frac{۳۳}{۶۵}$ تو جب (عہ ۔ بہ) اور جب (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ اگر جب عہ = $\frac{۱۵}{۱۷}$ اور جم بہ = $\frac{۱۲}{۱۳}$ تو جب (عہ + بہ)، جم (عہ ۔ بہ) اور مس (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے ان کی تصدیق کرو۔

ثابت کرو کہ

۴۔ جم (۴۵° ۔ ا) جم (۴۵° ۔ ب) ۔ جب (۴۵° ۔ ا) جب (۴۵° ۔ ب) = جب (ا + ب)

۵۔ جب (۴۵° + ا) جم (۴۵° ۔ ب) + جم (۴۵° + ا) جب (۴۵° ۔ ب) = جم (ا ۔ ب)

۶۔ $\frac{\text{جب (ا ۔ ب)}}{\text{جم ا جم ب}} + \frac{\text{جب (ب ۔ ج)}}{\text{جم ب جم ج}} + \frac{\text{جب (ج ۔ ا)}}{\text{جم ج جم ا}} = ۰$

۷۔ جب ۱۰۵° + جم ۱۰۵° = جم ۴۵°

۸۔ جب ۷۵° ۔ جب ۱۵° = جم ۱۰۵° + جم ۱۵°

۹ - جم عہ جم (جہ - عہ) - جب عہ جب (جہ - عہ) = جم جہ

۱۰ - جم (عہ + بہ) جم جہ - جم (بہ + جہ) جم عہ = جب بہ جب (جہ - عہ)

۱۱ - جب (ن + ۱) ا جب (ن - ۱) ا + جم (ن + ۱) ا جم (ن - ۱) ا = جم ۲ ا

۱۲ - جب (ن + ۱) ا جب (ن + ۲) ا + جم (ن + ۱) ا جم (ن + ۲) ا = جم ا

۹۴ - دفعات ۸۸ اور ۹۰ سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لیے

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

جمع اور تفریق کرنے سے

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب ...... (۱)

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب ..... (۲)

دفعات مذکورۂ بالا سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لیے

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

اور جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

جمع اور تفریق کرنے سے

جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب ...... (۳)

جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب (۴)

اب فرض کرو کہ ا + ب = ج اور ا - ب = د یعنی

ا = (ج + د) / ۲ اور ب = (ج - د) / ۲

اوپر کے ضابطوں میں ا اور ب کی یہ قیمتیں مندرج کرنے سے روابط (۱) تا (۴) حسبِ ذیل ہو جاتے ہیں :-

جب ج + جب د = ۲ جب (ج + د) / ۲ جم (ج - د) / ۲ .... (اَ)

جب ج - جب د = ۲ جم (ج + د) / ۲ جب (ج - د) / ۲ ..... (۲َ)

جم ج + جم د = ۲ جم $\frac{ج + د}{۲}$ جم $\frac{ج - د}{۲}$ ......(۳)

جم ج - جم د = ۲ جب $\frac{ج + د}{۲}$ جب $\frac{د - ج}{۲}$ ......(۴)

[طالب علم کو یاد رکھنا چاہیے کہ (۴) کے بائیں طرف کا دوسرا جزو ضربی جب $\frac{د - ج}{۲}$ ہے نہ کہ جب $\frac{ج - د}{۲}$]

۹۵۔ روابط (۱) تا (۴) نہایت مشہور اور کارآمد ہیں ان کو بڑی احتیاط سے حفظ کر لینا چاہیے۔

ان کے کثیر الاستعمال ہونے کی وجہ سے ہم ان کا ہندسی ثبوت اُس صورت کے لیے درج کرتے ہیں جب زاویے ج اور د دونوں حادّے ہوں۔

فرض کرو کہ ا و ج زاویہ ج سے اور ا و د زاویہ د سے تعبیر ہوتا ہے، زاویہ ج و د کی تنصیف خط و ی سے کرو، ایک نقطہ ع خط و ی پر لو اور و ع پر عمود ق ع ر نکالو جو و ج اور و د کو بالترتیب نقاط ق اور ر پر قطع کرے۔ و ا پر عمود ع ل، ق م، ر ن نکالو اور نقطہ ر سے ع ل یا ق م پر عمود ر س ت کھینچو جو ان کو بالترتیب نقاط س اور ت پر قطع کرے۔

اب چونکہ زاویہ د و ج زاویہ ج - د کے برابر ہے اس لیے د و ی اور ی و ج میں سے ہر ایک زاویہ $\frac{ج - د}{۲}$ کے برابر ہے۔ اور نیز

$\angle$ ا و ی = $\angle$ ا و د + $\angle$ د و ی = د + $\frac{ج - د}{۲}$ = $\frac{ج + د}{۲}$

چونکہ مثلث ع و ر اور ع و ق ہر طرح سے مساوی ہیں

اس لیے　و ق = و ر اور ع ر = ع ق یعنی ر ق = ۲ ر ع

اس لیے　ق ت = ۲ ع س اور ر ت = ۲ ر س یعنی م ن = ۲ م ل

اس لیے　م ق + ن ر = ت ق + ۲ ل س = ۲ س ع + ۲ ل س = ۲ ل ع

نیز　و م + و ن = ۲ و م + م ن = ۲ و م + ۲ م ل = ۲ و ل

اس لیے　جب ج + جب د = $\frac{م ق}{و ق}$ + $\frac{ن ر}{و ر}$ = $\frac{م ق + ن ر}{و ر}$

$$= \frac{\text{۲ ل ع}}{\text{و ر}} = \text{۲} \frac{\text{ل ع}}{\text{و ع}} \times \frac{\text{و ع}}{\text{و ر}} = \text{۲ جب ل و ع جم ع و ر}$$

$$= \text{۲ جب} \frac{\text{ج + د}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ج - د}}{\text{۲}}$$

نیز $\text{جب ج - جب د} = \frac{\text{م ق}}{\text{و ق}} - \frac{\text{ن ر}}{\text{و ر}}$

$$= \frac{\text{م ق - ن ر}}{\text{و ر}} = \frac{\text{ت ق}}{\text{و ر}} = \frac{\text{۲ س ع}}{\text{و ر}}$$

$$= \frac{\text{۲ س ع}}{\text{ر ع}} \times \frac{\text{ر ع}}{\text{و ر}} = \text{۲ جم س ع ر جب ر و ع}$$

$$= \text{۲ جم} \frac{\text{ج + د}}{\text{۲}} \text{ جب } \frac{\text{ج - د}}{\text{۲}}$$

[کیونکہ $\angle$ س ع ر $= ۹۰^\circ - \angle$ س ع و $= \angle$ ل و ع $= \frac{\text{ج + د}}{\text{۲}}$]

نیز $\text{جم ج + جم د} = \frac{\text{و م}}{\text{و ق}} + \frac{\text{و ن}}{\text{و ر}} = \frac{\text{و م + و ن}}{\text{و ر}}$

$$= \text{۲} \frac{\text{و ل}}{\text{و ر}} = \text{۲} \frac{\text{و ل}}{\text{و ع}} \times \frac{\text{و ع}}{\text{و ر}}$$

$$= \text{۲ جم ل و ع جم ع و ر} = \text{۲ جم} \frac{\text{ج + د}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ج - د}}{\text{۲}}$$

اور آخریں $\text{جم د} - \text{جم ج} = \frac{\text{ون}}{\text{ور}} - \frac{\text{و۴}}{\text{دق}} = \frac{\text{ون} - \text{و۴}}{\text{ور}}$

$$= \frac{\text{ن۴}}{\text{ور}} = ۲\,\frac{\text{س ر}}{\text{ور}} = \frac{\text{۲ س ر}}{\text{ع ر}} \times \frac{\text{ع ر}}{\text{ور}}$$

$$= \text{۲ جب س ع ر} \times \text{جب ع ور}$$

$$= \text{۲ جب}\,\frac{\text{ج} + \text{د}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$$

۹۶ - طالب علم کو خاص طور پر ہدایت کی جاتی ہے کہ دفعہ گذشتہ کے ضابطوں سے بخوبی واقف ہوجائے اور ان کے استعمال کی خوب مشق کرلے، ان کی کامل واقفیت اس کی آیندہ ترقی کو نہایت آسان کردیگی۔

یہ ضابطے نہایت کارآمد ہیں کیونکہ ان کی وساطت سے مقادیر کے حاصل جمع اور حاصل تفریق بعض اور مقادیر کے حاصل ضربوں میں تحویل ہوسکتے ہیں اور اغلبا طالب علم کو جبر و مقابلہ سے معلوم ہے کہ مقادیر کے حاصل ضرب لوکارتم کی مدد سے باسانی مختصر صورت میں لائے جاسکتے ہیں۔

اب ہم ان ضابطوں کے استعمال کی چند مثالیں درج کرتے ہیں۔

مثال ۱ - $\text{جب ۶ طہ} + \text{جب ۴ طہ} = \text{۲ جب}\,\frac{\text{۶ طہ} + \text{۴ طہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{۶ طہ} - \text{۴ طہ}}{۲}$

$$= \text{۲ جب ۵ طہ جم طہ}$$

مثال ۲ - $\text{جم ۳ طہ} - \text{جم ۷ طہ} = \text{۲ جب}\,\frac{\text{۳ طہ} + \text{۷ طہ}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{۷ طہ} - \text{۳ طہ}}{۲}$

$$= \text{۲ جب ۵ طہ جب ۲ طہ}$$

مثال ۳ - $\frac{\text{جب ۷۵}^\circ - \text{جب ۱۵}^\circ}{\text{جم ۷۵}^\circ + \text{جم ۱۵}^\circ} = \frac{\text{۲ جم}\,\frac{۷۵^\circ + ۱۵^\circ}{۲}\,\text{جب}\,\frac{۷۵^\circ - ۱۵^\circ}{۲}}{\text{۲ جم}\,\frac{۷۵^\circ + ۱۵^\circ}{۲}\,\text{جم}\,\frac{۷۵^\circ - ۱۵^\circ}{۲}}$

$$= \frac{\text{۲ جم ۴۵}^\circ\,\text{جب ۳۰}^\circ}{\text{۲ جم ۴۵}^\circ\,\text{جم ۳۰}^\circ} = \text{مس ۳۰}^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \ldots\ldots ۵۷۷۳۵ ؛$$

[ان ضابطوں کے استعمال سے عمل میں جو سہولت پیدا ہوتی ہے اُس کی یہ ایک چھوٹی سی مثال ہے، اگر ہم جب ۵۰°، جب ۱۰°، جم ۵۰° اور جم ۱۰° کو لوکارثمی جدولوں سے نکالیں اور اس کے بعد ایک طویل کسر اعشاریہ کو دوسری پر تقسیم کریں تو ظاہر ہے کہ یہ نہایت پریشان کن اور طولانی عمل ہوگا]

مثال ۴۔ جملہ $\dfrac{(\text{جم طہ} - \text{جم ۳طہ})\ (\text{جب ۸طہ} + \text{جب ۲طہ})}{(\text{جب ۵طہ} - \text{جب طہ})\ (\text{جم ۴طہ} - \text{جم ۶طہ})}$ کو مختصر کرو۔

ضابطہ دفعہ ۴۹ کی مدد سے

$$\text{جملہ} = \frac{\text{۲جب}\ \frac{\text{طہ} + \text{۳طہ}}{2}\ \text{جب}\ \frac{\text{۳طہ} - \text{طہ}}{2} \times \text{۲جب}\ \frac{\text{۸طہ} + \text{۲طہ}}{2}\ \text{جم}\ \frac{\text{۸طہ} - \text{۲طہ}}{2}}{\text{۲جم}\ \frac{\text{۵طہ} + \text{طہ}}{2}\ \text{جب}\ \frac{\text{۵طہ} - \text{طہ}}{2} \times \text{۲جب}\ \frac{\text{۴طہ} + \text{۶طہ}}{2}\ \text{جب}\ \frac{\text{۶طہ} - \text{۴طہ}}{2}}$$

$$= \frac{4 \times \text{جب ۲طہ جب طہ} \times \text{جب ۵طہ جم ۳طہ}}{4 \times \text{جم ۳طہ جب ۲طہ} \times \text{جب ۵طہ جب طہ}} = 1$$

امثلہ نمبری ۱۴

ثابت کرو کہ

۱۔ $\dfrac{\text{جب ۷طہ} - \text{جب ۵طہ}}{\text{جم ۷طہ} + \text{جم ۵طہ}} = \text{مس طہ}$

۲۔ $\dfrac{\text{جم ۶طہ} - \text{جم ۴طہ}}{\text{جب ۶طہ} + \text{جب ۴طہ}} = \text{مس طہ}$

۳۔ $\dfrac{\text{جب ا} + \text{جب ۳ا}}{\text{جم ا} + \text{جم ۳ا}} = \text{مس ۲ا}$

۴۔ $\dfrac{\text{جب ۷ا} - \text{جب ا}}{\text{جب ۸ا} - \text{جب ۲ا}} = \text{جم ۴ا قط ۵ا}$

۵۔ (جم ۲ب + جم ۲ا) / (جم ۲ب − جم ۲ا) = مم (ا + ب) مم (ا − ب)

۶۔ (جب ۲ا + جب ۲ب) / (جب ۲ا − جب ۲ب) = مس (ا + ب) / مس (ا − ب)

۷۔ (جب ا + جب ۲ا) / (جم ا − جم ۲ا) = مم ا/۲

۸۔ (جب ۵ا − جب ۳ا) / (جم ۳ا + جم ۵ا) = مس ا

۹۔ (جم ۲ب − جم ۲ا) / (جب ۲ب + جب ۲ا) = مس (ا − ب)

۱۰۔ جم (ا + ب) + جب (ا − ب) = ۲ جب (۴۵° + ا) جم (۴۵° + ب)

۱۱۔ (جم ۳ا − جم ا) / (جب ۳ا − جب ا) + (جم ۲ا − جم ۴ا) / (جب ۴ا − جب ۲ا) = جب ا / (جم ۲ا جم ۳ا)

۱۲۔ (جب (۴ا − ۲ب) + جب (۴ب − ۲ا)) / (جم (۴ا − ۲ب) + جم (۴ب − ۲ا)) = مس (ا + ب)

۱۳۔ (مس ۵ط + مس ۳ط) / (مس ۵ط − مس ۳ط) = ۴ جم ۲ط جم ۴ط

۱۴۔ (جم ۳ط + ۲ جم ۵ط + جم ۷ط) / (جم ط + ۲ جم ۳ط + جم ۵ط) = جم ۲ط − جب ۲ط مس ۳ط

۱۵۔ (جب ا + جب ۳ا + جب ۵ا + جب ۷ا) / (جم ا + جم ۳ا + جم ۵ا + جم ۷ا) = مس ۴ا

۱۶۔ (جب (ط + ف) − ۲ جب ط + جب (ط − ف)) / (جم (ط + ف) − ۲ جم ط + جم (ط − ف)) = مس ط

۱۷۔ (جب ا + ۲ جب ۳ا + جب ۵ا) / (جب ۳ا + ۲ جب ۵ا + جب ۷ا) = جب ۳ا / جب ۵ا

۱۸- [جب (ا-ج) + ۲ جب ا + جب (ا+ج)] / [جب (ب-ج) + ۲ جب ب + جب (ب+ج)] = جب ا / جب ب

۱۹- [جب ا - جب ۵ا + جب ۹ا - جب ۱۳ا] / [جم ا - جم ۵ا - جم ۹ا - جم ۱۳ا] = مم ۴ا

۲۰- (جب ا + جب ب) / (جب ا - جب ب) = مس (ا+ب)/۲ مم (ا-ب)/۲

۲۱- (جم ا + جم ب) / (جب ب - جم ا) = مم (ا+ب)/۲ مم (ا-ب)/۲

۲۲- (جب ا + جب ب) / (جم ا + جم ب) = مس (ا+ب)/۲

۲۳- (جب ا - جب ب) / (جم ب - جم ا) = مم (ا+ب)/۲

۲۴- [جم (ا+ب+ج) + جم (-ا+ب+ج) + جم (ا-ب+ج) + جم (ا+ب-ج)] / [جب (ا+ب+ج) + جب (-ا+ب+ج) - جب (ا-ب+ج) + جب (ا+ب-ج)] = مم ب

۲۵- جم ۳ا + جم ۵ا + جم ۷ا + جم ۱۵ا = ۴ جم ۴ا جم ۵ا جم ۶ا

۲۶- جم (-ا+ب+ج) + جم (ا-ب+ج) + جم (ا+ب-ج) + جم (ا+ب+ج)
= ۴ جم ا جم ب جم ج

۲۷- جب ۵۰° - جب ۷۰° + جب ۱۰° = ۰

۲۸- جب ۱۰° + جب ۲۰° + جب ۴۰° + جب ۵۰° = جب ۷۰° + جب ۸۰°

۲۹- جب ع + جب ۲ع + جب ۴ع + جب ۵ع = ۴ جم ع/۲ جم ۳ع/۲ جب ۳ع

مختصر کرو

۳۰- جم {طہ + (ن - ۳/۲) فہ} - جم {طہ + (ن + ۳/۲) فہ}

۳۱- جب {طہ + (ن - ۱/۲) فہ} + جب {طہ + (ن + ۱/۲) فہ}

۹۷۔ دفعہ ۹۴ کے ضوابط (۱)، (۲)، (۳)، (۴) نہایت کار آمد ہیں انکو شکل ذیل میں یاد رکھنا چاہیے:

۲ جب ا جم ب = جب (ا + ب) + جب (ا - ب) ..... (۱)

۲ جم ا جب ب = جب (ا + ب) - جب (ا - ب) .... (۲)

۲ جم ا جم ب = جم (ا + ب) + جم (ا - ب) .... (۳)

۲ جب ا جب ب = جم (ا - ب) - جم (ا + ب) ... (۴)

ان کو ہم (دفعہ ۹۴) کے ضابطوں (اَ)، (۲َ)، (۳َ)، (۴َ) کا عکس خیال کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ۲ جب ۳ طہ جم طہ = جب ۴ طہ + جب ۲ طہ

مثال ۲۔ ۲ جب ۵ طہ جب ۳ طہ = جم ۲ طہ - جم ۸ طہ

مثال ۳۔ ۲ جم ۱۱ طہ جم ۲ طہ = جم ۱۳ طہ + جم ۹ طہ

مثال ۴۔ (جب ۸ طہ جم طہ - جب ۶ طہ جم ۳ طہ) / (جم ۲ طہ جم طہ - جب ۳ طہ جب ۴ طہ) کو مختصر کرو۔

مندرجۂ بالا ضابطوں کی مدد سے

دیا ہوا جملہ = (½ [جب ۹ طہ + جب ۷ طہ] - ½ [جب ۹ طہ + جب ۳ طہ]) / (½ [جم ۳ طہ + جم طہ] - ½ [جم طہ - جم ۷ طہ])

= (جب ۷ طہ - جب ۳ طہ) / (جم ۳ طہ + جم ۷ طہ)

= (۲ جم ۵ طہ جب ۲ طہ) / (۲ جم ۵ طہ جم ۲ طہ)، ضوابط دفعہ ۹۴ کی مدد سے

= مس ۲ طہ

[اس مثال میں سب سے پہلے ہم نے اس دفعہ کے ضابطوں کو استعمال کیا،

اس کے بعد مزید اختصار کی خاطر ان کی عکس صورتوں (دفعہ ۹۴) سے مدد لی۔ طالب علم کو یہ ترکیب یاد رکھنی چاہیے جملوں کے اختصار میں یہ اکثر کام آتی ہے]

امثلہ نمبری ۱۵

مفصلۂ ذیل کو حاصل جمع یا حاصل تفریق کی صورت میں بیان کرو:

۱۔ ۲ جب ۵ طہ جب ۷ طہ ۲۔ ۲ جم ۷ طہ جب ۵ طہ

۳۔ ۲ جم ۱۱ طہ جم ۳ طہ ۴۔ ۲ جب ۵۴° جب ۶۶°

ثابت کرو کہ

۵۔ جب (طہ/۲) جب (۷طہ/۲) + جب (۳طہ/۲) جب (۱۱طہ/۲) = جب ۲ طہ جب ۵ طہ

۶۔ جم ۲ طہ جم (طہ/۲) − جم ۳ طہ جم (۹طہ/۲) = جب ۵ طہ جب (۵طہ/۲)

۷۔ جب ا جب (ا + ۲ب) − جب ب جب (ب + ۲ا) = جب (ا − ب) جب (ا + ب)

۸۔ (جب ۳ا + جب ا) جب ا + (جم ۳ا − جم ا) جم ا = ۰

۹۔ [۲ جب (ا − ج) جم ج − جب (ا − ۲ج)] / [۲ جب (ب − ج) جم ج − جب (ب − ۲ج)] = جب ا / جب ب

۱۰۔ [جب ا جب ۲ا + جب ۳ا جب ۶ا + جب ۴ا جب ۱۳ا] / [جب ا جم ۲ا + جب ۳ا جم ۶ا + جب ۴ا جم ۱۳ا] = مس ۹ا

۱۱۔ [جم ۲ا جم ۳ا − جم ۲ا جم ۷ا + جم ا جم ۱۰ا] / [جب ۴ا جب ۳ا − جب ۲ا جب ۵ا + جب ۴ا جب ۷ا] = مم ۶ا مم ۵ا

۱۲۔ جم (۳۶° − ا) جم (۳۶° + ا) + جم (۵۴° + ا) جم (۵۴° − ا) = جم ۲ا

۱۳۔ جم ا جب (ب − ج) + جم ب جب (ج − ا) + جم ج جب (ا − ب) = ۰

۱۴۔ جب (۴۵° + ا) جب (۴۵° − ا) = ½ جم ۲ا

۱۵۔ سھ (ا + ب) سھ (ا − ب) = (جم ا − جم ب)^{2}

۱۶۔ جب (بہ − جہ) جم (عہ − لہ) + جب (جہ − عہ) جم (بہ − لہ) + جب (عہ − بہ) جم (جہ − لہ) = ۰

۹۷- $\text{۲ جم}\,\frac{\pi}{۱۳}\ \text{جم}\,\frac{۹\pi}{۱۳} + \text{جم}\,\frac{۳\pi}{۱۳} + \text{جم}\,\frac{۵\pi}{۱۳} = ۰$

۹۸- ثابت کرو کہ $\text{مس}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{۱ - \text{مس ا مس ب}}$

اور $\text{مس}\,(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{۱ + \text{مس ا مس ب}}$

بموجب دفعہ ۸۸، ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\text{مس}(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{جب}\,(\text{ا} + \text{ب})}{\text{جم}\,(\text{ا} + \text{ب})} = \frac{\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}}$$

شمارکنندہ اور نسب نما دونوں کو جم ا جم ب پر تقسیم کرنے سے

$$= \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{۱ - \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}$$

$$\therefore\ \text{مس}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{۱ - \text{مس ا مس ب}}$$

نیز بموجب دفعہ ۹۰

$$\text{مس}\,(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{جب}\,(\text{ا} - \text{ب})}{\text{جم}\,(\text{ا} - \text{ب})} = \frac{\text{جب ا جم ب} - \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب}}$$

[شمارکنندہ اور نسب نما دونوں کو جم ا جم ب پر تقسیم کرنے سے]

$$= \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} - \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{۱ + \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}$$

$$\therefore\ \text{مس}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1+\text{مس ا مس ب}}$$

۹۹- دفعہ گذشتہ کے ضابطوں کا ہندسی ثبوت دفعہ ۸۸ اور ۹۰ کی شکلوں سے حاصل ہو سکتا ہے۔

(۱) دفعہ ۸۸ کی شکل سے

$$\text{مس}\,(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{ع م}}{\text{و م}} = \frac{\text{ق ن} + \text{ر ع}}{\text{و ق} - \text{ر ن}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ق ن}}{\text{و ق}} + \dfrac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}{1 - \dfrac{\text{ر ن}}{\text{و ق}}} = \frac{\text{مس ا} + \dfrac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}{1 - \dfrac{\text{ر ن}}{\text{ر ع}} \times \dfrac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}$$

اب چونکہ زاویے ر ع ن اور ق و ن برابر ہیں اس لیے مثلث ر ع ن اور ق و ن متشابہ ہیں۔

$$\text{پس}\quad \frac{\text{ر ع}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{و ق}}{\text{و ن}}$$

$$\text{اور اس لیے}\quad \frac{\text{ر ع}}{\text{و ق}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}} = \text{مس ب}$$

$$\text{اس لیے}\quad \text{مس}\,(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ر ع ن مس ب}}$$

$$= \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}}$$

(۲) دفعہ ۹۰ کی شکل سے

$$\text{مس}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{ع م}}{\text{و م}} = \frac{\text{ق ن} - \text{ع ر}}{\text{و ق} + \text{ن ر}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ق ن}}{\text{و ق}} - \frac{\text{ع ر}}{\text{و ق}}}{1 + \frac{\text{ن ر}}{\text{و ق}}} = \frac{\text{مس ا} - \frac{\text{ع ر}}{\text{و ق}}}{1 + \frac{\text{ن ر}}{\text{ع ر}} \times \frac{\text{ع ر}}{\text{و ق}}}$$

اب چونکہ زاویے ر ع ن اور ن و ق مساوی ہیں

اس لیے $\frac{\text{ر ع}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{و ق}}{\text{و ن}}$

اور اس لیے $\frac{\text{ع ر}}{\text{و ق}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}} = \text{مس ب}$

اس لیے $\text{مس (ا - ب)} = \frac{\text{مس ا - مس ب}}{1 + \text{مس ر ع ن مس ب}}$

$$= \frac{\text{مس ا - مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}}$$

۱۰۰۔ مندرجۂ بالا ضابطوں کی چند خاص صورتیں اس طرح حاصل ہوسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ب = ۴۵° تب

$$\text{مس (ا + ۴۵°)} = \frac{\text{مس ا} + 1}{1 - \text{مس ا}} = \frac{1 + \text{مس ا}}{1 - \text{مس ا}}$$

$$\text{اور مس (ا - ۴۵°)} = \frac{\text{مس ا} - 1}{1 + \text{مس ا}}$$

اسی طرح دفعہ ۹۸ کے مطابق عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{مم (ا + ب)} = \frac{\text{مم ا مم ب} - 1}{\text{مم ا + مم ب}}$$

$$\text{اور مم (ا - ب)} = \frac{\text{مم ا مم ب} + 1}{\text{مم ب - مم ا}}$$

۱۰۱۔ مثال ۱۔ $مس\ ۷۵^\circ = مس\ (۴۵^\circ + ۳۰^\circ)$

$$= \frac{مس\ ۴۵^\circ + مس\ ۳۰^\circ}{۱ - مس\ ۴۵^\circ\ مس\ ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} - ۱}$$

$$= \frac{(\sqrt{۳} + ۱)^۲}{۳ - ۱} = \frac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۳} = ۲ + ۱٫۷۳۲۰۵ \ldots = ۳٫۷۳۲۰۵ \ldots$$

مثال ۲۔ $مس\ ۱۵^\circ = مس\ (۴۵^\circ - ۳۰^\circ)$

$$= \frac{مس\ ۴۵^\circ - مس\ ۳۰^\circ}{۱ + مس\ ۴۵^\circ\ مس\ ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} + ۱} = \frac{(\sqrt{۳} - ۱)^۲}{۳ - ۱}$$

$$= \frac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ - \sqrt{۳} = ۲ - ۱٫۷۳۲۰۵$$

$$= ۰٫۲۶۷۹۵$$

امثلہ نمبری ۱۶

۱۔ اگر $مس\ ا = \frac{۱}{۲}$ اور $مس\ ب = \frac{۱}{۳}$ تو $مس\ (۲ا + ب)$ اور $مس\ (۲ا - ب)$ کی قیمتیں دریافت کرو۔
نیز ہندسی عمل اور صحیح پیمائش سے اس کی تصدیق کرو۔

۲۔ اگر $مس\ ا = \frac{\sqrt{۳}}{۴ - \sqrt{۳}}$ اور $مس\ ب = \frac{\sqrt{۳}}{۴ + \sqrt{۳}}$ تو ثابت کرو کہ
$مس\ (ا - ب) = ۰٫۳۷۵$

۳۔ اگر $مس\ ا = \frac{ن}{ن + ۱}$ اور $مس\ ب = \frac{۱}{۲ن + ۱}$ تو $مس\ (ا + ب)$ دریافت کرو۔

۴۔ اگر مس عہ = $\frac{5}{6}$ اور مس بہ = $\frac{1}{11}$ تو ثابت کرو کہ عہ + بہ = $\frac{\pi}{4}$ ہندسی شکل اور صحیح پیمائش سے اس کی تصدیق کرو۔

ثابت کرو کہ

۵۔ $\text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \text{طہ}\right) \times \text{مس}\left(\frac{3\pi}{4} + \text{طہ}\right) = -1$

۶۔ $\text{مم}\left(\frac{\pi}{4} + \text{طہ}\right) \text{مم}\left(\frac{\pi}{4} - \text{طہ}\right) = 1$

۷۔ $1 + \text{مس ا مس}\ \frac{1}{2} = \text{مس ا مم}\ \frac{1}{2} - 1 = \text{قط ا}$

۱۰۲۔ اس باب کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اس قسم کی مثالیں بھی حل ہوسکتی ہیں جیسے کہ اُن سب زاویوں کے لیے ایک جملۂ عامہ دریافت کرو جن کی جیب یا جیب التمام یا مماس معلوم ہو۔ دفعات ۸۲ تا ۸۴ میں اس کے متعلق بحث ہوچکی ہے۔

اُن سب زاویوں کے لیے جو ایک ہی جیب رکھتے ہوں ایک جملۂ عامہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ عہ کوئی زاویہ ہے جو معلوم جیب رکھتا ہے اور طہ ایک اور زاویہ ہے جس کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے۔

ہمیں طہ کی ایک ایسی عام سے عام قیمت معلوم کرنا ہے جو مساوات

$$\text{جب طہ} = \text{جب عہ}$$

$$\text{یعنی}\qquad \text{جب طہ} - \text{جب عہ} = 0$$

کو پورا کرے، یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے۔

$$2\ \text{جم}\ \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{2}\ \text{جب}\ \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{2} = 0$$

اور اس لیے یہ مساوات ذیل کی قیمتوں سے پوری ہوتی ہے:

$$\text{جم}\ \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{2} = 0\ \text{اور جب}\ \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{2} = 0$$

اس لیے لازماً $\frac{طہ + عہ}{۲}$ = $\frac{\pi}{۲}$ کے کسی طاق ضعف کے

اور $\frac{طہ - عہ}{۲}$ = π کے کسی ضعف کے

یعنی طہ = - عہ + π کا کوئی طاق ضعف .... (۱)

اور طہ = عہ + ۲π کا کوئی جفت ضعف .... (۲)

یعنی لازماً طہ = (- ۱)^{ن} عہ + ن π جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

کیونکہ جب ن طاق ہو تو جملۂ عامہ سے جملہ (۱) حاصل ہوتا ہے اور جب ن جفت ہو تو جملہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

۱۰۳۔ اُن سب زاویوں کے لیے جن کی ایک ہی جیب التمام ہو ایک قیمت عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

جم طہ = جم عہ

یعنی جم طہ - جم عہ = ۰

یعنی ۲ جب $\frac{طہ + عہ}{۲}$ جب $\frac{طہ - عہ}{۲}$ = ۰ کو حل کرنا مطلوب ہے۔

مساوات بالا

جب $\frac{طہ + عہ}{۲}$ = ۰ سے اور جب $\frac{طہ - عہ}{۲}$ = ۰ سے پوری ہوتی ہے

اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{طہ + عہ}{۲}$ = π کے کسی ضعف کے

اور $\frac{طہ - عہ}{۲}$ = π کے کسی ضعف کے

یعنی طہ = - عہ + ۲ π کا کوئی ضعف

اور طہ = عہ + ۲ π کا کوئی ضعف

قیمتوں کے دونوں جٹ ذیل کے حل طہ = ۲ ن π $\pm$ عہ میں شامل ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۱۰۴۔ ان سب زاویوں کے لیے جو ایک ہی معلومہ مماس رکھتے ہوں ایک جملۂ عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

$$\text{مس طہ} - \text{مس عہ} = ۰$$

یعنی

$$\text{جب طہ جم عہ} - \text{جم طہ جب عہ} = ۰$$

یعنی

$$\text{جب}\,(\text{طہ} - \text{عہ}) = ۰$$

کو حل کرنا مطلوب ہے۔

∴ $\text{طہ} - \text{عہ} = \pi$ کے کسی ضعف کے
$= \text{ن}\,\pi$ جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

اس لیے مساوات کا عام حل $\text{طہ} = \text{ن}\,\pi + \text{عہ}$ ہے۔

امثلہ نمبری ۱۶ (ل)

۱۔ دو حادّے زاویے بناؤ جن کے مماس $\frac{۱}{۳}$ اور $\frac{۱}{۲}$ ہوں اور پیمائش سے تصدیق کرو کہ ان کا مجموعہ ۴۵° ہے۔

۲۔ دو حادّے زاویوں کے مماس بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، عمل ترسیمی سے ثابت کرو کہ ان زاویوں کے فرق کا مماس $\frac{۱}{۷}$ ہے۔

۳۔ ایک حادّے زاویے کی جیب ۶؍ ہے اور ایک اَور زاویے کی جیب التمام ۵؍ ہے، عمل ترسیمی سے، نیز حساب لگانے سے ثابت کرو کہ ان کے حاصل تفریق کی جیب قریب قریب ۳۹؍ ہے۔

۴۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام ۴؍ ہو اور حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ایک ایسے زاویے کی جیب اور جیب التمام جو زاویۂ مذکورہ سے بقدر ۴۵° کے زیادہ ہو تقریباً ۹۳؍ اور ۔ ۳۶۵؍ ہیں۔

۵۔ ایک زاویۂ حادّہ بناؤ جس کا مماس ۷، ہو اور ایک اَور زاویۂ حادّہ بناؤ جس کی جیب ۷؍ ہو، حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ان کے فرق کی جیب قریب قریب ۶۱؍ ہے۔

آٹھواں باب

اضعافی اور کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں

۱۰۵- زاویہ ۲ا کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ا کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

اگر دفعہ ۸۸ کے ضابطوں میں ہم فرض کریں کہ ب = ا تو حاصل ہوگا۔

جب ۲ا = جب ا جم ا + جم ا جب ا = ۲ جب ا جم ا

جم ۲ا = جم ا جم ا - جب ا جب ا = جم² ا - جب² ا

= (ا - جب² ا) - جب² ا = ا - ۲ جب² ا

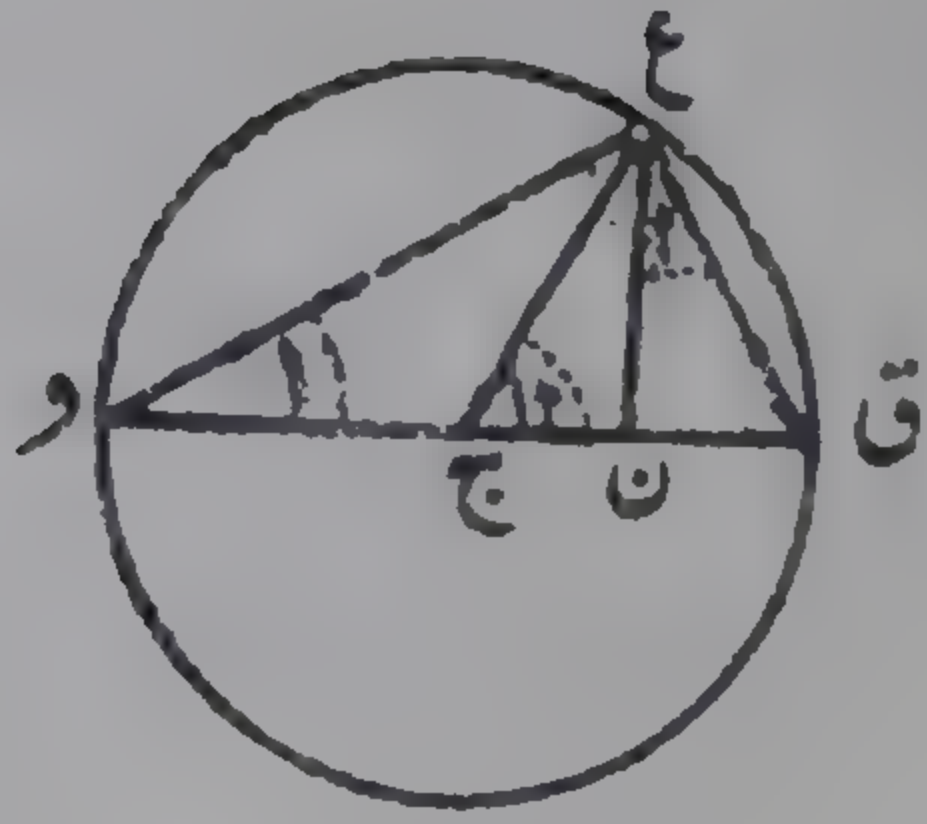
اور نیز

= جم² ا - (ا - جم² ا) = ۲ جم² ا - ا

اور مس ۲ا = (مس ا + مس ا) / (ا - مس ا مس ا) = ۲ مس ا / (ا - مس² ا)

اب دفعہ ۸۸ کے ضابطے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہیں اس لیے جو صورتیں اُن سے مستنبط ہوتی ہیں وہ بھی زاویوں کی تمام قیمتوں کیلیے درست ہیں اور بالخصوص مندرجۂ بالا ضابطے ا کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہیں۔

۱۰۶- جب زاویہ ا قائمہ سے کم ہو تو دفعہ گذشتہ کے ضابطوں کا

ہندسی ثبوت اس طرح بلاواسطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ق ج ع زاویہ ۲ا کے برابر ہے۔

مرکز ج اور نصف قطر ج ع پر ایک دائرہ بناؤ اور فرض کرو کہ ق ج ممدود دائرۂ مذکورہ کو نقطہ د پر ملتا ہے؛ د ع اور ع ق کو ملاؤ اور د ق پر عمود ع ن نکالو۔

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۲۰

زاویہ ق د ع = $\frac{1}{2}$ ∠ ق ج ع = ا

اور زاویہ ن ع ق = ∠ ق د ع = ا

اس لیے

$$\text{جب ۲ا} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ج ع}} = \frac{\text{۲ ن ع}}{\text{۲ ج ق}} = ۲\,\frac{\text{ن ع}}{\text{د ق}}$$

$$= ۲\,\frac{\text{ن ع}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ق}}$$

= ۲ جب ن د ع جم ع د ق چونکہ د ع ق زاویۂ قائمہ ہے۔

= ۲ جب ا جم ا

$$\text{نیز} \quad \text{جم ۲ا} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ج ع}} = \frac{\text{۲ ج ن}}{\text{۲ ج ع}}$$

$$= \frac{\text{۲ج ن}}{\text{و ق}} = \frac{(\text{و ج} + \text{ج ن}) - (\text{و ج} - \text{ج ن})}{\text{و ق}}$$

$$= \frac{\text{و ن} - \text{ن ق}}{\text{و ق}} = \frac{\text{و ن}}{\text{و ع}} \times \frac{\text{و ع}}{\text{و ق}} - \frac{\text{ن ق}}{\text{ع ق}} \times \frac{\text{ع ق}}{\text{و ق}}$$

$$= \text{جم}^{2}\text{ا} - \text{جب}^{2}\text{ا}$$

اور $\text{مس ۲ا} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ج ن}} = \frac{\text{۲ن ع}}{\text{و ن} - \text{ن ق}}$

$$= \frac{\text{۲}\frac{\text{ن ع}}{\text{و ن}}}{\text{۱} - \frac{\text{ن ق}}{\text{ع ن}} \times \frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}}$$

$$= \frac{\text{۲مس ا}}{\text{۱} - \text{مس}^{2}\text{ا}}$$

مثال۔ جب ۱۵° اور جم ۱۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

فرض کروکہ زاویہ ۲ا برابر ۳۰° کے ہے یعنی ا = ۱۵°

نیز فرض کروکہ نصف قطر دائرہ ج ع برابر ۲ ر کے ہے اس لیے حاصل ہوگا۔

$\text{ج ن} = \text{۲ ر جم ۳۰°} = \text{ر}\sqrt{\text{۳}}$

اور $\text{ن ع} = \text{۲ ر جب ۳۰°} = \text{ر}$

اس لیے $\text{و ن} = \text{و ج} + \text{ج ن} = \text{ر}(\text{۲} + \sqrt{\text{۳}})$

اور $\text{ن ق} = \text{ج ق} - \text{ج ن} = \text{ر}(\text{۲} - \sqrt{\text{۳}})$

$\therefore$ $\text{و ع}^{2} = \text{و ن} \times \text{و ق} = \text{ر}(\text{۲} + \sqrt{\text{۳}}) \times \text{۴ ر}$

یعنی $\text{و ع} = \text{ر}\sqrt{\text{۲}}(\sqrt{\text{۳}} + \text{۱})$

اور $\text{ع ق}^{2} = \text{ق ن} \times \text{ق و} = \text{ر}(\text{۲} - \sqrt{\text{۳}}) \times \text{۴ ر}$

یعنی $\text{ع ق} = \text{ر}\sqrt{\text{۲}}(\sqrt{\text{۳}} - \text{۱})$

اس لیے $\text{جب ۱۵°} = \frac{\text{ع ق}}{\text{و ق}} = \frac{\sqrt{\text{۲}}(\sqrt{\text{۳}} - \text{۱})}{\text{۴}} = \frac{\sqrt{\text{۳}} - \text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}}$

اور جم ۱۵° = (و ع)/(د ق) = (۱ + √۳) √۲ / ۴ = (۱ + √۳)/(۲ √۲)

۱۰۷۔ زاویہ ۳ا کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ا کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۸۸ میں ب کی بجائے ۲ا رکھنے سے حاصل ہوگا۔

جب ۳ا = جب (ا + ۲ا) = جب ا جم ۲ا + جم ا جب ۲ا

= جب ا (۱ - ۲ جب^{2} ا) + جم ا × ۲ جب ا جم ا

بموجب دفعہ ۱۰۵

= جب ا (۱ - ۲ جب^{2} ا) + ۲ جب ا (۱ - جب^{2} ا)

اس لیے **جب ۳ا = ۳ جب ا - ۴ جب^{3} ا** .... (۱)

اسی طرح سے جم ۳ا = جم (ا + ۲ا) = جم ا جم ۲ا - جب ا جب ۲ا

= جم ا (۲ جم^{2} ا - ۱) - جب ا × ۲ جب ا جم ا

= جم ا (۲ جم^{2} ا - ۱) - ۲ جم ا (۱ - جم^{2} ا)

اس لیے **جم ۳ا = ۴ جم^{3} ا - ۳ جم ا** .... (۲)

نیز مس ۳ا = مس (ا + ۲ا) = (مس ا + مس ۲ا) / (۱ - مس ا مس ۲ا)

= [مس ا + ۲ مس ا / (۱ - مس^{2} ا)] / [۱ - مس ا × ۲ مس ا / (۱ - مس^{2} ا)]

= [مس ا (۱ - مس^{2} ا) + ۲ مس ا] / [(۱ - مس^{2} ا) - ۲ مس^{2} ا]

اس لیے **مس ۳ا = (۳ مس ا - مس^{3} ا) / (۱ - ۳ مس^{2} ا)**

[طالب علم کو شاید مندرجۂ بالا ضابطوں (۱) اور (۲) کو یاد رکھنے میں دقت ہو۔ ان صورتوں میں کچھ مشابہت ہے مگر ترتیب علامات میں اختلاف ہے اگر کسی قسم کا شک ہو تو طالب علم کو ان ضابطوں کی خاص صورتوں کے لیے تصدیق کر لینی چاہیے۔ مثلاً صورت (۱) میں فرض کرو کہ ا = ۳۰° اور (۲) میں ا = ۰°]

۱۰۸۔ دفعہ گزشتہ کے موافق عمل کرنے سے طه کے کسی اعلیٰ ضعف کی مثلثی نسبتیں طه کی نسبتوں کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں مگر یہ طریقہ طولانی اور پریشان کن ہوگا آگے چل کر بعد کے کسی باب میں اس سے اچھی ترکیبیں دی جائیں گی۔

تمثیلاً فرض کرو کہ جم ۵ طه کو جم طه کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے

جم ۵ طه = جم (۳ طه + ۲ طه)

= جم ۳ طه جم ۲ طه ۔ جب ۳ طه جب ۲ طه

= (۴ جم^{3} طه ۔ ۳ جم طه) (۲ جم^{2} طه ۔ ۱)

۔ (۳ جب طه ۔ ۴ جب^{3} طه) × ۲ جب طه جم طه

= (۸ جم^{5} طه ۔ ۱۰ جم^{3} طه + ۳ جم طه)

۔ ۲ جم طه × جب^{2} طه (۳ ۔ ۴ جب^{2} طه)

= (۸ جم^{5} طه ۔ ۱۰ جم^{3} طه + ۳ جم طه)

۔ ۲ جم طه (۱ ۔ جم^{2} طه) (۴ جم^{2} طه ۔ ۱)

= (۸ جم^{5} طه ۔ ۱۰ جم^{3} طه + ۳ جم طه)

۔ ۲ جم طه (۵ جم^{2} طه ۔ ۴ جم^{4} طه ۔ ۱)

= ۱۶ جم^{5} طه ۔ ۲۰ جم^{3} طه + ۵ جم طه

امثلہ نمبری ۱۷

۱۔ جب ۲ عه کی قیمت دریافت کرو جبکہ

(۱) جم عه = $\frac{۳}{۵}$ (۲) جب عه = $\frac{۱۲}{۱۳}$ اور (۳) مس عه = $\frac{۱۶}{۶۳}$

۲۔ جم ۲ عه کی قیمت دریافت کرو جبکہ

(۱) $\text{جم عہ} = \frac{۱۵}{۱۷}$ (۲) $\text{جب عہ} = \frac{۴}{۵}$ اور (۳) $\text{مس عہ} = \frac{۵}{۱۲}$، ہر ایک صورت میں ترسیم اور صحیح پیمائش سے تصدیق کرو۔

۳۔ اگر $\text{مس طہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ تو $\text{ا جم ۲ طہ} + \text{ب جب ۲ طہ}$ کی قیمت دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ

۴۔ $\frac{\text{جب ۲ا}}{\text{۱ + جم ۲ا}} = \text{مس ا}$ ۵۔ $\frac{\text{جب ۲ا}}{\text{۱ - جم ۲ا}} = \text{مم ا}$

۶۔ $\frac{\text{۱ - جم ۲ا}}{\text{۱ + جم ۲ا}} = \text{مس}^{۲}\text{ا}$ ۷۔ $\text{مس ا} + \text{مم ا} = \text{۲ قم ۲ا}$

۸۔ $\text{مس ا} - \text{مم ا} = -\text{۲ مم ۲ا}$ ۹۔ $\text{قم ۲ا} + \text{مم ۲ا} = \text{مم ا}$

۱۰۔ $\frac{\text{۱ - جم ا + جم ب - جم (ا + ب)}}{\text{۱ + جم ا - جم ب - جم (ا + ب)}} = \text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{مم}\,\frac{\text{ب}}{۲}$

۱۱۔ $\frac{\text{جم ا}}{\text{۱ ± جب ا}} = \text{مس}\left(۴۵^\circ \pm \frac{\text{ا}}{۲}\right)$

۱۲۔ $\frac{\text{قط ۸ا - ۱}}{\text{قط ۴ا - ۱}} = \frac{\text{مس ۸ا}}{\text{مس ۲ا}}$

۱۳۔ $\frac{\text{۱ + مس}^{۲}\,(۴۵^\circ - \text{ا})}{\text{۱ - مس}^{۲}\,(۴۵^\circ - \text{ا})} = \text{قم ۲ا}$

۱۴۔ $\frac{\text{جب عہ + جب بہ}}{\text{جب عہ - جب بہ}} = \frac{\text{مس}\,\frac{\text{عہ + بہ}}{۲}}{\text{مس}\,\frac{\text{عہ - بہ}}{۲}}$

۱۵۔ $\frac{\text{جب}^{۲}\text{ا - جب}^{۲}\text{ب}}{\text{جب ا جم ا - جب ب جم ب}} = \text{مس (ا + ب)}$

۱۶۔ $\text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \text{طہ}\right) - \text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} - \text{طہ}\right) = \text{۲ مس ۲ طہ}$

۱۷۔ $\frac{\text{جم ا + جب ا}}{\text{جم ا - جب ا}} - \frac{\text{جم ا - جب ا}}{\text{جم ا + جب ا}} = \text{۲ مس ۲ا}$

۱۸۔ مم (ا + ۴۵°) ۔ مس (ا ۔ ۴۵°) = $\frac{\text{۴ جم ۲ ا}}{\text{۱ + ۲ جب ۲ ا}}$

۱۹۔ $\frac{\text{جب طہ + جب ۲ طہ}}{\text{۱ + جم طہ + جم ۲ طہ}}$ = مس طہ　　۲۰۔ $\frac{\text{۱ + جب طہ ۔ جم طہ}}{\text{۱ + جب طہ + جم طہ}}$ = مس $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$

۲۱۔ $\frac{\text{جب (ن + ۱) ا ۔ جب (ن ۔ ۱) ا}}{\text{جم (ن + ۱) ا + ۲ جم ن ا + جم (ن ۔ ۱) ا}}$ = مس $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

۲۲۔ $\frac{\text{جب (ن + ۱) ا + ۲ جب ن ا + جب (ن ۔ ۱) ا}}{\text{جم (ن ۔ ۱) ا ۔ جم (ن + ۱) ا}}$ = مم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

۲۳۔ جب (۲ ن + ۱) ا جب ا = جب^{۲} (ن + ۱) ا ۔ جب^{۲} ن ا

۲۴۔ $\frac{\text{جب (ا + ۳ ب) + جب (۳ ا + ب)}}{\text{جب ۲ ا + جب ۲ ب}}$ = ۲ جم (ا + ب)

۲۵۔ جب ۳ ا + جب ۲ ا ۔ جب ا = ۴ جب ا جم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ جم $\frac{\text{۳ ا}}{\text{۲}}$

۲۶۔ مس ۲ ا = (قط ۲ ا + ۱) $\sqrt{\text{قط}^{۲}\text{ ا ۔ ۱}}$

۲۷۔ جم^{۳} ۲ + ۳ جم ۲ طہ = ۴ (جم^{۶} طہ ۔ جب^{۶} طہ)

۲۸۔ ۱ + جم^{۲} ۲ طہ = ۲ (جم^{۴} طہ + جب^{۴} طہ)

۲۹۔ قط^{۲} ا (۱ + قط ۲ ا) = ۲ قط ۲ ا

۳۰۔ قم ا ۔ ۲ مم ا جم ا = ۲ جب ا

۳۱۔ مم ا = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (مم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ ۔ مس $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$)

۳۲۔ جب عہ جب (۶۰° ۔ عہ) جب (۶۰° + عہ) = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ جب ۳ عہ

۳۳۔ جم عہ جم (۶۰° ۔ عہ) جم (۶۰° + عہ) = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ جم ۳ عہ

۳۴۔ مم عہ + مم (۶۰° + عہ) ۔ مم (۶۰° ۔ عہ) = ۳ مم ۳ عہ

۳۵۔ جم ۲۰° جم ۴۰° جم ۶۰° جم ۸۰° = $\frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}$

۳۶- $\text{جب } ۲۰^\circ \text{ جب } ۴۰^\circ \text{ جب } ۶۰^\circ \text{ جب } ۸۰^\circ = \frac{۳}{۱۶}$

۳۷- $\text{جم } ۴ \text{ عہ} = ۱ - ۸ \text{ جم}^۲ \text{ عہ} + ۸ \text{ جم}^۴ \text{ عہ}$

۳۸- $\text{جب } ۴ \text{ ا} = ۴ \text{ جب ا جم}^۳ \text{ ا} - ۴ \text{ جم ا جب}^۳ \text{ ا}$

۳۹- $\text{جم } ۶ \text{ عہ} = ۳۲ \text{ جم}^۶ \text{ عہ} - ۴۸ \text{ جم}^۴ \text{ عہ} + ۱۸ \text{ جم}^۲ \text{ عہ} - ۱$

۴۰- $\text{مس } ۳ \text{ ا مس } ۲ \text{ ا مس ا} = \text{مس } ۳ \text{ ا} - \text{مس } ۲ \text{ ا} - \text{مس ا}$

۴۱- $\frac{۲ \text{ جم } ۲^{\text{ن}} \text{ طہ} + ۱}{۲ \text{ جم طہ} + ۱} = (۲ \text{ جم طہ} - ۱)(۲ \text{ جم } ۲ \text{ طہ} - ۱)(۲ \text{ جم } ۲^۲ \text{ طہ} - ۱) \ldots\ldots\ldots (۲ \text{ جم } ۲^{\text{ن}-۱} \text{ طہ} - ۱)$

کسری زاویے

۱۰۹- چونکہ دفعہ ۱۰۵ کے تعلقات ا کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہیں اس لیے اگر ہم ا کی بجائے $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور اس لیے ۲ ا کی بجائے $۲ \times \frac{\text{ا}}{۲}$ یعنی ا رکھدیں تو بھی وہ درست رہینگے۔

اس طرح سے ہمیں ذیل کے ربط حاصل ہونگے۔

$$\text{جب ا} = ۲ \text{ جب } \frac{\text{ا}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{ا}}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{جم ا} = \text{جم}^۲ \frac{\text{ا}}{۲} - \text{جب}^۲ \frac{\text{ا}}{۲}$$

$$= ۲ \text{ جم}^۲ \frac{\text{ا}}{۲} - ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب}^۲ \frac{\text{ا}}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور $$\text{مس ا} = \frac{۲ \text{ مس } \frac{\text{ا}}{۲}}{۱ - \text{مس}^۲ \frac{\text{ا}}{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۱) سے نیز ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\,\text{ا} = \frac{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$ شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو

$\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}$ پر تقسیم کرنے سے

اسی طرح سے $$\text{جم}\,\text{ا} = \frac{\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} - \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{۱ - \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

۱۱۰۔ زاویہ $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جم ا کی رقوم میں بیان کرو۔

دفعہ گزشتہ کی مساوات (۲) کے مطابق

$$\text{جم}\,\text{ا} = ۱ - ۲\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

یعنی $$۲\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} = ۱ - \text{جم}\,\text{ا}$$

اور اس لیے $$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ - \text{جم}\,\text{ا}}{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

نیز $$\text{جم}\,\text{ا} = ۲\,\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} - ۱$$

یعنی $$۲\,\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} = ۱ + \text{جم}\,\text{ا}$$

اور اس لیے $$\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ + \text{جم}\,\text{ا}}{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس لیے $$\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱ - \text{جم}\,\text{ا}}{۱ + \text{جم}\,\text{ا}}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

۱۱۱۔ مندرجۂ بالا ضابطوں میں سے ہر ایک میں ایک مشتبہ علامت ہے، کسی خاص صورت میں مناسب علامت اس طرح معلوم ہو سکتی ہے، دیکھو امثلہ ذیل۔

مثال ۱۔ معلوم ہے جم ۴۵° $= \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ جب $\frac{۱}{۲}$ ۲۲° اور جم $\frac{۱}{۲}$ ۲۲° کی قیمتیں دریافت کرو۔

اگر دفعہ گذشتہ کی مساوات (۱) میں ا برابر ۴۵° رکھیں تو حاصل ہوگا

$$\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\ ۲۲^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱-\text{جم}\ ۴۵^\circ}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۲}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}} = \pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

اب جب $\frac{۱}{۲}$ ۲۲° لازماً مثبت ہے اس لیے اوپر کی مثبت علامت لینی چاہیے۔

اس لیے　جب $\frac{۱}{۲}$ ۲۲° $= \frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$

اسی طرح سے　$$\text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\ ۲۲^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱+\text{جم}\ ۴۵^\circ}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}}$$

$$= \pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$$

نیز　جم $\frac{۱}{۲}$ ۲۲° مثبت ہے۔

$$\therefore\ \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\ ۲۲^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

مثال ۲۔ اگر جم ۳۳۰° $= \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ تو جب ۱۶۵° اور جم ۱۶۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

مساوات (۱) سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\ ۱۶۵^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱-\text{جم}\ ۳۳۰^\circ}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۸}} = \pm\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲\sqrt{۲}}$$

نیز $\text{جم } ۱۶۵^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱ + \text{جم } ۳۳۰^\circ}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۸}} = \pm\frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲}}$$

اب زاویہ ۱۶۵°، ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہے یعنی بموجب دفعہ ۵۲ اس کی جیب مثبت ہے اور جیب التمام منفی۔

اس لیے $\text{جب } ۱۶۵^\circ = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}$

اور $\text{جم } ۱۶۵^\circ = -\frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲}}$

اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ جب زاویہ ا اور اس کی جیب التمام دونوں معلوم ہوں تو زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتیں بغیر مشتبہ علامت کے معلوم ہو سکتی ہیں۔

لیکن جب صرف جم ا معلوم ہو تو جب $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ا}{۲}$ کو دریافت کرنے میں ہمیشہ مشتبہ علامات واقع ہونگی، اس اشتباہ کی وجہ دفعہ ذیل میں مندرج ہے۔

۱۱۲۔ جب ہم جم $\frac{ا}{۲}$ اور جب $\frac{ا}{۲}$ کو جم ا کی رقوم میں دریافت کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

$$\text{جم ا} = \text{جم } (۲\text{ن}\pi \pm \text{ا}) = \text{ک} \quad (\text{فرض کرو})$$

اس لیے ظاہر ہے کہ جس ضابطے سے ہم کو جم $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے $\frac{۲\text{ن}\pi \pm \text{ا}}{۲}$ کی جیب التمام بھی حاصل ہوگی۔

اب $\text{جم } \frac{۲\text{ن}\pi \pm \text{ا}}{۲} = \text{جم } \left(\text{ن}\pi \pm \frac{\text{ا}}{۲}\right)$

$$= \text{جم ن}\pi \text{ جم } \frac{\text{ا}}{۲} \mp \text{جب ن}\pi \text{ جب } \frac{\text{ا}}{۲}$$

= جم ن π جم $\frac{ا}{۲}$ = ± جم $\frac{ا}{۲}$

جہاں مثبت علامت لینی چاہیے اگر ن جفت ہو اور منفی اگر ن طاق ہو۔

اسی طرح جس ضابطے سے ہم کو جب $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی صورت سے ضرور ہے کہ $\frac{۲ن \pi ± ا}{۲}$ کی جیب بھی حاصل ہو۔

نیز　جب $\frac{۲ن \pi ± ا}{۲}$ = جب (ن π ± $\frac{ا}{۲}$)

= جب ن π جم $\frac{ا}{۲}$ ± جم ن π جب $\frac{ا}{۲}$

= ± جم ن π جب $\frac{ا}{۲}$ = ± جب $\frac{ا}{۲}$

پس معلوم ہوا کہ ہر ایک صورت میں ہمیں جم $\frac{ا}{۲}$ اور جب $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتیں ملنی چاہئیں اور یہی تعداد دفعہ ۱۱۰ کے ضابطوں سے حاصل ہوتی ہے۔

[طالب علم اس دفعہ کی ہندسی توضیح زاویوں $\frac{۲ن \pi ± ا}{۲}$ یعنی نπ ± $\frac{ا}{۲}$ کو شکل میں کھینچنے سے کرسکتا ہے، ان زاویوں کو احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہونگے ان میں سے دو مقام خط ابتدائی کی مثبت سمت سے زاویے $\frac{ا}{۲}$ اور $-\frac{ا}{۲}$ بنائینگے اور دو مقام خط ابتدائی کی منفی سمت سے زاویے $\frac{ا}{۲}$ اور $-\frac{ا}{۲}$ بنائینگے، شکل سے ظاہر ہوگا کہ جم $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتیں ہیں اور ایسے ہی جب $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتیں ہیں۔]

۱۱۳۔ زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جب ا کی رقوم میں بیان کرنا۔

دفعہ ۱۰۹ کی مساوات (۱) سے

۲ جب $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ا}{۲}$ = جب ا .... (۱)

نیز　جب^{۲} $\frac{ا}{۲}$ + جم^{۲} $\frac{ا}{۲}$ = ا .... (۲)

پہلے ان مساواتوں کو جمع کرو اور پھر (۱) کو (۲) سے تفریق کرو، تو

حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}^{۲}\frac{ا}{۲} + ۲\,\text{جب}\frac{ا}{۲}\,\text{جم}\frac{ا}{۲} + \text{جم}^{۲}\frac{ا}{۲} = ۱ + \text{جب}\,ا$$

اور
$$\text{جب}^{۲}\frac{ا}{۲} - ۲\,\text{جب}\frac{ا}{۲}\,\text{جم}\frac{ا}{۲} + \text{جم}^{۲}\frac{ا}{۲} = ۱ - \text{جب}\,ا$$

یعنی
$$\left(\text{جب}\frac{ا}{۲} + \text{جم}\frac{ا}{۲}\right)^{۲} = ۱ + \text{جب}\,ا$$

اور
$$\left(\text{جب}\frac{ا}{۲} - \text{جم}\frac{ا}{۲}\right)^{۲} = ۱ - \text{جب}\,ا$$

پس
$$\text{جب}\frac{ا}{۲} + \text{جم}\frac{ا}{۲} = \pm\sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور
$$\text{جب}\frac{ا}{۲} - \text{جم}\frac{ا}{۲} = \pm\sqrt{۱ - \text{جب}\,ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) کو جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

$$۲\,\text{جب}\frac{ا}{۲} = \pm\sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} \pm \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا} \quad \ldots (۵)$$

اور
$$۲\,\text{جم}\frac{ا}{۲} = \pm\sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} \mp \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا} \quad \ldots\ldots (۶)$$

زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی باقی مثلثی نسبتیں بآسانی حاصل ہو سکتی ہیں۔

۱۱۴۔ ضوابط (۵) اور (۶) میں دو مشتبہ علامات ہیں۔ امثلہ ذیل سے معلوم ہوگا کہ کسی خاص صورت میں یہ اشتباہ کس طرح دور ہو سکتا ہے۔

مثال ۱۔ جب ۳۰° کی قیمت $\frac{۱}{۲}$ معلوم ہے، جب ۱۵° اور جم ۱۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

اگر ا = ۳۰° تو مساواتوں (۳) اور (۴) سے حاصل ہوگا۔

جب ۱۵° + جم ۱۵° = ± $\sqrt{۱ + \text{جب } ۳۰°}$ = ± $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$

جب ۱۵° ـ جم ۱۵° = ± $\sqrt{۱ - \text{جب } ۳۰°}$ = ± $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

اب چونکہ جب ۱۵° اور جم ۱۵° دونوں مثبت ہیں اور جم ۱۵° بہ نسبت جب ۱۵° کے بڑا ہے اس لیے جملات جب ۱۵° + جم ۱۵° اور جب ۱۵° ـ جم ۱۵° بالترتیب مثبت اور منفی ہیں، اس لیے معلوم ہوا کہ

جب ۱۵° + جم ۱۵° = + $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$

اور　جب ۱۵° ـ جم ۱۵° = ـ $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

اس لیے　جب ۱۵° = $\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}$

اور　جم ۱۵° = $\frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲}}$

مثال ۲۔ اگر جب ۵۷۰° = ـ $\frac{۱}{۲}$ تو جب ۲۸۵° اور جم ۲۸۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا = ۵۷۰° تو حاصل ہوگا

جب ۲۸۵° + جم ۲۸۵° = ± $\sqrt{۱ + \text{جب } ۵۷۰°}$ = ± $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

اور　جب ۲۸۵° ـ جم ۲۸۵° = ± $\sqrt{۱ - \text{جب } ۵۷۰°}$ = ± $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

شکل سے معلوم ہوگا کہ جب ۲۸۵° منفی ہے اور جم ۲۸۵° مثبت ہے نیز زاویہ ۲۸۵° کی جیب تعداداً جیب التمام سے بڑی ہے۔

اس لیے جملہ جب ۲۸۵° + جم ۲۸۵° منفی ہے اور جب ۲۸۵° ـ جم ۲۸۵° بھی منفی ہے۔

∴ جب ۲۸۵° + جم ۲۸۵° = ـ $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$۔

اور جب ۲۸۵° ۔ جم ۲۸۵° = $-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$

اس لیے جب ۲۸۵° = $-\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲\sqrt{۲}}$

اور جم ۲۸۵° = $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲\sqrt{۲}}$

۱۱۵۔ جب ہم جم $\frac{۱}{۲}$ اور جب $\frac{۱}{۲}$ کو جب ا کی رقوم میں بیان کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

جب $\{$ن π + (−۱)^{ن} ا$\}$ = جب ا = ک (فرض کرو)......... (دفعہ ۸۲)

اس سے ظاہر ہے کہ جس ضابطے سے ہم کو جب $\frac{۱}{۲}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے $\frac{ن\pi + (-۱)^{ن} ۱}{۲}$ کی جیب کی قیمت بھی حاصل ہوگی۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے اور ۲م کے برابر ہے تو

جب $\frac{ن\pi + (-۱)^{ن}۱}{۲}$ = جب (م π + $\frac{۱}{۲}$)

= جب م π جم $\frac{۱}{۲}$ + جم م π جب $\frac{۱}{۲}$ = جم م π جب $\frac{۱}{۲}$

= ± جب $\frac{۱}{۲}$

جہاں علامت مثبت لینی چاہیے جبکہ م جفت ہو اور منفی جبکہ طاق ہو۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ ع + ۱

تب

جب $\frac{ن\pi + (-۱)^{ن}۱}{۲}$ = جب $\frac{۲ع\pi + \pi - ۱}{۲}$

$$= \text{جب}\left\{ \text{ع}\,\pi + \frac{\pi - \text{ا}}{۲} \right\}$$

$$= \text{جب ع}\,\pi\ \text{جم}\,\frac{\pi - \text{ا}}{۲} + \text{جم ع}\,\pi\ \text{جب}\,\frac{\pi - \text{ا}}{۲}$$

$$= \text{جم ع}\,\pi\ \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \pm\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

اس میں علامت مثبت لینی چاہیے جبکہ ع جفت ہو اور منفی جبکہ ع طاق ہو۔
پس معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہم کو جب $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی قیمت جب ا کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے علاوہ اس کے

$$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\text{،}\ \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}\text{،}\ -\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}\text{۔}$$

کی قیمتیں یعنی کل چار قیمتیں حاصل ہونی چاہییں۔ اور ضوابط دفعہ ۱۱۳ میں مشتبہ علامات کے تمام مختلف اجتماع لینے سے قیمتوں کی یہی تعداد حاصل ہوتی ہے۔
اسی قسم کے عمل سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ کو جب ا کی رقوم میں دریافت کیا جائے تو چار قیمتیں حاصل ہونگی۔

[اگر ایک ہندسی شکل میں زاویے $\frac{\text{ن}\,\pi + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{ا}}{۲}$ یعنی ن $\frac{\pi}{۲} + (-۱)^{\text{ن}}\,\frac{\text{ا}}{۲}$ اُس صورت میں کھینچے جائیں جہاں $\frac{\text{ا}}{۲}$ زاویہ قائمہ سے کم ہو تو معلوم ہوگا کہ احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہیں ان میں سے دو رُبع اول میں خط ابتدائی سے زاویے $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲} - \frac{\text{ا}}{۲}$ بناتے ہیں اور دو ربع سوم میں خط ابتدائی کی منفی سمت سے زاویے $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲} - \frac{\text{ا}}{۲}$ بناتے ہیں شکل سے ظاہر ہوگا کہ ہمیں چار قیمتیں جب $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی اور چار قیمتیں جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی حاصل ہونی چاہییں اور زاویہ $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی باقی قیمتوں کی بھی یہی کیفیت ہے۔]

۱۱۶۔ کسی صورت عامہ میں ہم دفعہ ۱۱۳ کے روابط (۳) اور (۴) کی مشتبہ علامات اس طرح دور کر سکتے ہیں۔

$$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} \right)$$

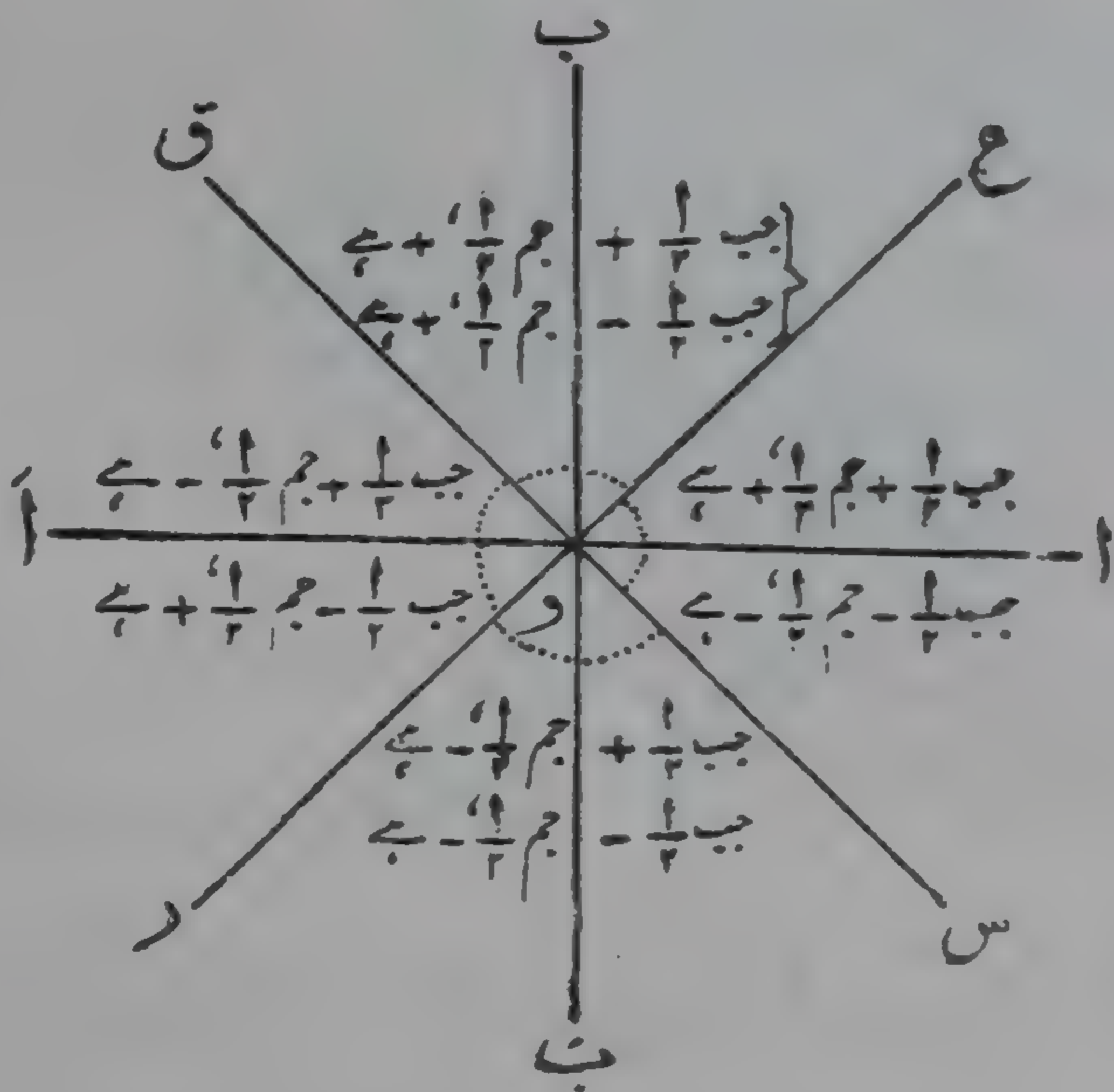
$= \sqrt{2}\,[$ جب $\frac{\text{ا}}{2}$ جم $\frac{\pi}{4}$ + جم $\frac{\text{ا}}{2}$ جب $\frac{\pi}{4}]$

$= \sqrt{2}$ جب $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ا}}{2}\right)$

اور $\sqrt{2}$ جب $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ا}}{2}\right)$ مثبت ہوگا اگر $\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ا}}{2}$،
$2n\pi$ اور $2n\pi + \pi$ کے درمیان واقع ہو۔

یعنی اگر $\frac{\text{ا}}{2}$، $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ اور $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو۔
اس لیے جملہ جب $\frac{\text{ا}}{2}$ + جم $\frac{\text{ا}}{2}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\frac{\text{ا}}{2}$،
$2n\pi - \frac{\pi}{4}$ اور $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو ورنہ یہ منفی ہوگا۔
اور اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب $\frac{\text{ا}}{2}$ − جم $\frac{\text{ا}}{2}$ $= \sqrt{2}$ جب $\left(\frac{\text{ا}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

اس لیے جب $\frac{\text{ا}}{2}$ − جم $\frac{\text{ا}}{2}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\left(\frac{\text{ا}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$،
$2n\pi$ اور $2n\pi + \pi$ کے درمیان واقع ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{\text{ا}}{2}$، $2n\pi + \frac{\pi}{4}$
اور $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو ورنہ یہ منفی ہوگا۔
اس دفعہ کے نتائج کی توضیح ترسیمی طور پر شکل ذیل میں کی گئی ہے۔

د ا خطِ ابتدائی ہے اور خطوط د ع، د ق، د ر، د س بالترتیب ربع اول، دوم، سوم، چہارم کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

عددی مثال۔ اگر ۲ جب $\frac{۱}{۲}$ = ۔ $\sqrt{۱ + \text{جب ا}}$ ۔ $\sqrt{۱ - \text{جب ا}}$ تو دریافت کرو کہ زاویہ $\frac{۱}{۲}$ کو کن حدود کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

اس صورت میں دفعہ ۱۱۳ کے ضابطے لازمًا یہ ہونے چاہییں۔

جب $\frac{۱}{۲}$ + جم $\frac{۱}{۲}$ = ۔ $\sqrt{۱ + \text{جب ا}}$ .... (۱)

جب $\frac{۱}{۲}$ ۔ جم $\frac{۱}{۲}$ = ۔ $\sqrt{۱ - \text{جب ا}}$ .... (۲)

کیونکہ ان دونوں ضابطوں کو جمع کرنے سے ضابطہ معلومہ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (۱) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جو خط زاویہ $\frac{۱}{۲}$ کا احاطہ کرتا ہے اس کو خطوط د ق اور د ر کے درمیان یا د ر اور د س کے درمیان واقع ہونا چاہیے اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ خطِ دائر کو خطوط د ر اور د س یا د س اور د ع کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

اور یہ دونوں شرائط پوری ہوتی ہیں جب خطِ دائر د ر اور د س کے درمیان واقع ہو یعنی جب زاویہ $\frac{۱}{۲}$،

۲ ن π ۔ $\frac{۳\pi}{۴}$ اور ۲ ن π ۔ $\frac{\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو۔

۱۱۷۔ زاویہ $\frac{۱}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو مس ا کی رقوم میں بیان کرو۔

مساوات (۳) دفعہ ۱۰۹ سے

$$\text{مس ا} = \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{۱}{۲}}{۱ - \text{مس}^۲\,\frac{۱}{۲}}$$

$$\therefore\quad ۱ - \text{مس}^۲\,\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\,\frac{۱}{۲}$$

یعنی $\text{مس}^۲ \frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = ۱$

طرفین پر $\frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}}$ زیادہ کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{مس}^۲ \frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}} = ۱ + \frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}} = \frac{۱ + \text{مس}^۲\,\text{ا}}{\text{مس}^۲\,\text{ا}}$$

$$\therefore \quad \text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۱}{\text{مس ا}} = \pm \frac{\sqrt{۱ + \text{مس}^۲\,\text{ا}}}{\text{مس ا}}$$

$$\therefore \quad \text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\pm\sqrt{۱ + \text{مس}^۲\,\text{ا}} - ۱}{\text{مس ا}} \quad \dots\dots\dots\dots (۱)$$

۱۱۸۔ مساوات (۱) کی مشتبہ علامت صرف اُس صورت میں دُور ہو سکتی ہے جب ہمیں ا کی مقدار کے متعلق کچھ معلوم ہو۔

مثال۔ اگر مس $۱۵^\circ = ۲ - \sqrt{۳}$ تو مس $۷\frac{۱}{۲}^\circ$ دریافت کرو۔

دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) فرض کرو کہ ا = ۱۵°

$$\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^\circ = \frac{\pm\sqrt{۱ + (۲ - \sqrt{۳})^۲} - ۱}{۲ - \sqrt{۳}}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{۸ - ۴\sqrt{۳}} - ۱}{۲ - \sqrt{۳}} \quad \dots\dots\dots\dots (۱)$$

اب چونکہ مس $۷\frac{۱}{۲}^\circ$ مثبت ہے اس لیے ہمیں اوپر کی علامت لینی چاہیے۔

$$\text{اس لیے} \quad \text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^\circ = \frac{+(\sqrt{۶} - \sqrt{۲}) - ۱}{۲ - \sqrt{۳}}$$

$$= (\sqrt{۶} - \sqrt{۲} - ۱)(۲ + \sqrt{۳})$$

$$= \sqrt{۶} - \sqrt{۳} + \sqrt{۲} - ۲ = (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۲} - ۱)$$

چونکہ مس ۱۵° = مس ۱۹۵° اس لیے جس مساوات سے ہم کو مس $\frac{۱۵^\circ}{۲}$ کی قیمت مس ۱۵° کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی مساوات سے ہم کو مس $\frac{۱۹۵^\circ}{۲}$

کی قیمت مس ۱۹۵° کی رقوم میں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے۔ دراصل جو قیمت مساوات (۱) میں علامت جذر کے ماقبل منفی علامت لینے سے حاصل ہوتی ہے وہ مس $\frac{195°}{2}$ کی قیمت ہے۔

لہٰذا مس $\frac{195°}{2} = \frac{-\sqrt{8-4\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$

$= \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{2-\sqrt{3}} = (-\sqrt{6}+\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{3})$

$= -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

اس لیے　　مس $97\frac{1}{2}°$ = - مم $7\frac{1}{2}°$

$= -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

۱۱۹۔ اس امر کی تحقیق کرو کہ جب ہم مس $\frac{1}{2}$ا کو مس ا کی رقوم میں دریافت کرتے ہیں تو جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے؟

دفعہ ۸۴ سے ہم کو معلوم ہے کہ اگر ن کوئی عدد صحیح ہو تو

مس (ن π + ا) = مس ا = ک (فرض کرو)

اس سے معلوم ہوا کہ جس مساوات سے ہم کو مس $\frac{1}{2}$ا کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی مساوات سے

مس $\frac{\text{ن}\pi+\text{ا}}{2}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیے۔

صورت اول ۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے اور ۲م کے برابر ہے۔

تب　　مس $\frac{\text{ن}\pi+\text{ا}}{2}$ = مس $\frac{2\text{م}\pi+\text{ا}}{2}$ = مس (م π + $\frac{1}{2}$ا)

= مس $\frac{1}{2}$ا بموجب دفعہ (۸۴)

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ع + ۱

تب مس $\frac{\text{ن} \pi + \text{ا}}{2}$ = مس $\frac{(2\text{ع} + 1)\pi + \text{ا}}{2}$

= مس (ع π + $\frac{\pi + \text{ا}}{2}$) = مس $\frac{\pi + \text{ا}}{2}$ (دفعہ ۴۸)

= ۔ مم $\frac{\text{ا}}{2}$ (دفعہ ۷۰)

اس سے معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہم کو مس $\frac{\text{ا}}{2}$ کی قیمت حاصل ہوگی اسی ضابطے سے ۔ مم $\frac{\text{ا}}{2}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیے۔

اس کی توضیح دفعہ گذشتہ کی ایک مثال میں ہو چکی ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸

۱۔ اگر جب طہ = $\frac{1}{2}$ اور جب فہ = $\frac{1}{3}$ تو جب (طہ + فہ) اور جب (۲ طہ + ۲ فہ) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۔ کسی زاویہ کا ماس ۴ء۲ ہے، اس کا قاطع التمام، اس کے نصف زاویہ کا قاطع التمام اور اس کے دوچند زاویہ کے تکملہ کا قاطع التمام دریافت کرو۔

۳۔ اگر جم عہ = $\frac{11}{61}$ اور جب بہ = $\frac{4}{5}$ تو جب^2 $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{2}$ اور جم^2 $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{2}$ کی قیمتیں دریافت کرو، دونوں زاویے عہ اور بہ مثبت اور حادے ہیں۔

۴۔ اگر جم عہ = $\frac{3}{5}$ اور جم بہ = $\frac{4}{5}$ تو جم $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{2}$ کی قیمت دریافت کرو۔ دونوں زاویے عہ اور بہ مثبت اور حادے ہیں۔

۵۔ معلوم ہے قط طہ = $\frac{1}{4}$ ۱، دریافت کرو مس $\frac{\text{طہ}}{2}$ اور مس طہ، ترسیمی عمل سے اس کی تصدیق کرو۔

۶۔ اگر جم ا = ۲۸ء تو مس $\frac{\text{ا}}{2}$ کی قیمت دریافت کرو اور جواب میں مشتبہ علامت کی وجہ بیان کرو۔

۷۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو، (۱) جب $\frac{1}{2}$ ۷°، (۲) جم $\frac{1}{2}$ ۷°، (۳) مس $\frac{1}{2}$ ۲۲°، (۴) مس $\frac{1}{4}$ ۱۱°

۸۔ اگر جب طہ + جب فہ = ا اور جم طہ + جم فہ = ب تو مس $\frac{\text{طہ} - \text{فہ}}{2}$ کی

قیمت دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ

۹۔ (جم عہ + جم بہ)^۲ + (جب عہ - جب بہ)^۲ = ۴ جم^۲ [(عہ + بہ)/۲]

۱۰۔ (جم عہ + جم بہ)^۲ + (جب عہ + جب بہ)^۲ = ۴ جم^۲ [(عہ - بہ)/۲]

۱۱۔ (جم عہ - جم بہ)^۲ + (جب عہ - جب بہ)^۲ = ۴ جب^۲ [(عہ - بہ)/۲]

۱۲۔ جب ا = ۲ مس ½ا / (۱ + مس^۲ ½ا)

۱۳۔ جم ا = (۱ - مس^۲ ½ا) / (۱ + مس^۲ ½ا)

۱۴۔ قط (π/۴ + طہ) قط (π/۴ - طہ) = ۲ قط ۲ طہ

۱۵۔ مس (۴۵° + ½ا) = √((۱ + جب ا)/(۱ - جب ا)) = قط ا + مس ا

۱۶۔ جب^۲ (π/۸ + ½ا) - جب^۲ (π/۸ - ½ا) = (۱/√۲) جب ا

۱۷۔ جم^۲ عہ + جم^۲ (عہ + ۱۲۰°) + جم^۲ (عہ - ۱۲۰°) = ۳/۲

۱۸۔ جم^۴ π/۸ + جم^۴ ۳π/۸ + جم^۴ ۵π/۸ + جم^۴ ۷π/۸ = ۳/۲

۱۹۔ جب^۴ π/۸ + جب^۴ ۳π/۸ + جب^۴ ۵π/۸ + جب^۴ ۷π/۸ = ۳/۲

۲۰۔ جم ۲طہ جم ۲فہ + جب^۲ (طہ - فہ) - جب^۲ (طہ + فہ) = جم (۲طہ + ۲فہ)

۲۱۔ مس (۴ا + مس ۲ا) (۱ - مس^۲ ۳ا مس^۲ ا) = ۲ مس ۳ا قط^۲ ا

۲۲۔ (۱ + مس عہ/۲ - قط عہ/۲) (۱ + مس عہ/۲ + قط عہ/۲) = جب عہ قط^۲ عہ/۲

ذیل کی تین صورتوں میں علامات جذر کے ماقبل جو مناسب علامات جبریہ لکھی جانی چاہییں انھیں دریافت کرو۔

۲۳۔ ۲ جم ½ا = ± √(۱ - جب ا) ± √(۱ + جب ا) جہاں ½ا = ۲۷۸°

۲۴۔ $2\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} = \pm\sqrt{1-\text{جب ا}} \pm \sqrt{1+\text{جب ا}}$ جہاں $\frac{\text{ا}}{2} = \frac{19\pi}{11}$

۲۵۔ $2\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{2} = \pm\sqrt{1-\text{جب ا}} \pm \sqrt{1+\text{جب ا}}$ جہاں $\frac{\text{ا}}{2} = -140^\circ$

۲۶۔ اگر ا = ۳۴۰° تو ثابت کرو کہ

$$2\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} = -\sqrt{1+\text{جب ا}} + \sqrt{1\ \text{جب ا}}$$

اور $$2\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{2} = -\sqrt{1+\text{جب ا}} - \sqrt{1-\text{جب ا}}$$

۲۷۔ اگر ا = ۴۶۰° تو ثابت کرو کہ

$$2\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{2} = -\sqrt{1+\text{جب ا}} + \sqrt{1-\text{جب ا}}$$

۲۸۔ اگر ا = ۵۸۰° تو ثابت کرو کہ

$$2\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} = -\sqrt{1+\text{جب ا}} - \sqrt{1-\text{جب ا}}$$

۲۹۔ کن حدود کے درمیان $\frac{\text{ا}}{2}$ کو واقع ہونا چاہیے کہ

(۱) $2\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} = \sqrt{1+\text{جب ا}} + \sqrt{1-\text{جب ا}}$

(۲) $2\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} = -\sqrt{1+\text{جب ا}} + \sqrt{1-\text{جب ا}}$

(۳) $2\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} = +\sqrt{1+\text{جب ا}} - \sqrt{1-\text{جب ا}}$

اور (۴) $2\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{2} = \sqrt{1+\text{جب ا}} - \sqrt{1-\text{جب ا}}$

۳۰۔ کن حدود کے درمیان $\frac{\text{ا}}{2}$ کو واقع ہونا چاہیے کہ ضابطہ

$$2\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{2} = \pm\sqrt{1+\text{جب ا}} \pm \sqrt{1-\text{جب ا}}$$

میں (۱) دونوں علامات مثبت لی جا سکیں

(۲) دونوں علامات منفی لی جا سکیں

(۳) پہلی علامت منفی ہو اور دوسری مثبت

۳۱ - اگر ن کوئی عدد صحیح ہو اور کوئی زاویہ، ۲ن π - $\frac{۳\pi}{۴}$ اور ۲ن π + $\frac{\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی جیب کی جبریہ قیمت جیب التمام سے کم ہوگی۔

۳۲ - اگر جب $\frac{ا}{۳}$ کی قیمت مساوات

جب ا = ۳ جب $\frac{ا}{۳}$ - ۴ جب^{۳} $\frac{ا}{۳}$

سے دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ اس کے علاوہ اسی مساوات سے ہم کو

جب $\frac{ا - \pi}{۳}$ اور - جب $\frac{ا + \pi}{۳}$

کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیے ۔ اسکی ایک ہندسی مثال بھی دو۔

۳۳ - اگر جم $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت مساوات

جم ا = ۴ جم^{۳} $\frac{ا}{۳}$ - ۳ جم $\frac{ا}{۳}$

سے دریافت کیجائے تو ثابت کرو کہ علاوہ اس کے اُسی مساوات سے ہم کو

جم $\frac{ا - ۲\pi}{۳}$ اور جم $\frac{ا + ۲\pi}{۳}$

کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیے ۔ اس کی ایک ہندسی مثال بھی دو۔

۱۲۰ - اس باب کے ضابطوں کے استعمال سے اب ہم چند مشہور زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں۔

زاویہ ۱۸° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ط = ۱۸° پس ۲ ط = ۳۶° اور ۳ ط = ۵۴°

نیز ۲ ط = ۹۰° - ۳ ط

اس لیے

جب ۲ ط = جب (۹۰° - ۳ ط) = جم ۳ ط

∴ ۲ جب طہ جم طہ = ۴ جم^۳ طہ - ۳ جم طہ (دفعات ۱۰۵ اور ۱۰۷)

اس سے معلوم ہوا کہ جم طہ = ۰ جس سے طہ = ۹۰°

یا ۲ جب طہ = ۴ جم^۲ طہ - ۳ = ۱ - ۴ جب^۲ طہ

∴ ۴ جب^۲ طہ + ۲ جب طہ = ۱

اس مساوات درجۂ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

جب طہ = (± √۵ - ۱) / ۴

مگر اس صورت میں جب طہ لازماً ایک مثبت مقدار ہے، اس لیے ہم کو مثبت علامت لینی چاہیے۔ پس

جب ۱۸° = (√۵ - ۱) / ۴

اور جم ۱۸° = √(۱ - جب^۲ ۱۸°) = √(۱ - (۶ - ۲√۵) / ۱۶)

= √((۱۰ + ۲√۵) / ۱۶) = √(۱۰ + ۲√۵) / ۴

اب زاویہ ۱۸° کی باقی مثلثی نسبتیں بآسانی معلوم ہوسکتی ہیں۔

چونکہ زاویہ ۱۸° کا متمم ۷۲° ہے اس لیے زاویہ ۷۲° کی مثلثی نسبتیں دفعہ ۶۹ کی اعانت سے بآسانی معلوم ہوسکتی ہیں۔

۱۲۱۔ زاویہ ۳۶° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو۔

چونکہ جم ۲ طہ = ۱ - ۲ جب^۲ طہ (دفعہ ۱۰۵)

∴ جم ۳۶° = ۱ - ۲ جب^۲ ۱۸° = ۱ - ۲ ((۶ - ۲√۵) / ۱۶)

= ۱ - (۳ - √۵) / ۴

پس جم ۳۶° = (۱ + √۵) / ۴

اس لیے　جب ۳۶° = $\sqrt{1 - \text{جم}^2 36°} = \sqrt{1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}$

اب زاویہ ۳۶° کی باقی مثلثی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں
نیز چونکہ زاویہ ۳۶° کا متمم ۵۴° ہے اس لیے ۵۴° کی مثلثی نسبتیں بھی دفعہ ۲۹ کی مدد سے بآسانی معلوم ہو سکتی ہیں۔

۱۲۲- جب ۱۸° اور جم ۳۶° کی قیمتیں ہندسی طریق سے بھی اس طرح حاصل ہو سکتی ہیں۔

بموجب اقلیدس م ۴ ش ۱۰ ایک مثلث ا ب ج بناؤ جس کے زاویوں ب اور ج میں سے ہر ایک زاویہ $\angle$ ا کا دو چند ہو۔ تب

۱۸۰° = ا + ب + ج = ا + ۲ ا + ۲ ا

اس لیے　ا = ۳۶°

پس اگر ب ج پر عمود ا د نکالا جائے

تو　$\angle$ ب ا د = ۱۸°

اب اقلیدس کے ش سے ہم جانتے ہیں کہ ب ج برابر ا لا کے ہے جہاں لا ایسا نقطہ ا ب پر ہے کہ

ا ب × ب لا = (ا لا)^2

فرض کرو کہ ا ب = ما اور ا لا = لا

اوپر کے رابطے سے حاصل ہوگا۔

ما (ما - لا) = لا^2

یعنی　لا^2 + ما لا = ما^2

یعنی　لا = $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ما

اس لیے　جب ۱۸° = جب ب ا د = $\frac{\text{ب د}}{\text{ب ا}} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ب ا}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

نیز بموجب اقلیدس م ۹ ش ۱۰ ا لا اور لا ج باہم مساوی ہیں۔
اس لیے اگر ا ج پر عمود لا ل نکالا جائے تو ا ج کی تنصیف نقطہ ل پر ہوگی۔
اس لیے

$$\text{جم}\ ۳۶^\circ = \frac{\text{ال}}{\text{الا}} = \frac{\text{ا}}{۲} \div \text{لا} = \frac{۱}{\sqrt{۵} - ۱}$$

$$= \frac{\sqrt{۵} + ۱}{(\sqrt{۵} + ۱)(\sqrt{۵} - ۱)} = \frac{\sqrt{۵} + ۱}{۴}$$

۱۲۳ ۔ زاویہ ۹° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو۔

چونکہ جب ۹° اور جم ۹° دونوں مثبت ہیں اس لیے ربط (۳) دفعہ ۱۱۳ سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\ ۹^\circ + \text{جم}\ ۹^\circ = \sqrt{۱ + \text{جب}\ ۱۸^\circ}$$

$$= \sqrt{۱ + \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳ + \sqrt{۵}}}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

نیز چونکہ جم ۹° مقدار میں جب ۹° سے بڑا ہے (دفعہ ۵۳) اس لیے جملہ جب ۹° ـ جم ۹° منفی ہے لہٰذا ربط ۴ دفعہ ۱۱۳ سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\ ۹^\circ - \text{جم}\ ۹^\circ = -\sqrt{۱ - \text{جب}\ ۱۸^\circ}$$

$$= -\sqrt{۱ - \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}}$$

$$= -\frac{\sqrt{۵ - \sqrt{۵}}}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

$$\text{جب}\ ۹^\circ = \frac{\sqrt{۳ + \sqrt{۵}} - \sqrt{۵ - \sqrt{۵}}}{۴}$$

نیز (۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

جم ۹° = $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

اب زاویہ ۹° کے لیے باقی جملے دریافت ہو سکتے ہیں۔

نیز چونکہ ۸۱° زاویہ ۹° کا متمم ہے اس لیے دفعہ ۶۹ کی مدد سے ۸۱° کی مثلثی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۹

ثابت کرو کہ

۱۔ جب² ۷۲° ۔ جب² ۶۰° = $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

۲۔ جم² ۴۸° ۔ جب² ۱۲° = $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$

۳۔ جم ۱۲° + جم ۶۰° + جم ۸۴° = جم ۲۴° + جم ۴۸°، عمل ترسیمی سے اس کی تصدیق کرو۔

۴۔ جب $\frac{\pi}{5}$ جب $\frac{2\pi}{5}$ جب $\frac{3\pi}{5}$ جب $\frac{4\pi}{5}$ = $\frac{5}{16}$

۵۔ جب $\frac{\pi}{10}$ + جب $\frac{13\pi}{10}$ = $-\frac{1}{2}$

۶۔ جب $\frac{\pi}{10}$ جب $\frac{13\pi}{10}$ = $-\frac{1}{4}$

۷۔ مس ۶° مس ۴۲° مس ۶۶° مس ۷۸° = ۱

۸۔ جم $\frac{\pi}{15}$ جم $\frac{2\pi}{15}$ جم $\frac{3\pi}{15}$ جم $\frac{4\pi}{15}$ جم $\frac{5\pi}{15}$ جم $\frac{6\pi}{15}$ جم $\frac{7\pi}{15}$ = $\frac{1}{2^7}$

۹۔ ۱۶ جم $\frac{2\pi}{15}$ جم $\frac{4\pi}{15}$ جم $\frac{8\pi}{15}$ جم $\frac{14\pi}{15}$ = ۱

۱۰۔ ایک دائرہ کے دو متوازی وتر مرکز کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں اور اُن کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویے ۷۲° اور ۱۴۴° بالترتیب بنتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وتروں کے درمیان عمودی فاصلہ دائرہ کے نصف قطر کا نصف ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی دائرہ کا ایک وتر جس کے محاذی ۱۰۸° کا زاویہ مرکز پر بنتا ہے دو ایسے وتروں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جن کے مقابل مرکز پر زاویے ۳۶° اور ۶۰° بنتے ہیں۔

۱۲۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام اس کے مماس کے برابر ہو۔

۱۳۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

جب ۵ط جم ۳ط = جب ۹ط جم ۷ط

نواں باب

متماثلات اور مثلثی مساواتیں

۱۲۴۔ ضوابط دفعہ ۸۸ اور ۹۰ کی مدد سے دو سے زیادہ زاویوں کے حاصل جمع کی مثلثی نسبتیں حاصل ہو سکتی ہیں، مثلاً

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) جم ج + جم (ا + ب) جب ج

= [جب ا جم ب + جم ا جب ب] جم ج

+ [جم ا جم ب - جب ا جب ب] جب ج

= جب ا جم ب جم ج + جم ا جب ب جم ج

+ جم ا جم ب جب ج - جب ا جب ب جب ج

اسی طرح سے

جم (ا + ب + ج) = جم (ا + ب) جم ج - جب (ا + ب) جب ج

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جم ج

- (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جب ج

= جم ا جم ب جم ج - جم ا جب ب جب ج - جب ا جم ب جب ج

- جب ا جب ب جم ج

نیز مس (ا + ب + ج) = (مس (ا + ب) + مس ج) / (۱ - مس (ا + ب) مس ج)

$$= \frac{\dfrac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{۱} - \text{مس ا مس ب}} + \text{مس ج}}{\text{۱} - \dfrac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{۱} - \text{مس ا مس ب}} \times \text{مس ج}}$$

$$= \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب} + \text{مس ج} - \text{مس ا مس ب مس ج}}{\text{۱} - \text{مس ب مس ج} - \text{مس ج مس ا} - \text{مس ا مس ب}}$$

۱۲۵۔ دفعۂ گذشتہ کا آخری ضابطہ ایک ایسے مسئلہ عامہ کی خاص صورت ہے جس کی مدد سے زاویوں کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مماس خود اُن زاویوں کے مماسوں کی رقوم میں دریافت ہو سکتا ہے۔ مسئلہ مذکور یہ ہے

$$\text{مس}\left(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 \cdots\cdots + \text{ا}_n\right)$$

$$= \frac{\text{س}_1 - \text{س}_3 + \text{س}_5 - \text{س}_7 + \cdots\cdots}{\text{۱} - \text{س}_2 + \text{س}_4 - \text{س}_6 + \cdots\cdots} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{۱})$$

جہاں

س_1 = مس ا_1 + مس ا_2 + مس ا_3 + ... + مس ا_n

= مختلف زاویوں کے مماسوں کا مجموعہ

س_2 = مس ا_1 مس ا_2 + مس ا_1 مس ا_3 + ...

= دو دو مماسوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

س_3 = مس ا_1 مس ا_2 مس ا_3 + مس ا_1 مس ا_2 مس ا_4 + ...

= تین تین مماسوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

اور علیٰ ہذا القیاس

مان لو کہ ن زاویوں کے لیے ربط (۱) درست ہے۔ ایک اور زاویہ ا_{n+1} کا اضافہ کرو۔

تب مس $(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots\cdots \text{ا}_{n+1})$

= مس [(ا۱ + ا۲ + ا۳ + ... + ان) + ان+۱]

مس (ا۱ + ا۲ + ا۳ + ... + ان) + مس ان+۱
= ―――――――――――――――――――――――――――――
۱ - مس (ا۱ + ا۲ + ا۳ + ... + ان) × مس ان+۱

　　س۱ - س۳ + س۵ - س۷ + ...
　　――――――――――――――――― + مس ان+۱
　　۱ - س۲ + س۴ - ....
= ―――――――――――――――――――――――――――――
　　　　س۱ - س۳ + س۵ - س۷ + ...
۱ - ――――――――――――――――― مس ان+۱
　　　　۱ - س۲ + س۴ - ....

فرض کرو کہ مس ا۱، مس ا۲، مس ا۳ .... مس ان+۱ کو ہم بالترتیب

م۱، م۲، م۳ .... م ن+۱ سے تعبیر کرتے ہیں

تب　　مس (ا۱ + ا۲ + ا۳ + ... + ان+۱)

(س۱ - س۳ + س۵ - ....) + م ن+۱ (۱ - س۲ + س۴ - ....)
= ―――――――――――――――――――――――――――――
(۱ - س۲ + س۴ - ....) - (س۱ - س۳ + س۵ - ....) م ن+۱

(س۱ - م ن+۱) - (س۳ + س۲ م ن+۱) + (س۵ + س۴ م ن+۱) + ...
= ―――――――――――――――――――――――――――――
۱ - (س۲ + س۱ م ن+۱) + (س۴ + س۳ م ن+۱) - (س۶ + س۵ م ن+۱) - ...

لیکن س۱ + م ن+۱ = (م۱ + م۲ + م۳ + ... + م ن) + م ن+۱

= (ن + ۱) مماسوں کا مجموعہ

س۲ + س۱ م ن+۱ = (م۱ م۲ + م۲ م۳ + ...) + (م۱ + م۲ + م۳ + ...) م ن+۱

= (ن + ۱) مماسوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

س۳ + س۲ م ن+۱ = (م۱ م۲ م۳ + م۲ م۳ م۴ + ...) + (م۱ م۲ + م۲ م۳ + ...) × م ن+۱

= (ن + ۱) مماسوں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے معلوم ہوا کہ (ن + ۱) زاویوں کے لیے بھی وہی قانون درست ہے ۔

جو ن زاویوں کے لیے ہے۔

اس لیے اگر مسئلہ ن زاویوں کے لیے صحیح ہو تو یہ (ن + ۱) زاویوں کے لیے بھی صحیح ہوتا ہے۔

لیکن بموجب دفعات ۹۸ الا ۱۲۴ یہ دو اور تین زاویوں کے لیے صحیح ہے۔

اس لیے یہ چار زاویوں کے لیے صحیح ہے، اس لیے پانچ زاویوں کے لیے، .... اس لیے ثابت ہوا کہ یہ بالعموم صحیح ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر کل زاویے تعداد میں ن ہوں اور ان میں سے ہر ایک طہ کے برابر ہو تو

$$\text{س}_1 = \text{ن} \times \text{مس طہ}،\quad \text{س}_2 = \text{ن}\text{ج}_2 \text{ مس}^2 \text{طہ}،\quad \text{س}_3 = \text{ن}\text{ج}_3 \text{ مس}^3 \text{طہ}، \ldots$$

مثال۔ مس ۴ طہ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{یہاں مس ۴ طہ} = \frac{\text{س}_1 - \text{س}_3}{1 - \text{س}_2 + \text{س}_4}$$

$$= \frac{4 \text{ مس طہ} - {}_4\text{ج}_3 \text{ مس}^3 \text{طہ}}{1 - {}_4\text{ج}_2 \text{ مس}^2 \text{طہ} + {}_4\text{ج}_4 \text{ مس}^4 \text{طہ}}$$

$$= \frac{4 \text{ مس طہ} - 4 \text{ مس}^3 \text{طہ}}{1 - 6 \text{ مس}^2 \text{طہ} + \text{مس}^4 \text{طہ}}$$

مثال۔ ثابت کرو کہ $\text{مس ۵ طہ} = \dfrac{5 \text{ مس طہ} - 10 \text{ مس}^3 \text{طہ} + \text{مس}^5 \text{طہ}}{1 - 10 \text{ مس}^2 \text{طہ} + 5 \text{ مس}^4 \text{طہ}}$

۱۲۶۔ دفعہ گذشتہ کے طریقہ کے مماثل طریقہ سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جب}\,(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots\cdots + \text{ا}_\text{ن})$$

$$= \text{جم ا}_1 \text{ جم ا}_2 \text{ جم ا}_3 \cdots\cdots \text{جم ا}_\text{ن} (\text{س}_1 - \text{س}_3 + \text{س}_5 - \cdots\cdots)$$

اور

$$\text{جم}\,(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots\cdots + \text{ا}_\text{ن})$$

$$= \text{جم ا}_1 \text{ جم ا}_2 \text{ جم ا}_3 \cdots\cdots \text{جم ا}_\text{ن} (1 - \text{س}_2 + \text{س}_4 - \cdots\cdots)$$

جہاں س_1، س_2، س_3، ..... کی وہی قیمتیں ہیں جو دفعہ گذشتہ میں بیان ہوئیں۔

۱۲۷۔ مثلث کے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی روابط۔

جب تین زاویے ا، ب، ج ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ ۱۸۰° ہو تو انکی مثلثی نسبتوں کے کئی ایک باہمی تعلقات بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔ ثبوت کے طریقہ کی توضیح امثلہ ذیل سے ہوگی۔

مثال ۱۔ اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج = ۴ جب ا جب ب جب ج

اور جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج

= ۲ جب (ا + ب) جم (ا ـ ب) + ۲ جب ج جم ج

اب چونکہ ا + ب + ج = ۱۸۰°

اس لیے ا + ب = ۱۸۰° ـ ج

اور اس لیے جب (ا + ب) = جب ج

اور جم (ا + ب) = ـ جم ج .... (دفعہ ۷۰)

اس لیے جملہ = ۲ جب ج جم (ا ـ ب) + ۲ جب ج جم ج

= ۲ جب ج [جم (ا ـ ب) + جم ج]

= ۲ جب ج [جم (ا ـ ب) ـ جم (ا + ب)]

= ۲ جب ج × ۲ جب ا جب ب

= ۴ جب ا جب ب جب ج

مثال ۲۔ اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جم ا + جم ب ـ جم ج = ـ۱ + ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جب ج/۲

جملہ = جم ا + (جم ب ـ جم ج)

= ۲ جم^۲ ا/۲ ـ ۱ + ۲ جب (ب+ج)/۲ جب (ج ـ ب)/۲

اب $\text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^\circ - \text{ا}$

یعنی $\frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\text{ا}}{۲}$

اور اس لیے $\text{جب}\, \frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} = \text{جم}\, \frac{\text{ا}}{۲}$

اور $\text{جم}\, \frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} = \text{جب}\, \frac{\text{ا}}{۲}$

اس لیے جملہ $= ۲\, \text{جم}^۲ \frac{\text{ا}}{۲} - ۱ + ۲\, \text{جم}\, \frac{\text{ا}}{۲}\, \text{جب}\, \frac{\text{ج} - \text{ب}}{۲}$

$$= ۲\, \text{جم}\, \frac{\text{ا}}{۲} \left[\text{جم}\, \frac{\text{ا}}{۲} + \text{جب}\, \frac{\text{ج} - \text{ب}}{۲} \right] - ۱$$

$$= ۲\, \text{جم}\, \frac{\text{ا}}{۲} \left[\text{جب}\, \frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} + \text{جب}\, \frac{\text{ج} - \text{ب}}{۲} \right] - ۱$$

$$= ۲\, \text{جم}\, \frac{\text{ا}}{۲} \times ۲\, \text{جب}\, \frac{\text{ج}}{۲}\, \text{جم}\, \frac{\text{ب}}{۲} - ۱$$

$$= -۱ + ۴\, \text{جم}\, \frac{\text{ا}}{۲}\, \text{جم}\, \frac{\text{ب}}{۲}\, \text{جب}\, \frac{\text{ج}}{۲}$$

مثال ۳۔ اگر $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^\circ$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^۲ \text{ا} + \text{جب}^۲ \text{ب} + \text{جب}^۲ \text{ج} = ۲ + ۲\, \text{جم ا جم ب جم ج}$$

فرض کرو کہ $\text{س} = \text{جب}^۲ \text{ا} + \text{جب}^۲ \text{ب} + \text{جب}^۲ \text{ج}$

تب $۲\, \text{س} = ۲\, \text{جب}^۲ \text{ا} + ۱ - \text{جم}\, ۲\text{ب} + ۱ - \text{جم}\, ۲\text{ج}$

$$= ۲\, \text{جب}^۲ \text{ا} + ۲ - ۲\, \text{جم}\, (\text{ب} + \text{ج})\, \text{جم}\, (\text{ب} - \text{ج})$$

$$= ۲ - ۲\, \text{جم}^۲ \text{ا} + ۲ - ۲\, \text{جم}\, (\text{ب} + \text{ج})\, \text{جم}\, (\text{ب} - \text{ج})$$

اس لیے $\text{س} = ۲ + \text{جم ا} \left[\text{جم}\, (\text{ب} - \text{ج}) + \text{جم}\, (\text{ب} + \text{ج}) \right]$

چونکہ $\text{جم ا} = \text{جم} \left[۱۸۰^\circ - (\text{ب} + \text{ج}) \right] = -\text{جم}\, (\text{ب} + \text{ج})$

$\therefore \text{س} = ۲ + \text{جم ا} \times ۲\, \text{جم ب جم ج}$

$$= ۲ + ۲\, \text{جم ا جم ب جم ج}$$

مثال ۴۔ اگر $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^\circ$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ا} + \text{مس ب} + \text{مس ج} = \text{مس ا مس ب مس ج}$$

بموجب دفعہ ۱۲۴ ضابطہ ۳ -

$$\text{مس (ا + ب - ج)} = \frac{\text{مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج}}{\text{۱ - (مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب)}}$$

لیکن　　مس (ا + ب + ج) = مس ۱۸۰° = ۰

اس لیے　　مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج = ۰

یعنی　　مس ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

اس کو براہ راست اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

مس (ا + ب) = مس (۱۸۰° - ج) = - مس ج

$$\therefore \frac{\text{مس ا + مس ب}}{\text{۱ - مس ا مس ب}} = \text{- مس ج}$$

∴ مس ا + مس ب = - مس ج + مس ا مس ب مس ج

یعنی　　مس ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

مثال ۵ - اگر لا + ما + ی = لا ما ی تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{۲ لا}}{\text{۱ - لا}^2} + \frac{\text{۲ ما}}{\text{۱ - ما}^2} + \frac{\text{۲ ی}}{\text{۱ - ی}^2} = \frac{\text{۲ لا}}{\text{۱ - لا}^2} \times \frac{\text{۲ ما}}{\text{۱ - ما}^2} \times \frac{\text{۲ ی}}{\text{۱ - ی}^2}$$

فرض کرو کہ لا = مس ا، ما = مس ب اور ی = مس ج تو حاصل ہوگا۔

مس ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

$$\therefore \frac{\text{مس ا + مس ب}}{\text{۱ - مس ا مس ب}} = \text{- مس ج}$$

یعنی　　مس (ا + ب) = مس (π - ج) .... دفعہ ۲۷

اس لیے　　ا + ب + ج = ن π + π

$$\therefore \frac{\text{۲ لا}}{\text{۱ - لا}^2} + \frac{\text{۲ ما}}{\text{۱ - ما}^2} + \frac{\text{۲ ی}}{\text{۱ - ی}^2} = \frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ - مس}^2\text{ ا}} + \frac{\text{۲ مس ب}}{\text{۱ - مس}^2\text{ ب}} + \frac{\text{۲ مس ج}}{\text{۱ - مس}^2\text{ ج}}$$

= مس ۲ ا + مس ۲ ب + مس ۲ ج = مس ۲ ا مس ۲ ب مس ۲ ج

(اسی قسم کے ثبوت سے جو گذشتہ مثال میں ہوا)۔

= ۲ل/(۱-ل²) × ۲م/(۱-م²) × ۲ی/(۱-ی²)

امثلہ نمبری ۲۰

اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

۱۔ جب ۲ا + جب ۲ب - جب ۲ج = ۴ جم ا جم ب جب ج

۲۔ جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲ج = -۱-۴ جم ا جم ب جم ج

۳۔ جم ۲ا + جم ۲ب - جم ۲ج = ۱-۴ جب ا جب ب جم ج

۴۔ جب ا + جب ب + جب ج = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم ج/۲

۵۔ جب ا + جب ب - جب ج = ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جم ج/۲

۶۔ جم ا + جم ب + جم ج = ۱ + ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۷۔ جب² ا + جب² ب - جب² ج = ۲ جب ا جب ب جم ج

۸۔ جم² ا + جم² ب + جم² ج = ۱-۲ جم ا جم ب جم ج

۹۔ جم² ا + جم² ب - جم² ج = ۱-۲ جب ا جب ب جم ج

۱۰۔ جب² ا/۲ + جب² ب/۲ + جب² ج/۲ = ۱-۲ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۱۱۔ جب² ا/۲ + جب² ب/۲ - جب² ج/۲ = ۱-۲ جم ا/۲ جم ب/۲ جب ج/۲

۱۲۔ مس ا/۲ مس ب/۲ + مس ب/۲ مس ج/۲ + مس ج/۲ مس ا/۲ = ۱

۱۳۔ مم ا/۲ + مم ب/۲ + مم ج/۲ = مم ا/۲ مم ب/۲ مم ج/۲

۱۴۔ مم ب مم ج + مم ج مم ا + مم ا مم ب = ۱

۱۵- جب (ب + ۲ ج) + جب (ج + ۲ ا) + جب (ا + ۲ ب)
= ۴ جب (ب - ج)/۲ جب (ج - ا)/۲ جب (ا - ب)/۲

۱۶- جب ا/۲ + جب ب/۲ + جب ج/۲ - ۱ = ۴ جب (π - ا)/۴ جب (π - ب)/۴ جب (π - ج)/۴

۱۷- جم ا/۲ + جم ب/۲ - جم ج/۲ = ۴ جم (π + ا)/۴ جم (π + ب)/۴ جم (π - ج)/۴

۱۸- (جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج)/(جب ا + جب ب + جب ج) = ۸ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۱۹- جب (ب + ج - ا) + جب (ج + ا - ب) + جب (ا + ب - ج)
= ۴ جب ا جب ب جب ج

اگر ا + ب + ج = ۲ س تو ثابت کرو کہ

۲۰- جب (س - ا) جب (س - ب) + جب س جب (س - ج) = جب ا جب ب

۲۱- ۴ جب س جب (س - ا) جب (س - ب) جب (س - ج)
= ۱ - جم² ا - جم² ب - جم² ج + ۲ جم ا جم ب جم ج

۲۲- جب (س - ا) + جب (س - ب) + جب (س - ج) - جب س
= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۲۳- جم² س + جم² (س - ا) + جم² (س - ب) + جم² (س - ج)
= ۲ + ۲ جم ا جم ب جم ج

۲۴- جم² ا + جم² ب + جم² ج + ۲ جم ا جم ب جم ج
= ۱ + ۴ جم س جم (س - ا) جم (س - ب) جم (س - ج)

۲۵- اگر عہ + بہ + جہ + لہ = ۲ π تو ثابت کرو کہ

(۱) جم عہ + جم بہ + جم جہ + جم لہ + ۴ جم (عہ + بہ)/۲ جم (عہ + جہ)/۲ جم (عہ + لہ)/۲ = ۰

(۲) جب عہ - جب بہ + جب جہ - جب لہ + ۴ جم (عہ + بہ)/۲ جب (عہ + جہ)/۲ جم (عہ + لہ)/۲ = ۰

اور (۳) مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس لہ

= مس عہ مس بہ مس جہ مس لہ (مم عہ + مم بہ + مم جہ + مم لہ)

۲۶ ۔ اگر چار زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہو تو ثابت کرو کہ ان کی جیوب التمام میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ان کی جیوب میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔

۲۷ ۔ اگر عہ + بہ + جہ = ۰ تو ثابت کرو کہ

جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ

= ۲ (جب عہ + جب بہ + جب جہ) (۱ + جم عہ + جم بہ + جم جہ)

۲۸ ۔ اسکی تصدیق کرو کہ

جب³ ا جب (ب - ج) + جب³ ب جب (ج - ا) + جب³ ج جب (ا - ب)

+ جب (ا + ب + ج) جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب) = ۰

اگر ا، ب، ج، د کوئی زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۹ ۔ جب ا جب ب جب (ا - ب) + جب ب جب ج جب (ب - ج)

+ جب ج جب ا جب (ج - ا) + جب (ا - ب) جب (ب - ج) جب (ج - ا) = ۰

۳۰ ۔ جب (ا - ب) جم (ا + ب) + جب (ب - ج) جم (ب + ج)

+ جب (ج - د) جم (ج + د) + جب (د - ا) جم (د + ا) = ۰

۳۱ ۔ جب (ا + ب - ۲ ج) جم ب - جب (ا + ج - ۲ ب) جم ج

= جب (ب - ج) {جم (ب + ج - ا) + جم (ج + ا - ب) + جم (ا + ب - ج)}

۳۲ ۔ جب (ا + ب + ج + د) + جب (ا + ب - ج - د) + جب (ا + ب - ج + د)

+ جب (ا + ب + ج - د) = ۴ جب (ا + ب) جم ج جم د

۳۳ ۔ اگر کوئی مسئلہ ا، ب، ج کی ایسی قیمتوں کے لیے درست ہو جو مساوات

ا + ب + ج = ۱۸۰°

کو پورا کرے تو ثابت کرو کہ مسئلہ مذکورہ ا، ب، ج کی جگہ مقادیر ذیل کو مندرج کرنے سے بھی درست رہیگا۔

(۱) ۹۰° - ا/۲ ، ۹۰° - ب/۲ اور ۹۰° - ج/۲

(۲) ۱۸۰° - ۲ ا ، ۱۸۰° - ۲ ب اور ۱۸۰° - ۲ ج

اس طرح مثال ۱۶ کو مثال ۶ سے اور مثال ۱۷ کو مثال ۵ سے مستنبط کرو۔
اگر لا + ما + ی = لا ما ی تو ثابت کرو کہ

۳۴۔ $\frac{۳ لا - لا^۳}{۱ - ۳ لا^۲} + \frac{۳ ما - ما^۳}{۱ - ۳ ما^۲} + \frac{۳ ی - ی^۳}{۱ - ۳ ی^۲}$

$= \frac{۳ لا - لا^۳}{۱ - ۳ لا^۲} \times \frac{۳ ما - ما^۳}{۱ - ۳ ما^۲} \times \frac{۳ ی - ی^۳}{۱ - ۳ ی^۲}$

اور ۳۵۔ لا (۱ - $ما^۲$) (۱ - $ی^۲$) + ما (۱ - $ی^۲$) (۱ - $لا^۲$) + ی (۱ - $لا^۲$) (۱ - $ما^۲$) = ۴ لا ما ی

۱۲۸۔ زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کی مدد سے خاص قسم کی مثلثی مساواتیں حل ہو سکتی ہیں۔

مثال۔ مساوات ذیل کو حل کرو :۔

جب لا + جب ۵ لا = جب ۳ لا

بموجب ضابطہ دفعہ ۹۴ یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

۲ جب ۳ لا جم ۲ لا = جب ۳ لا

∴ جب ۳ لا = ۰ یا ۲ جم ۲ لا = ۱

اگر جب ۳ لا = ۰ تو ۳ لا = ن π

اگر جم ۲ لا = $\frac{۱}{۲}$ تو ۲ لا = ۲ ن π ± $\frac{π}{۳}$

اس لیے لا = $\frac{ن π}{۳}$ ، یا ن π ± $\frac{π}{۶}$

۱۲۹۔ جن مساواتوں کی صورت عامہ ا جم ط + ب جب ط = ج ہو، اُن کا عام حل دریافت کرو۔

طرفین مساوات کو $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ پر تقسیم کرو اور مساوات کو اس طرح لکھو۔

$\frac{ا}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ جم ط - $\frac{ب}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ جب ط = $\frac{ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$

مماسوں کی جدول سے اُس زاویے کی قیمت دریافت کرو جس کا مماس $\frac{ب}{ا}$ ہو

اور اس کو عہ سے تعبیر کرو۔

تب مس عہ = $\frac{ب}{ا}$ اور

جب عہ = $\frac{ب}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$ اور جم عہ = $\frac{ا}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$

مساوات بصورت ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے۔

جم عہ جم طہ + جب عہ جب طہ = $\frac{ج}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$

یعنی جم (طہ - عہ) = $\frac{ج}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$

اس کے بعد جدولوں سے یا کسی اور طرح سے زاویہ بہ دریافت کرو۔

جس کی جیب التمام $\frac{ج}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$ ہو یعنی جم بہ = $\frac{ج}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$

[یاد رہے کہ زاویہ بہ صرف اسی صورت میں معلوم ہو سکتا ہے

جبکہ ج $<$ $\sqrt{ا^2 + ب^2}$]

اس طرح سے مساوات مجوزہ جم (طہ - عہ) = جم بہ ہوگی

اور اس کا حل ہے طہ - عہ = ۲ ن π ± بہ

یعنی طہ = ۲ ن π + عہ ± بہ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

ایسے زاویے مثلاً عہ اور بہ جو مثلثی حسابات میں سہولت عمل کے لیے داخل کیے جاتے ہیں امدادی زاویے کہلاتے ہیں۔

۱۳۰۔ عمل ترسیمی سے اوپر کے حل کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے خط ابتدائی پر و م برابر ا کے ناپو اور و ا پر عمود م ع برابر ب کے قائم کرو، تب زاویہ م و ع کا مماس $\frac{ب}{ا}$ ہوگا اس زاویہ کو عہ سے تعبیر کرو۔

د کو مرکز مان کر اور د ع یعنی $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ نصف قطر کا ایک دائرہ بناؤ۔

اور خطِ ابتدائی پر د ن برابر ج کے لو۔

د ن پر عمود ق ن قَ کھینچو اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو نقاط ق اور قَ پر ملتا ہے اس لیے زاویے ن د ق اور ن د قَ دونوں جداگانہ به کے برابر ہیں۔

پس زاویہ ق د ع = عه ـ به اور قَ د ع = عه + به

اس لیے مساوات کے حل بالترتیب

۲ ن π + ق د ع اور ۲ ن π + قَ د ع ہونگے۔

صریحاً اوپر کا عمل ناممکن ہوگا اگر ج > $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ کیونکہ اس صورت میں نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہوگا۔

۱۳۱۔ بطور ایک عددی مثال کے ہم مساوات ذیل کو حل کرینگے۔

۵ جم طه ـ ۲ جب طه = ۲

معلوم ہے مس ۲۱° ۴۸′ = $\frac{۲}{۵}$

طرفین مساوات کو $\sqrt{۵^2 + ۲^2}$ یعنی $\sqrt{۲۹}$ پر تقسیم کرو تو حاصل ہوگا۔

$\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}$ جم طہ - $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$ جب طہ = $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$

اس لیے　جم طہ جم ۲۱° ۴۸′ - جب طہ جب ۲۱° ۴۸′

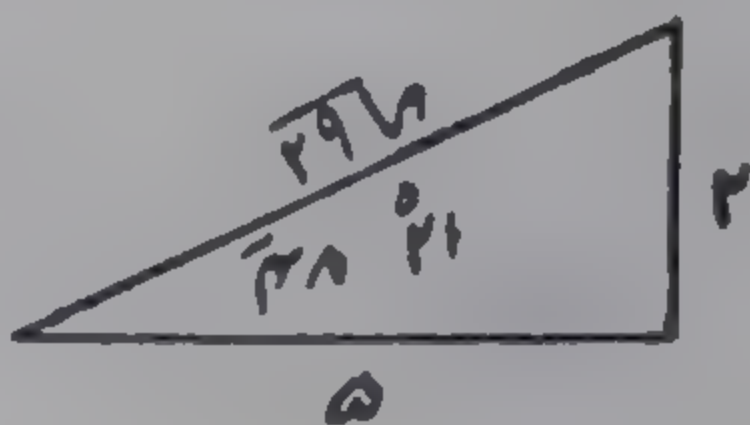
= جب ۲۱° ۴۸′ = جب (۹۰° - ۶۸° ۱۲′)

= جم ۶۸° ۱۲′

∴ جم (طہ + ۲۱° ۴۸′) = جم ۶۸° ۱۲′

اس لیے　طہ + ۲۱° ۴۸′ = ۲ن × ۱۸۰° ± ۶۸° ۱۲′　(دفعہ ۸۳)

∴ طہ = ۲ن × ۱۸۰° - ۲۱° ۴۸′ ± ۶۸° ۱۲′

= ۲ن × ۱۸۰° - ۹۰° یا ۲ن × ۱۸۰° + ۴۶° ۲۴′

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

متبادل ثبوت۔ مساوات دفعہ ۱۲۹ ایک اور طرح سے بھی حل ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ م = مس $\frac{طہ}{۲}$

پس　جب طہ = $\frac{۲ مس \frac{طہ}{۲}}{۱ + مس^۲ \frac{طہ}{۲}}$ = $\frac{۲م}{۱ + م^۲}$

اور　جم طہ = $\frac{۱ - مس^۲ \frac{طہ}{۲}}{۱ + مس^۲ \frac{طہ}{۲}}$ = $\frac{۱ - م^۲}{۱ + م^۲}$　(دفعہ ۱۰۹)

مساوات میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے اس کی صورت یہ ہوجائیگی۔

$$ا \frac{۱ - م^۲}{۱ + م^۲} + ب \frac{۲م}{۱ + م^۲} = ج$$

یعنی　م^۲ (ج + ا) - ۲ب م + ج - ا = ۰

یہ ایک مساوات درجۂ دوم ہے جس سے م کی دو قیمتیں یعنی مس $\frac{طہ}{۲}$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں مثلاً دفعہ ہذا کی مثال میں۔

۷م^۲ + ۴م - ۳ = ۰　　یعنی م = - ۱ یا $\frac{۳}{۷}$

= مس (- ۴۵°) یا مس ۴۳° ۲۳' ۱۲' (جدولوں سے)

اس لیے طہ/۲ = ن × ۱۸۰° - ۴۵° یا ن × ۱۸۰° + ۲۳° ۱۲'

یعنی طہ = ن × ۳۶۰ - ۹۰° یا ن × ۳۶۰ + ۴۶° ۲۴'

امثلہ نمبری ۲۱

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۔ جب طہ + جب ۷ طہ = جب ۴ طہ

۲۔ جم طہ + جم ۷ طہ = جم ۴ طہ

۳۔ جم طہ + جم ۳ طہ = ۲ جم ۲ طہ

۴۔ جب ۴ طہ - جب ۲ طہ = جم ۳ طہ

۵۔ جم طہ - جب ۳ طہ = جم ۲ طہ

۶۔ جب ۷ طہ = جب طہ + جب ۳ طہ

۷۔ جم طہ + جم ۲ طہ + جم ۳ طہ = ۰

۸۔ جب طہ + جب ۳ طہ + جب ۵ طہ = ۰

۹۔ جب ۲ طہ - جم ۲ طہ - جب طہ + جم طہ = ۰

۱۰۔ جب (۳ طہ + عہ) + جب (۳ طہ - عہ) + جب (عہ - طہ) - جب (عہ + طہ) = جم عہ

۱۱۔ جم (۳ طہ + عہ) جم (۳ طہ - عہ) + جم (۵ طہ + عہ) جم (۵ طہ - عہ) = جم ۲ عہ

۱۲۔ جم ن طہ = جم (ن - ۲) طہ + جب طہ

۱۳۔ جب (ن + ۱)/۲ طہ = جب (ن - ۱)/۲ طہ + جب طہ

۱۴۔ جب م طہ + جب ن طہ = ۰

۱۵۔ جم م طہ + جم ن طہ = ۰

۱۶۔ جب² ن طہ - جب² (ن - ۱) طہ = جب² طہ

۱۷۔ جب ۳ طہ + جم ۲ طہ = ۰

۱۸- √۳ جم طہ + جب طہ = √۲

۱۹- جب طہ + جم طہ = √۲

۲۰- √۳ جب طہ - جم طہ = √۲

۲۱- جب لا + جم لا = √۲ جم ا

۲۲- ۵ جب طہ + ۲ جم طہ = ۵ (معلوم ہے مس ۲۱° ۴۸′ = ء۴)

۲۳- ۶ جم لا + ۸ جب لا = ۹ (معلوم ہے مس ۵۳° ۸′ = ۱ $\frac{1}{3}$
اور جم ۲۵° ۵۰′ = ء۹)

۲۴- ۱+ جب² طہ = ۳ جب طہ جم طہ (معلوم ہے کہ مس ۷۱° ۳۴′ = ۳)

۲۵- قم طہ = مم طہ + √۳

۲۶- قم لا = ۱ + مم لا

۲۷- (۲ + √۳) جم طہ = ۱- جب طہ

۲۸- مس طہ + قط طہ = √۳

۲۹- جم ۲ طہ = جم² طہ

۳۰- ۴ جم طہ - ۳ قط طہ = مس طہ

۳۱- جم ۲ طہ + ۳ جم طہ = ۰

۳۲- جم ۳ طہ + ۲ جم طہ = ۰

۳۳- جم ۲ طہ = (۱ + √۲) (جم طہ - $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

۳۴- مم طہ - مس طہ = ۲

۳۵- ۴ مم ۲ طہ = مم² طہ - مس² طہ

۳۶- ۳ مس (طہ - ۱۵°) = مس (طہ + ۱۵°)

۳۷- مس طہ + مس ۲ طہ + مس ۳ طہ = ۰

۳۸- مس طہ + مس ۲ طہ + √۳ مس طہ مس ۲ طہ = √۳

۳۹- جب ۳ عہ = ۴ جب عہ جب (لا + عہ) جب (لا - عہ)

۴۰۔ ثابت کرو کہ اگر لا کو $\sqrt{۲}$ جب ۴۵°، ۲ جب ۱۸°، ۲ جب ۲۳۴° میں سے کسی ایک قیمت کے برابر رکھا جائے تو شرائط مساوات لا^۳ - ۲ لا + ۱ = ۰ ہر ایک صورت میں پوری ہونگی۔

۴۱۔ اگر جب (π جم طہ) = جم (π جب طہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\text{طہ} \pm \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

۴۲۔ اگر جب (π مم طہ) = جم (π مس طہ) تو ثابت کرو کہ قم^۲ طہ یا مم^۲ طہ مساوی ن + $\frac{۱}{۴}$ کے ہے، جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

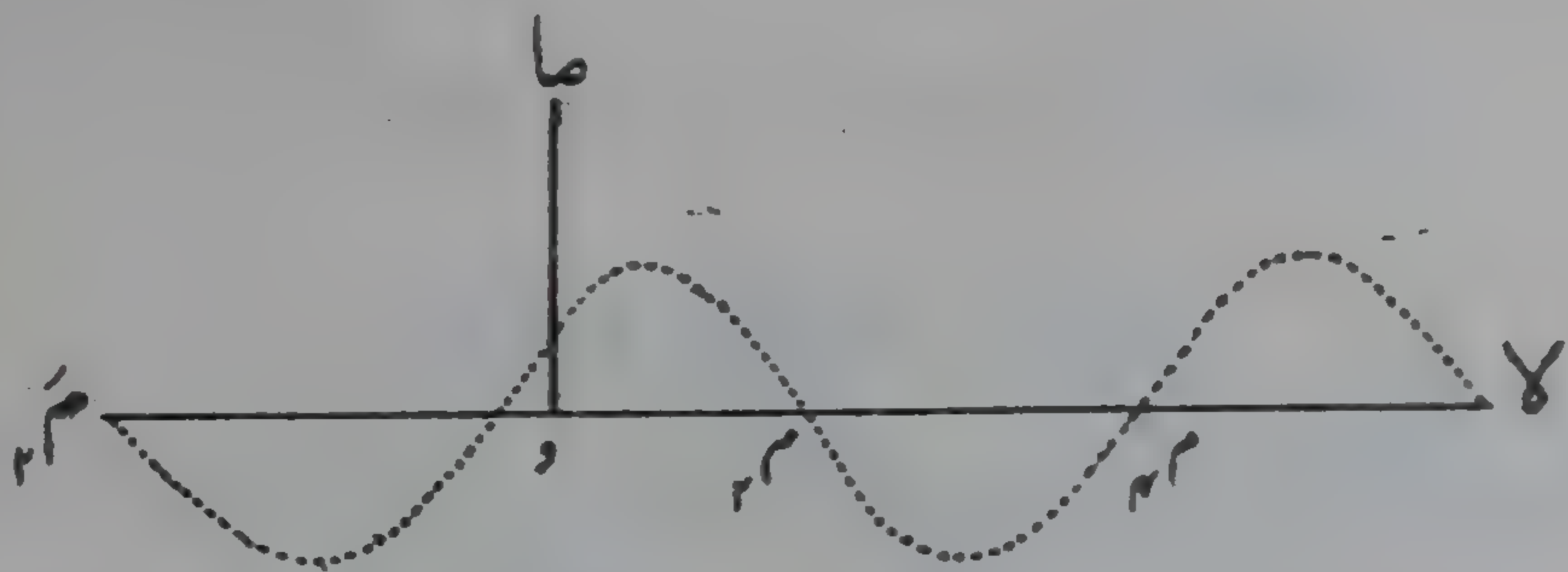
۱۳۲۔ **مثال**۔ اگر لا صفر سے ۲ π تک بڑھے تو جملہ جب لا + جم لا کے تغیرات کو مرتسم کرو۔

$$\text{جب لا + جم لا} = \sqrt{۲}\left[\frac{۱}{\sqrt{۲}}\text{ جب لا} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\text{ جم لا}\right]$$

$$= \sqrt{۲}\left[\text{جب لا جم } \frac{\pi}{۴} + \text{جم لا جب } \frac{\pi}{۴}\right] = \sqrt{۲}\text{ جب }\left(\text{لا} + \frac{\pi}{۴}\right)$$

اس طرح سے ہم کو قیمتوں کی جدول ذیل حاصل ہوگی

لا	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲ π
لا + $\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲ π	$\frac{۹\pi}{۴}$
جب (لا + $\frac{\pi}{۴}$)	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	۱	۰	۱-	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
$\sqrt{۲}$ جب (لا + $\frac{\pi}{۴}$)	۱	$\sqrt{۲}$	۰	$-\sqrt{۲}$	۰	۱

دفعہ ۶۲ کے عملِ تعبیر کے موافق جملہ مذکور کی ترسیم یہ ہوگی۔

۱۳۳۔ **مثال**۔ ا جم طہ + ب جب طہ کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{ا جم طہ + ب جب طہ} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\left[\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\text{ جم طہ} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\text{ جب طہ}\right]$$

فرض کرو کہ عہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ ایسا ہے کہ

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} \text{ اور جب عہ } = \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

$$\text{اس لیے جملہ مجوزہ} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\left[\text{جم طہ جم عہ + جب طہ جب عہ}\right]$$

$$= \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\text{ جم (طہ - عہ)}$$

جب زاویہ طہ کی قیمت عہ سے ۲ π + عہ تک بڑھتی ہے تو زاویہ طہ۔عہ صفر سے ۲ π تک بڑھتا ہے اور اس لیے جملہ کی مقدار اور علامت کے تغیرات بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

اب چونکہ مقدار جم (طہ - عہ) کی بڑی سے بڑی قیمت ایک ہے

(یعنی جب زاویہ طہ = عہ) اس لیے معلوم ہوا کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ ہے ۔

نیز ظاہر ہے کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت کے موافق طہ کی جو قیمت ہو اس کی جیب التمام $\frac{ا}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$ ہوگی ۔

امثلہ نمبری ۲۲

جب زاویہ طہ صفر سے ۲ π تک بڑھے تو جملات ذیل کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور ان کی ترسیمات ہر ایک صورت میں بناؤ ۔

۱۔ جب طہ ۔ جم طہ

۲ ۔ جب طہ + $\sqrt{3}$ جم طہ

[یاد رہے کہ جب طہ + $\sqrt{3}$ جم طہ = ۲ [$\frac{1}{2}$ جب طہ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جم طہ]

= ۲ جب (طہ + $\frac{\pi}{3}$)]

۳۔ جب طہ ۔ $\sqrt{3}$ جم طہ

۴۔ جم^2 طہ ۔ جب^2 طہ

۵ ۔ جب طہ جم طہ

۶۔ جب ۳ طہ

۷ ۔ مس ۳ طہ

۸ ۔ قط ۴ طہ

۹ ۔ $\frac{\text{جب طہ + جب ۲ طہ}}{\text{جم طہ + جم ۲ طہ}}$

۱۰۔ جب (π جب طہ)

۱۱ ۔ جم (π جب طہ)

۱۲ ۔ اگر زاویہ ۰° سے ۹۰° تک بڑھے تو جملہ $\frac{\text{جب ۳ طہ}}{\text{جم ۲ طہ}}$ کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو ۔

دسواں باب

لوکارتھم

۱۳۴- فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے

$$۱۰^{۲٫۴۰۳۱۲۰۵} = ۲۵۳ \quad ، \quad ۱۰^{۲٫۶۰۹۵۹۴۴} = ۴۰۷$$

اور

$$۱۰^{۵٫۰۱۲۷۱۴۹} = ۱۰۲۹۷۱$$

تو عملِ ضرب کی مدد کے بغیر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$۲۵۳ \times ۴۰۷ = ۱۰۲۹۷۱$$ کیونکہ

$$۲۵۳ \times ۴۰۷ = ۱۰^{۲٫۴۰۳۱۲۰۵} \times ۱۰^{۲٫۶۰۹۵۹۴۴}$$

$$= ۱۰^{۲٫۴۰۳۱۲۰۵ + ۲٫۶۰۹۵۹۴۴}$$

$$= ۱۰^{۵٫۰۱۲۷۱۴۹} = ۱۰۲۹۷۱$$

ظاہر ہے کہ اس جگہ عملِ ضرب عملِ جمع میں تبدیل ہو گیا ہے جو نسبتاً آسان ہے نیز فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$۱۰^{۴٫۹۰۰۴۰۵۵} = ۷۹۵۰۷$$

اور

$$۱۰^{۱٫۶۳۳۴۶۸۵} = ۴۳$$

ہم بآسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ ۷۹۵۰۷ کا جذرالکعب ۴۳ ہے

$$\text{کیونکہ}\ \sqrt[۲]{۷۹۵۰۷} = \left[۷۹۵۰۷\right]^{\frac{۱}{۲}} = \left(۱۰^{۳٫۹۰۰۴۰۵۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= ۱۰^{۳٫۹۰۰۴۰۵۵ \times \frac{۱}{۲}} = ۱۰^{۱٫۶۴۳۴۶۸۵} = ۴۴$$

اس صورت میں جذر نکالنے کا مشکل عمل تقسیم کے نسبتاً آسان عمل میں تبدیل ہوگیا ہے۔

۱۳۵۔ لوکارتم ۔ تعریف۔ اگر ا کوئی عدد ہو اور لا اور ن دو اور ایسے عدد ہوں کہ $ا^{لا} = ن$ تو لا کو ن کا لوکارتم اساس ا پر کہتے ہیں اور اس ربط کو اس طرح لکھتے ہیں لوک$_{ا}$ ن اس لیے کسی عدد کا لوکارتم کسی معلومہ اساس پر وہ قوت نما ہے کہ اساس کو اس قوت نما پر اٹھانے سے معلومہ عدد حاصل ہوجائے۔

امثلہ ۔ چونکہ $۱۰^{۲} = ۱۰۰$ اس لیے ۲ = لوک$_{۱۰}$ ۱۰۰

چونکہ $۱۰^{۵} = ۱۰۰۰۰۰$ اس لیے ۵ = لوک$_{۱۰}$ ۱۰۰۰۰۰

چونکہ $۲^{۴} = ۱۶$ اس لیے ۴ = لوک$_{۲}$ ۱۶

چونکہ $۸^{\frac{۲}{۳}} = \left[۸^{\frac{۱}{۳}}\right]^{۲} = ۲^{۲} = ۴$ اس لیے $\frac{۲}{۳}$ = لوک$_{۸}$ ۴

چونکہ $۹^{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۹^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{۳^{۳}} = \frac{۱}{۲۷}$ اس لیے

$-\frac{۳}{۲}$ = لوک$_{۹}$ $\left(\frac{۱}{۲۷}\right)$

یادداشت ۔ چونکہ $ا^{۰} = ۱$ اس لیے ایک کا لوکارتم کسی اساس پر ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

۱۳۶۔ اگر م اور ن کوئی حقیقی مقادیر جبریہ ہوں تو ان کے لیے قوانین ذیل جن کو قوت نماؤں کے قانون کہتے ہیں، ہمیشہ صادق آتے ہیں۔

(۱) $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$

(۲) $ا^{م} \div ا^{ن} = ا^{م-ن}$

$$(۳)\quad (و^{م})^{ن} = و^{م ن}$$

ان کے مطابق لوکارتموں کے تین بنیادی قوانین مندرجۂ ذیل ہیں۔

$$(۱)\quad لوک_{و}\,(م\,ن) = لوک_{و}\,م + لوک_{و}\,ن$$

$$(۲)\quad لوک_{و}\left(\frac{م}{ن}\right) = لوک_{و}\,م - لوک_{و}\,ن$$

$$(۳)\quad لوک_{و}\,م^{ن} = ن\,لوک_{و}\,م$$

ان کے ثبوت ذیل کی دفعات میں دیے گیے ہیں۔

۱۳۷۔ دو مقداروں کے حاصل ضرب کا لوکارتم اُن کے لوکارتموں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$لوک_{و}\,(م\,ن) = لوک_{و}\,م + لوک_{و}\,ن$$

فرض کرو کہ　　$لا = لوک_{و}\,م$ یعنی $و^{لا} = م$

اور　　$ما = لوک_{و}\,ن$ یعنی $و^{ما} = ن$

تب　　$م\,ن = و^{لا} \times و^{ما} = و^{لا + ما}$

$\therefore$　$لوک_{و}\,م\,ن = لا + ما$　　(دفعہ ۱۳۵ تعریف)

$= لوک_{و}\,م + لوک_{و}\,ن$

۱۳۸۔ دو مقداروں کے خارج قسمت کا لوکارتم اُن کے لوکارتموں کے حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$لوک_{و}\left(\frac{م}{ن}\right) = لوک_{و}\,م - لوک_{و}\,ن$$

فرض کرو کہ　　$لا = لوک_{و}\,م$ یعنی $و^{لا} = م$　　(دفعہ ۱۳۵ تعریف)

اور　　$ما = لوک_{و}\,ن$ یعنی $و^{ما} = ن$

تب　　$\frac{م}{ن} = و^{لا} \div و^{ما} = و^{لا - ما}$

$$\therefore\ \text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right) = \text{لا} - \text{ما}$$ (دفعہ ۱۳۵ تعریف)

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{م} - \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ن}$$

۱۳۹۔ ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو کسی خاص قوت پر اُٹھائی گئی ہو مساوی ہے اُس حاصل ضرب کے جو مقدار کے لوکارتم اور قوت نما کے باہم ضرب دینے سے حاصل ہو۔ یعنی

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{م}^{\text{ن}}\right) = \text{ن}\ \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{م}$$

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{م}$ یعنی $\text{و}^{\text{لا}} = \text{م}$

تب $\text{م}^{\text{ن}} = \left(\text{و}^{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{لان}}$

$$\therefore\ \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{م}^{\text{ن}}\right) = \text{ن لا}$$ (دفعہ ۱۳۵ تعریف)

$$= \text{ن}\ \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{م}$$

امثلہ $\text{لوک}\ ۴۸ = \text{لوک}\left(۲^{۴} \times ۳\right) = \text{لوک}\ ۲^{۴} + \text{لوک}\ ۳ = ۴\ \text{لوک}\ ۲ + \text{لوک}\ ۳$

$$\text{لوک}\ \frac{۶۳}{۴۸۴} = \text{لوک}\ \frac{۳^{۲} \times ۷}{۱۱^{۲} \times ۲^{۲}} = \text{لوک}\ ۷ + \text{لوک}\ ۳^{۲} - \text{لوک}\ ۲^{۲} - \text{لوک}\ ۱۱^{۲}$$

$$= \text{لوک}\ ۷ + ۲\ \text{لوک}\ ۳ - ۲\ \text{لوک}\ ۲ - ۲\ \text{لوک}\ ۱۱$$

$$\text{لوک}\ \sqrt[۵]{۱۳} = \text{لوک}\ ۱۳^{\frac{۱}{۵}} = \frac{۱}{۵}\ \text{لوک}\ ۱۳$$

۱۴۰۔ مروج لوکارتم۔ عملی حسابات میں جو لوکارتم مستعمل ہیں ان میں اساس ۱۰ مقرر ہے، پس اگر کوئی اساس بیان نہ کی جائے تو اساس ۱۰ کو ہمیشہ محذوف خیال کرنا چاہیے، اساس ۱۰ کے فوائد دفعات ذیل سے معلوم ہونگے۔

۱۴۱۔ ممیز اور اعشاریہ لوکارثمی ۔ تعریف ۔ اگر کسی عدد کے لوکارثم کا کچھ حصہ صحیح اور کچھ حصہ کسور ہو تو لوکارثم کے حصۂ صحیح کو ممیز اور حصہ اعشاریہ کو اعشاریہ لوکارثمی کہتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ لوک ۹۵۷ = ۲٫۹۰۰۳۶۷۱ تو عدد ۲ کو لوکارثم کا ممیز اور ۰٫۹۰۰۳۶۷۱ کو اعشاریہ لوکارثمی کہینگے۔

منفی ممیز۔ فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳، تب بموجب دفعہ ۱۳۸۔

لوک $\frac{1}{2}$ = لوک ۱۔ لوک ۲ = ۰۔ لوک ۲ = ۔ ۰٫۳۰۱۰۳،

جس سے معلوم ہوا کہ لوک $\frac{1}{2}$ منفی ہے۔

جیسا دفعہ ۱۴۳ سے معلوم ہوگا اس میں خاص سہولت ہے کہ لوکارثموں کے اعشاریوں کو ہمیشہ مثبت رکھا جائے۔

اس لیے بجائے ۔ ۰٫۳۰۱۰۳، کے ہم ۔[۱۔۰٫۶۹۸۹۷،] لکھتے ہیں

یعنی لوک $\frac{1}{2}$ = ۔ (۱۔۰٫۶۹۸۹۷،) = ۔۱ + ۰٫۶۹۸۹۷،

اختصاراً اس جملہ کو ۱̄٫۶۹۸۹۷، لکھتے ہیں۔

عدد ۱ کے اوپر خط افقی یہ ظاہر کرتا ہے کہ لوکارثم کا صحیح حصہ منفی ہے لیکن اعشاریہ لوکارثمی مثبت ہے۔

ایک اور مثال لو' ۳̄٫۴۷۱۲۱۳، قائم مقام ۔ ۳ + ۰٫۴۷۱۲۱۳، کا ہے۔

۱۴۲۔ کسی عدد کے لوکارثم کا ممیز صرف دیکھنے ہی سے معلوم ہوسکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ عدد ایک سے بڑا ہے۔

چونکہ　　۱ = ۱۰⁰　اس لیے لوک ۱ = ۰۔

چونکہ　　۱۰ = ۱۰¹　اس لیے لوک ۱۰ = ۱

چونکہ $۱۰^{۲} = ۱۰۰$ اس لیے لوک ۱۰۰ = ۲

اور علیٰ ہٰذا القیاس

اس لیے معلوم ہوا کہ جو عدد ۱ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا یعنی لوکارتم ایک کسر اعشاریہ ہوگا۔

اس لیے اس کا ممیز صفر ہوگا۔

ایسے ہی جو عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگا، یعنی اس کا ممیز ۱ ہوگا اسی طرح سے جو عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارتم ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اس کا ممیز ۲ ہوگا۔

ایسے ہی اگر عدد ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰ کے درمیان واقع ہو تو اس کا ممیز ۳ ہوگا۔

اور بالعموم کسی عدد کے لوکارتم کا ممیز اُن ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصّہ میں شامل ہوں بقدر ایک کے کم ہوگا۔

امثلہ۔ عدد ۲۹۶٫۳۴۵۷ کے صحیح حصہ میں ۳ ہندسے ہیں اس لیے اس کے لوکارتم کا ممیز ۲ ہے۔

۲۹۶۳۴٫۵۷ کے لوکارتم کا ممیز ۵-۱ یعنی ۴ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ عدد ایک سے کم ہے۔

چونکہ $۱۰^{۰} = ۱$ اس لیے لوک ۱ = ۰

" $۱۰^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} = ۰٫۱$ اس لیے لوک ۰٫۱ = -۱

" $۱۰^{-۲} = \frac{۱}{۱۰^{۲}} = ۰٫۰۱$ اس لیے لوک ۰٫۰۱ = -۲

" $۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = ۰٫۰۰۱$ اس لیے لوک ۰٫۰۰۱ = -۳

اور علیٰ ہٰذا القیاس

اس لیے معلوم ہوا کہ عدد ۱ اور ۱، کے درمیان واقع ہو تو اس کا لوکارثم صفر اور ۔۱ کے درمیان واقع ہوگا، پس لوکارثم مطلوب ۔۱+ ایک کسر اعشاریہ، کے برابر ہوگا یعنی اُس کا ممیز ۱̅ ہوگا۔

ایسے ہی جو عدد ۱، اور ۱۰، کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارثم ۔۱ اور ۔۲ کے درمیان واقع ہوگا اور اس لیے وہ ۔۲+ ایک کسر اعشاریہ، کے برابر ہوگا یعنی اس کا ممیز ۲̅ ہوگا۔

اسی طرح سے جو عدد ۰۱، اور ۰۰۱، کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارثم ۔۲ اور ۔۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا ممیز ۳̅ ہوگا۔

اور معلوم ہوا کہ کسی کسی اعشاریہ کے لوکارثم کا ممیز منفی ہوتا ہے اور علامت اعشاریہ کے بعد پہلے ملحوظ ھند سے تک جتنے صفر ہوں ممیز اُن سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے۔

کیونکہ جو کسر ۱ اور ۱، کے درمیان واقع ہو (مثلاً ۵،) اس میں علامت اعشاریہ کے بعد کوئی صفر نہیں ہو سکتا اور ہم کو معلوم ہے کہ اس کا ممیز ۱̅ ہے، نیز جو کسر ۱، اور ۰۱، کے درمیان واقع ہو مثلاً (۰۷،) اُس میں عین علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہوگا اور ہم جانتے ہیں کہ اس کا ممیز ۲̅ ہے۔

جو کسر ۰۱، اور ۰۰۱، کے درمیان واقع ہو مثلاً (۰۰۳،) اس میں عین علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہونگے، اور ہم کو معلوم ہے کہ اس کا ممیز ۳̅ ہے، کسی اور کسر کی بھی یہی کیفیت ہے۔

امثلہ عدد ۰۰۸۳۵، کے لوکارثم کا ممیز ۳̅ ہے

عدد ۰۰۰۰۰۵۳، کے لوکارثم کا ممیز ۶̅ ہے

عدد ۳۴۵۶۷، کے لوکارثم کا ممیز ۱̅ ہے

۱۴۳ ۔ جن عددوں کی ترکیب میں وہی ھندسے شامل ہوں اُن کے اعشاریہ لوکارثمی وہی ہوتے ہیں۔

اس کی توضیح ایک مثال سے ہوگی۔

فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے ۔

لوک ۶۶۸۱۸ = ۴٫۸۲۴۸۹۳۵

تب لوک ۶۶۸٫۱۸ = لوک ۶۶۸۱۸/۱۰۰ = لوک ۶۶۸۱۸ - لوک ۱۰۰ (دفعہ ۱۳۸)

= ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ - ۲ = ۲٫۸۲۴۸۹۳۵

لوک ۰٫۶۶۸۱۸ = لوک ۶۶۸۱۸/۱۰۰۰۰۰ = لوک ۶۶۸۱۸ - لوک ۱۰۰۰۰۰ (دفعہ ۱۳۸)

= ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ - ۵ = ۱̄٫۸۲۴۸۹۳۵

نیز لوک ۰٫۰۰۰۶۶۸۱۸ = لوک ۶۶۸۱۸/۱۰^۸

= لوک ۶۶۸۱۸ - لوک ۱۰^۸ = ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ - ۸ = ۴̄٫۸۲۴۸۹۳۵

اب اعداد ۶۶۸۱۸، ۶۶۸٫۱۸، ۰٫۶۶۸۱۸ اور ۰٫۰۰۰۶۶۸۱۸ میں ملحوظ ہندسے وہی ہیں صرف علامت اعشاریہ کے مقام میں فرق ہے، ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اُن کی لوکارتموں میں حصہ اعشاریہ وہی ہے صرف ممیز مختلف ہیں۔

ہر ایک صورت میں ممیز کی قیمت قانون دفعہ گذشتہ کی مدد سے معلوم ہوتی ہے۔

یاد رہے کہ لوکارتم کا اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

۱۴۴۔ لوکارتمی جدولیں۔ ا سے لے کر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم چمبر صاحب کی لوکارتمی جدولوں میں مندرج ہیں اور یہ قیمتیں سات مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح ہیں۔

طالب علم کے پاس چمبر کی جدول یا کسی اور اچھی جدول کا ایک نسخہ موجود ہونا چاہیے آئندہ چند بابوں میں کئی مثالیں حل کرنے میں اس کی ضرورت ہوگی۔

مقابل کے صفحہ پر چمبر کی جدولوں سے ایک صفحہ بطور نمونہ کے منتخب کیا گیا ہے اس میں ۵۲۵۰۰ سے لے کر ۵۳۰۰۰ تک تمام اعداد صحیح کے اعشاریہ لوکارتمی مندرج ہیں۔

عدد		۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق
۵۲۵۰	۷۲۰	۱۵۹۳	۱۶۷۶	۱۷۵۸	۱۸۴۱	۱۹۲۴	۲۰۰۷	۲۰۸۹	۲۱۷۲	۲۲۵۵	۲۳۳۷	
۵۱		۲۴۲۰	۲۵۰۳	۲۵۸۶	۲۶۶۸	۲۷۵۱	۲۸۳۴	۲۹۱۶	۲۹۹۹	۳۰۸۲	۳۱۶۴	
۵۲		۳۲۴۷	۳۳۳۰	۳۴۱۳	۳۴۹۵	۳۵۷۸	۳۶۶۱	۳۷۴۳	۳۸۲۶	۳۹۰۹	۳۹۹۱	۸۲
۵۳		۴۰۷۴	۴۱۵۷	۴۲۳۹	۴۳۲۲	۴۴۰۵	۴۴۸۷	۴۵۷۰	۴۶۵۳	۴۷۳۵	۴۸۱۸	۱ ۸
												۲ ۱۶
۵۴		۴۹۰۱	۴۹۸۳	۵۰۶۶	۵۱۴۹	۵۲۳۱	۵۳۱۴	۵۳۹۷	۵۴۷۹	۵۵۶۲	۵۶۴۵	۳ ۲۵
۵۵		۵۷۲۷	۵۸۱۰	۵۸۹۲	۵۹۷۵	۶۰۵۸	۶۱۴۰	۶۲۲۳	۶۳۰۶	۶۳۸۸	۶۴۷۱	۴ ۳۳
												۵ ۴۱
												۶ ۴۹
												۷ ۵۷
۵۶		۶۵۵۴	۶۶۳۶	۶۷۱۹	۶۸۰۱	۶۸۸۴	۶۹۶۷	۷۰۴۹	۷۱۳۲	۷۲۱۵	۷۲۹۷	۸ ۶۶
												۹ ۷۴
۵۷		۷۳۸۰	۷۴۶۲	۷۵۴۵	۷۶۲۸	۷۷۱۰	۷۷۹۳	۷۸۷۵	۷۹۵۸	۸۰۴۱	۸۱۲۳	
۵۸		۸۲۰۶	۸۲۸۸	۸۳۷۱	۸۴۵۴	۸۵۳۶	۸۶۱۹	۸۷۰۱	۸۷۸۴	۸۸۶۷	۸۹۴۹	
۵۹		۹۰۳۲	۹۱۱۴	۹۱۹۷	۹۲۷۹	۹۳۶۲	۹۴۴۵	۹۵۲۷	۹۶۱۰	۹۶۹۲	۹۷۷۵	
۶۰		۹۸۵۷	۹۹۴۰	۰۰۲۳	۰۱۰۵	۰۱۸۸	۰۲۷۰	۰۳۵۳	۰۴۳۵	۰۵۱۸	۰۶۰۰	

عدد		۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق
۵۲۶۱	۷۲۱	۰۶۸۳	۰۷۶۶	۰۸۴۸	۰۹۳۱	۱۰۱۳	۱۰۹۶	۱۱۷۸	۱۲۶۱	۱۳۴۳	۱۴۲۶	
۶۲		۱۵۰۸	۱۵۹۱	۱۶۷۴	۱۷۵۶	۱۸۳۹	۱۹۲۱	۲۰۰۴	۲۰۸۶	۲۱۶۹	۲۲۵۱	
۶۳		۲۳۳۴	۲۴۱۶	۲۴۹۹	۲۵۸۱	۲۶۶۴	۲۷۴۶	۲۸۲۹	۲۹۱۱	۲۹۹۴	۳۰۷۶	۸۲
۶۴		۳۱۵۹	۳۲۴۱	۳۳۲۴	۳۴۰۶	۳۴۸۹	۳۵۷۱	۳۶۵۴	۳۷۳۶	۳۸۱۹	۳۹۰۱	۱ ۸
۶۵		۳۹۸۴	۴۰۶۶	۴۱۴۹	۴۲۳۱	۴۳۱۴	۴۳۹۶	۴۴۷۹	۴۵۶۱	۴۶۴۴	۴۷۲۶	۲ ۱۶
												۳ ۲۵
												۴ ۳۳
۶۶		۴۸۰۹	۴۸۹۱	۴۹۷۳	۵۰۵۶	۵۱۳۸	۵۲۲۱	۵۳۰۳	۵۳۸۶	۵۴۶۸	۵۵۵۱	۵ ۴۱
												۶ ۴۹
۶۷		۵۶۳۳	۵۷۱۶	۵۷۹۸	۵۸۸۱	۵۹۶۳	۶۰۴۵	۶۱۲۸	۶۲۱۰	۶۲۹۳	۶۳۷۵	۷ ۵۷
۶۸		۶۴۵۸	۶۵۴۰	۶۶۲۳	۶۷۰۵	۶۷۸۷	۶۸۷۰	۶۹۵۲	۷۰۳۵	۷۱۱۷	۷۲۰۰	۸ ۶۶
												۹ ۷۴
۶۹		۷۲۸۲	۷۳۶۴	۷۴۴۷	۷۵۲۹	۷۶۱۲	۷۶۹۴	۷۷۷۷	۷۸۵۹	۷۹۴۱	۸۰۲۴	
۷۰		۸۱۰۶	۸۱۸۹	۸۲۷۱	۸۳۵۳	۸۴۳۶	۸۵۱۸	۸۶۰۱	۸۶۸۳	۸۷۶۵	۸۸۴۸	

عدد		۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۲۷۱	۷۲۱	۸۹۳۰	۹۰۱۳	۹۰۹۵	۹۱۷۷	۹۲۶۰	۹۳۴۲	۹۴۲۴	۹۵۰۶	۹۵۸۹	۹۶۷۱
۷۲		۹۷۵۴	۹۸۳۶	۹۹۱۹	۰۰۰۱	۰۰۸۴	۰۱۶۶	۰۲۴۸	۰۳۳۱	۰۴۱۳	۰۴۹۵
۷۳	۷۲۲	۰۵۷۸	۰۶۶۰	۰۷۴۲	۰۸۲۵	۰۹۰۷	۰۹۹۰	۱۰۷۲	۱۱۵۴	۱۲۳۷	۱۳۱۹
۷۴		۱۴۰۱	۱۴۸۴	۱۵۶۶	۱۶۴۸	۱۷۳۱	۱۸۱۳	۱۸۹۵	۱۹۷۸	۲۰۶۰	۲۱۴۲
۷۵		۲۲۲۵	۲۳۰۷	۲۳۸۹	۲۴۷۲	۲۵۵۴	۲۶۳۶	۲۷۱۹	۲۸۰۱	۲۸۸۳	۲۹۶۶
۷۶		۳۰۴۸	۳۱۳۰	۳۲۱۲	۳۲۹۵	۳۳۷۷	۳۴۵۹	۳۵۴۲	۳۶۲۴	۳۷۰۶	۳۷۸۹
۷۷		۳۸۷۱	۳۹۵۳	۴۰۳۶	۴۱۱۸	۴۲۰۰	۴۲۸۲	۴۳۶۵	۴۴۴۷	۴۵۲۹	۴۶۱۲
۷۸		۴۶۹۴	۴۷۷۶	۴۸۵۸	۴۹۴۱	۵۰۲۳	۵۱۰۵	۵۱۸۸	۵۲۷۰	۵۳۵۲	۵۴۳۴
۷۹		۵۵۱۷	۵۵۹۹	۵۶۸۱	۵۷۶۳	۵۸۴۶	۵۹۲۸	۶۰۱۰	۶۰۹۲	۶۱۷۵	۶۲۵۷
۸۰		۶۳۳۹	۶۴۲۱	۶۵۰۴	۶۵۸۶	۶۶۶۸	۶۷۵۰	۶۸۳۳	۶۹۱۵	۶۹۹۷	۷۰۷۹

فرق	۸۲
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۷
۸	۶۶
۹	۷۴

عدد		۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق
۵۲۸۱	۷۲۲	۷۱۶۳	۷۲۴۴	۷۳۲۶	۷۴۰۸	۷۴۹۱	۷۵۷۳	۷۶۵۵	۷۷۳۷	۷۸۲۰	۷۹۰۲	
۸۲		۷۹۸۴	۸۰۶۶	۸۱۴۸	۸۲۳۱	۸۳۱۳	۸۳۹۵	۸۴۷۷	۸۵۵۹	۸۶۴۲	۸۷۲۴	
۸۳		۸۸۰۶	۸۸۸۸	۸۹۷۱	۹۰۵۳	۹۱۳۵	۹۲۱۷	۹۲۹۹	۹۳۸۲	۹۴۶۴	۹۵۴۶	۸۲
۸۴		۹۶۲۸	۹۷۱۰	۹۷۹۲	۹۸۷۵	۹۹۵۷	۰۰۳۹	۰۱۲۱	۰۲۰۳	۰۲۸۶	۰۳۶۸	۱ ۸ ۲ ۱۶
۸۵	۷۲۳	۰۴۵۰	۰۵۳۲	۰۶۱۴	۰۶۹۶	۰۷۷۹	۰۸۶۱	۰۹۴۳	۱۰۲۵	۱۱۰۷	۱۱۸۹	۳ ۲۵ ۴ ۳۳ ۵ ۴۱
۸۶		۱۲۷۲	۱۳۵۴	۱۴۳۶	۱۵۱۸	۱۶۰۰	۱۶۸۲	۱۷۶۵	۱۸۴۷	۱۹۲۹	۲۰۱۱	۶ ۴۹ ۷ ۵۷
۸۷		۲۰۹۳	۲۱۷۵	۲۲۵۷	۲۳۴۰	۲۴۲۲	۲۵۰۴	۲۵۸۶	۲۶۶۸	۲۷۵۰	۲۸۳۲	۸ ۶۶ ۹ ۷۴
۸۸		۲۹۱۴	۲۹۹۷	۳۰۷۹	۳۱۶۱	۳۲۴۳	۳۳۲۵	۳۴۰۷	۳۴۸۹	۳۵۷۱	۳۶۵۴	
۸۹		۳۷۳۶	۳۸۱۸	۳۹۰۰	۳۹۸۲	۴۰۶۴	۴۱۴۶	۴۲۲۸	۴۳۱۰	۴۳۹۳	۴۴۷۵	
۹۰		۴۵۵۷	۴۶۳۹	۴۷۲۱	۴۸۰۳	۴۸۸۵	۴۹۶۷	۵۰۴۹	۵۱۳۱	۵۲۱۳	۵۲۹۶	

عدد		۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲۵۹۱	۷۲۳	۵۳۷۸	۵۴۶۰	۵۵۴۲	۵۶۲۴	۵۷۰۶	۵۷۸۸	۵۸۷۰	۵۹۵۲	۶۰۳۴	۶۱۱۶
۹۲		۶۱۹۸	۶۲۸۰	۶۳۶۲	۶۴۴۵	۶۵۲۷	۶۶۰۹	۶۶۹۱	۶۷۷۳	۶۸۵۵	۶۹۳۷
۹۳		۷۰۱۹	۷۱۰۱	۷۱۸۳	۷۲۶۵	۷۳۴۷	۷۴۲۹	۷۵۱۱	۷۵۹۳	۷۶۷۵	۷۷۵۷
۹۴		۷۸۳۹	۷۹۲۱	۸۰۰۳	۸۰۸۵	۸۱۶۷	۸۲۵۰	۸۳۳۲	۸۴۱۴	۸۴۹۶	۸۵۷۸
۹۵		۸۶۶۰	۸۷۴۲	۸۸۲۴	۸۹۰۶	۸۹۸۸	۹۰۷۰	۹۱۵۲	۹۲۳۴	۹۳۱۶	۹۳۹۸
۹۶		۹۴۸۰	۹۵۶۲	۹۶۴۴	۹۷۲۶	۹۸۰۸	۹۸۹۰	۹۹۷۲	۰۰۵۴	۰۱۳۶	۰۲۱۸
۹۷	۷۲۴	۰۳۰۰	۰۳۸۳	۰۴۶۴	۰۵۴۶	۰۶۲۸	۰۷۱۰	۰۷۹۲	۰۸۷۴	۰۹۵۶	۱۰۳۸
۹۸		۱۱۲۰	۱۲۰۲	۱۲۸۳	۱۳۶۵	۱۴۴۷	۱۵۲۹	۱۶۱۱	۱۶۹۳	۱۷۷۵	۱۸۵۶
۹۹		۱۹۳۹	۲۰۲۱	۲۱۰۳	۸۱۸۵	۲۲۶۷	۲۳۴۹	۲۴۳۱	۲۵۱۳	۲۵۹۵	۲۶۷۷
۵۳۰۰		۲۷۵۹	۲۸۴۱	۲۹۲۳	۳۰۰۵	۳۰۸۶	۳۱۶۸	۳۲۵۰	۳۳۳۲	۳۴۱۴	۳۴۹۶

فرق	۸۲
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۷
۸	۶۶
۹	۷۴

۱۴۵ـ فرض کرو کہ ہمیں عدد ۵۲۶۸،۷ کا لوکارتھم مطلوب ہے ۔ جدول کی بائیں طرف سب سے پہلے خانے میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتے جاؤ اور عدد ۵۲۶۸ کو تلاش کرو ۔ جب یہ عدد مل جائے تو عین اس مقام سے افقی سطر میں دائیں طرف دیکھتے جاؤ ۔ جب تک کہ نوبت اُس خانے کی نہ آجائے جس کے سر پر سب سے اوپر عدد ۷ لکھا ہوا ہے ۔ اس خانہ میں ہم کو عدد ۰۳۵،۷ ملیگا اس سے ہم کو یہ معلوم ہوا کہ ۵۲۶۸،۷ کا متعلقہ عدد جدول میں ۰۳۵،۷۲۱،۴ لیکن اس عدد میں صرف اعشاریہ لوکارتمی کے ہندسے شامل ہیں یعنی اعشاریہ لوکارتمی مطلوب ۰۳۵،۷۲۱،۰ ہے لیکن ۵۲۶۸،۷ کا ممیز ۳ ہے اس لیے

لوک ۵۲۶۸،۷ = ۳،۷۲۱۰۳۵

پس لوک ۵۲۶۸۷،۰ = $\bar{1}$،۷۲۱۰۳۵

اور لوک ۰۰۰۵۲۶۸۷،۰ = $\bar{4}$،۷۲۱۰۳۵

اگر ۵۲،۲۵ کا لوکارتھم مطلوب ہو تو طالب علم کو چاہیے کہ جدول کے بائیں طرف پہلے خانہ میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتا جائے جب تک کہ عدد ۵۲،۲ کی نوبت نہ آجائے اس کے بعد افقی سطر میں دائیں طرف اُس خانے تک دیکھتا جائے جس کے راس پر ۵ لکھا ہوا ہے، وہاں اُس کو عدد ۱۶۶. لکھا ہوا ملیگا ان ہندسوں پر خطِ افقی کا یہ مطلب ہے کہ ان کے ماقبل ۲۲، لکھنا چاہیے نہ کہ ۲۱، اس سے معلوم ہوا کہ عدد ۵۲،۲۵ کے متعلق اعشاریہ لوکارتمی ۰،۷۲۲۰۱۶۶ ہے ۔

نیز عدد ۵۲،۲۵ کا ممیز ۳ ہے

اس لیے لوک ۵۲،۲۵ = ۳،۷۲۲۰۱۶۶

پس لوک ۰۵۲،۲۵، = $\bar{2}$،۷۲۲۰۱۶۶

اب ہم چند عددی مثالیں حل کرینگے جن سے عملی حسابات میں لوکارتھم کے استعمال کی صلاحیت واضح ہوگی ۔

۱۴۶ـ مثال ۱ ـ $\sqrt[5]{۲۳،۴}$ کی قیمت دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ لا = $\sqrt[۵]{۲۳٫۴}$ = $(۲۳٫۴)^{\frac{۱}{۵}}$

یعنی لوک لا = $\frac{۱}{۵}$ لوک (۲۳٫۴) .... دفعہ ۱۳۹

اب جدول لوکارتھمی میں عدد ۲۳۴ کے محاذی ہم کو اُس کا لوکارتھم ۳۶۹۲۱۵۹ لکھا ہوا ملیگا۔

اس لیے لوک ۲۳٫۴ = ۱٫۳۶۹۲۱۵۹

اس لیے لوک لا = $\frac{۱}{۵}$ [۱٫۳۶۹۲۱۵۹] = ٫۲۷۳۸۴۳۲

نیز لوکارتھم ۲۷۳۸۴۳۱ کے متعلق جدول سے عدد ۱۸۷۸۶۴ ملیگا۔ پس

لوک ۱٫۸۷۸۶۴ = ٫۲۷۳۸۴۳۲

∴ لا = ۱٫۸۷۸۶۴

مثال ۲۔ $\frac{(۶٫۴۵)^۳ \times \sqrt[۴]{٫۰۰۰۳۴}}{(۹٫۳۷)^۲ \times \sqrt[۴]{۸٫۹۳}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا قیمت مطلوبہ ہے اس لیے بموجب دفعات ۱۳۸ اور ۱۳۹

لوک لا = لوک $(۶٫۴۵)^۳$ + لوک $(٫۰۰۰۳۴)^{\frac{۱}{۴}}$ ۔ لوک $(۹٫۳۷)^۲$ ۔ لوک $(۸٫۹۳)^{\frac{۱}{۴}}$

= ۳ لوک (۶٫۴۵) + $\frac{۱}{۴}$ لوک (٫۰۰۰۳۴) ۔ ۲ لوک (۹٫۳۷) ۔ $\frac{۱}{۴}$ لوک (۸٫۹۳)

اب جدولوں سے معلوم ہوگا کہ

عدد ۶۴۵ کے محاذی لوکارتھم ۸۰۹۵۵۹۷ ہے

" ۳۴ " " ۵۳۱۴۷۸۹ "

" ۹۳۷ " " ۹۷۱۷۳۹۶ "

" ۸۹۳ " " ۹۵۰۸۵۱۵ "

اس لیے

لوک لا = ۳ × ٫۸۰۹۵۵۹۷ + $\frac{۱}{۴}$ ($\bar{۴}$٫۵۳۱۴۷۸۹)

= ۲ × ٫۹۷۱۷۳۹۶ ۔ $\frac{۱}{۴}$ × ٫۹۵۰۸۵۱۵

لیکن $\frac{۱}{۴}$ ($\bar{۴}$٫۵۳۱۴۷۸۹) = $\frac{۱}{۴}$ ($\bar{۶}$ + ۲٫۵۳۱۴۷۸۹)

= $\bar{۲}$ + ٫۸۴۳۸۲۶۳

اس لیے لوک لا = ۲٫۴۲۸۶۷۹۱ + [$\bar{۲}$ + ٫۸۴۳۸۲۶۳]

= ۱،۰۹۴۳۴۷۹۲ − ،۲۳۷۷۱۲۹

= ۳،۲۷۲۵۰۵۴ − ۴،۱۸۱۱۹۲۱

= $\overline{۱}$ + ۴،۲۷۲۵۰۵۴ − ۴،۱۸۱۱۹۲۱

= $\overline{۱}$،۰۹۱۳۱۲۳

جدولوں سے عدد ۱۲۳۴۰ کے مقابل لوکارثم ۰۹۱۳۱۵۲. لکھا ہوا ملیگا پس

لوک ۱۲۳۴۰، = $\overline{۱}$،۰۹۱۳۱۵۲

اس لیے　لوک لا = لوک ۱۲۳۴۰، تقریباً

اور اس لیے　لا = ۱۲۳۴۰، تقریباً

جب کسی عدد کا لوکارثم جدول کے کسی لوکارثم کے بالکل مطابق نہ ہو لیکن دو متصل لوکارثموں کے درمیان واقع ہو تو اس صورت میں بھی عدد دریافت ہو سکتا ہے اس کا بیان اگلے باب میں ہوگا۔

مثال ۳۔ معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳، عدد $۲^{۶۷}$ میں ہندسوں کی تعداد اور $۲^{-۳۷}$ میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو۔

لوک $۲^{۶۷}$ = ۶۷ × لوک ۲ = ۶۷ × ۳۰۱۰۳، = ۲۰،۱۶۹۰۱

چونکہ $۲^{۶۷}$ کے لوکارثم کا ممیز ۲۰ ہے اس لیے بموجب دفعہ ۱۴۲ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $۲^{۶۷}$ میں ۲۱ ہندسے ہیں۔

نیز　لوک $۲^{-۳۷}$ = −۳۷ لوک ۲ = −۳۷ × ۳۰۱۰۳،

= −۱۱،۱۳۸۱۱ = $\overline{۱۲}$،۸۶۱۸۹

اس لیے بموجب دفعہ ۱۴۲ عدد $۲^{-۳۷}$ میں علامت اعشاریہ کے بعد ۱۱ صفر ہیں، اس سے معلوم ہوا کہ پہلا ملحوظ ہندسہ کسر اعشاریہ میں بارھویں مقام پر ہے۔

مثال ۴۔ معلوم ہے لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳، ،

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰، اور لوک ۱۱ = ۱،۰۴۱۳۹۲۷

مساوات　$۳^{لا} \times ۷^{۲لا+۱} = ۱۱^{لا+۵}$ کو حل کرو

طرفین کے لوکارثم لینے سے حاصل ہوگا

لوک $۳^{لا}$ + لوک $۷^{۲لا+۱}$ = لوک $۱۱^{لا+۵}$

∴ لا لوک ۳ + (۲ لا + ۱) لوک ۷ = (لا + ۵) لوک ۱۱

∴ لا [لوک ۳ + ۲ لوک ۷ - لوک ۱۱] = ۵ لوک ۱۱ - لوک ۷

∴ لا = (۵ لوک ۱۱ - لوک ۷) / (لوک ۳ + ۲ لوک ۷ - لوک ۱۱)

= (۵٫۲۰۶۹۶۳۵ - ۰٫۸۴۵۰۹۸۰) / (۰٫۴۷۷۱۲۱۳ + ۱٫۶۹۰۱۹۶۰ - ۱٫۰۴۱۳۹۲۷)

= ۴٫۳۶۱۸۶۵۵ / ۱٫۱۲۵۹۲۴۶ = ۳٫۸۷......

۱۴۷- ثابت کرو کہ

لوک(ا) م = لوک(ب) م × لوک(ا) ب

فرض کرو کہ لوک(ا) م = لا یعنی ا^(لا) = م

نیز فرض کرو کہ لوک(ب) م = ما یعنی ب^(ما) = م

∴ ا^(لا) = ب^(ما)

اس لیے لوک(ا) (ا^(لا)) = لوک(ا) (ب^(ما))

∴ لا = ما لوک(ا) ب (دفعہ ۱۳۹)

اس لیے لوک(ا) م = لوک(ب) م × لوک(ا) ب

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ جب کسی عدد کا لوکارثم اساس ب پر معلوم ہو تو مسئلہ مندرجۂ بالا کی اعانت سے ہم اُسی عدد کا لوکارثم کسی اَور اساس ا پر دریافت کر سکتے ہیں۔ بعد کے کسی باب سے معلوم ہوگا کہ لوکارثموں کو بلاواسطہ اساس ۱۰ کے موافق نہیں نکالنا چاہیے بلکہ اس میں زیادہ سہولت ہے کہ ان کو سب سے اول ایک اَور اساس کے موافق نکالا جائے اور پھر اس مسئلہ کی مدد سے ان کو اساس ۱۰ میں منتقل کر دیا جائے۔

امثلہ نمبر ۲۳

۱۔ اگر لوک ۴ = ٫۶۰۲۰۶ اور لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳ تو ٫۸، ٫۰۰۳، ٫۰۱۰۸، اور $(٫۰۰۰۱۸)^{\frac{1}{6}}$ کے لوکارتم دریافت کرو۔

۲۔ معلوم ہے کہ لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷ اور لوک ۱۳ = ۱٫۱۱۳۹۴۳۴، مفصلۂ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) لوک ۱٫۴۳ (۲) لوک ۱۳۳٫۱ (۳) لوک $\sqrt[3]{۱۴۳}$ اور

(۴) لوک $\sqrt[3]{٫۰۰۱۶۹}$

۳۔ ۲۴۳٫۷، ٫۰۱۵۳، ۲٫۸۷۱۳، ٫۰۰۰۵۷، ٫۰۲۳، $\sqrt[5]{۲۴۶۱۵}$ اور $(۲۴۵۸۹)^{\frac{3}{4}}$ کے لوکارتموں کے ممیّز دریافت کرو۔

۴۔ عدد ٫۰۰۳ کا پانچواں جذر دریافت کرو۔
معلوم ہے لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳ اور
لوک ۳۱۲۹۳۶ = ۵٫۴۹۵۴۲۴۳

۵۔ مفصلۂ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $(۸۴)^{\frac{2}{5}}$ اور (۳) $(٫۰۲۱)^{\frac{1}{5}}$

معلوم ہے لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳
لوک ۷ = ٫۸۴۵۰۹۸۰، لوک ۱۳۲۰۵۷ = ۵٫۱۲۰۷۲۸۳
لوک ۵۸۸۴۵۳ = ۵٫۷۶۹۷۱۱۷ اور لوک ۴۶۱۷۹۱ = ۵٫۶۶۴۴۴۳۸

۶۔ معلوم ہے لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳
مفصلۂ ذیل میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

(۱) ۳^{43} (۲) ۳^{27} اور (۳) ۳^{62}

اور اعداد ذیل میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو۔

(۴) ۳^{-13} (۵) ۳^{-43} اور (۶) ۳^{-95}

۷۔ معلوم ہے لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳
اور لوک ۷ = ٫۸۴۵۰۹۸۰

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(۱) $۲^{ل} \times ۳^{ل+۲} = ۷^{ل}$

(۲) $۲^{ل+۱} \times ۳^{۳ل+۲} = ۷^{۳ل}$

(۳) $۷^{۲ل} \div ۲^{ل-۲} = ۳^{۳ل-۱}$

(۴) $\begin{cases} ۷^{ل+م} \times ۳^{۲ل+م} = ۹ \\ ۳^{م} \div ۲^{ل+م} = ۳^{ل} \end{cases}$

۸ - جدولوں کی مدد سے ۰٫۰۰۰۰۲۶۷۵۱ کا ساتواں جذر دریافت کرو ۔

لوکارثمی جدولوں کی مدد سے مفصلۂ ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو ۔

۹ - $\sqrt[۳]{۶۴۵٫۳}$　　　۱۰ - $\sqrt[۵]{۸۲۳۵۷}$

۱۱ - $\frac{\sqrt[۳]{۷} \times \sqrt{۵}}{\sqrt[۵]{۹} \times \sqrt[۴]{۸}}$　　　۱۲ - $\sqrt[۳]{\frac{۸٫۳ \times ۷٫۲}{۱۹٫۵ \div ۹٫۲}}$

۱۳ - $\sqrt[۳]{\frac{۱۱^{\frac{۱}{۲}} \times ۸^{\frac{۱}{۵}}}{\sqrt[۵]{۹۲} \times \sqrt{۷۴}}}$

جملات ذیل کی ترسیمات کھینچو

۱۴ - لوک لا　　۱۵ - لوک جب لا　　۱۶ - لوک جم لا

۱۷ - لوک مس لا　　۱۸ - لوک قم لا　　۱۹ - لوک مم لا

گیارھواں باب

لوکارتموں اور مثلثی نسبتوں کی جدولیں

اصول اجزائے متناسب

۱۴۸ - اوپر اس کا ذکر آچکا ہے کہ ا سے لے کر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم جمبر صاحب کی جداول حسابیہ میں مندرج ہیں مثلاً اعداد ۴۵۸۳، اور ۴۵۸۴، کے لوکارتم بلاواسطہ اُن جدولوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مگر فرض کرو کہ ہمیں ایک ایسے عدد کا لوکارتم مطلوب ہے جو ان دو عددوں کے درمیان واقع ہے مثلاً ایک ایسا عدد ۴۵۸۳،۲ ہے۔

اس عدد کا لوکارتم معلوم کرنے کے لیے ہم اصول اجزائے متناسب سے مدد لیتے ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ کسی عدد کے لوکارتم کی افزائش خود اُس عدد کی افزائش کے متناسب ہوتی ہے۔

مثلاً جدولوں سے حاصل ہوگا

لوک ۴۵۸۳، = ۴۱۸۶۲۶۳۹۸ .... (۱)

اور لوک ۴۵۸۴، = ۴۱۸۶۲۶۴۵۶ .... (۲)

یہ مقدار لوک ۴۵۸۳،۲ ، صریحاً لوک ۴۵۸۳، اور لوک ۴۵۸۴، کے درمیان واقع ہوگی۔

فرض کرو کہ لوک ۴۵۸۳،۲ = لوک ۴۵۸۳، + لا

= ۴۱۸۶۲۶۳۹۸ + لا .... (۳)

اس سوال کا حل مطلوب ہوتا ہے۔

اب اگر دیا ہوا لوکارثم جدول میں موجود ہو تو عدد بآسانی حاصل ہو سکتا ہے مگر جب ایسا نہ ہو تو طریق عمل کی توضیح امثلۂ ذیل سے ہوگی۔

ایک عدد کا لوکارثم ۲،۶۲۸۳۹۲۴ ہے اس کو معلوم کرو۔

جدولوں میں تلاش کرنے سے معلوم ہوگا کہ لوکارثم ۶۲۸۳۹۲۴ جدول میں موجود نہیں، لیکن اس کے قریب ترین لوکارثم ۶۲۸۳۸۸۹ اور ۶۲۸۳۹۹۱ موجود ہیں اور ان کے درمیان لوکارثم معلوم واقع ہے۔

پس لوک ۴۲۵،۰۰ = ۲،۶۲۸۳۸۸۹ .... (۱)

اور لوک ۴۲۵،۰۱ = ۲،۶۲۸۳۹۹۱ .... (۲)

فرض کرو کہ لوک (۴۲۵،۰۰ + لا) = ۲،۶۲۸۳۹۲۴ .... (۳)

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ عدد کے فرق ۰،۰۱ کے مطابق لوکارثم کا فرق ۰،۰۰۰۱۰۲ ہے۔

نیز (۱) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ عدد کے فرق لا کے مطابق لوکارثم کا فرق ۰،۰۰۰۰۳۵ ہے۔

اس لیے ہمیں حاصل ہوگا لا : ۰،۰۱ :: ۰،۰۰۰۰۳۵ : ۰،۰۰۰۱۰۲

∴ لا = ۳۵/۱۰۲ × ۰،۰۱ = ۰،۳۵/۱۰۲ = ۰،۰۰۳۴۳ تقریباً

اس لیے عدد مطلوب = ۴۲۵،۰۰ + ۰،۰۰۳۴۳ = ۴۲۵،۰۰۳۴۳

۱۵۱۔ جب لوکارثموں کو جدولوں سے لیا جائے تو متصل لوکارثموں کو ایک دوسرے سے منفی کرنے کی محنت سے ہم اس طرح بچ سکتے ہیں۔

صفحات ۱۷۶ تا ۱۷۹ کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ دائیں طرف کے آخری خانے کے سر پر **فرق** لکھا ہوا ہے اور سب سے اوپر عدد ۸۲ ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ صفحۂ مذکورہ پر جو اعداد ہیں اگر ان کا فرق ایک ہو تو ان کے متعلقہ لوکارثموں کا فرق ۰،۰۰۰۰۸۲ ہوتا ہے کیونکہ عدد ۸۲ در اصل قائم مقام ۰،۰۰۰۰۸۲ کا ہے۔

،۰۰۰۰۰۵۹ ہوتی ہے۔

اب مسئلہ اجزائے تناسب کا منشاء یہ ہے کہ عدد کی زیادتی ،۳ کے واسطے لوکارتم کی زیادتی ،۳ × ،۰۰۰۰۰۵۹ یعنی ،۰۰۰۰۰۱۷۷ ہو

اس لیے لوک ۷۴۵۸۲،۳ = ۴،۸۷۲۶۳۹۸ + ،۰۰۰۰۰۱۷۷

= ۴،۸۷۲۶۴۱۵۷

۱۴۹- بطور ایک اور مثال کے ہم لوک ،۰۳۸۲۷۵۷ کی قیمت دریافت کرینگے اور عمل کو ایک مختصر صورت میں ترتیب دینگے۔

جدولوں سے حاصل ہوگا۔

لوک ،۰۳۸۲۷۵ = ۲̄،۵۸۲۹۱۵۲

لوک ،۰۳۸۲۷۶ = ۲̄،۵۸۲۹۲۶۵

اِس لیے فرق برائے

،۰۰۰۰۰۱ = ،۰۰۰۰۱۱۳

اس لیے فرق برائے

،۰۰۰۰۰۰۷ = ،۰۰۰۰۱۱۳ × ،۷

= ،۰۰۰۰۰۷۹۱

∴ لوک ،۰۳۸۲۷۵۷ = ۲̄،۵۸۲۹۱۵۲

+ ،۰۰۰۰۰۷۹۱

= ۲̄،۵۸۲۹۲۳۱۱

اب چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک لوکارتموں کی ضرورت ہے اِس لیے ہم آخری ہندسے کو حذف کرتے ہیں پس جواب مطلوب ۲̄،۵۸۲۹۲۳۱ ہے۔

۱۵۰- اکثر اوقات ہمیں اس سوال کے عکس سے واسطہ پڑتا ہے یعنی "ایک عدد کا لوکارتم معلوم ہے وہ عدد دریافت کرو" اکثر عملی حسابات میں

۸۲ کے نیچے متواتر سطروں میں ۱، ۲، .... کے متعلقہ فرق دیے ہوئے ہیں مثلاً پانچویں سطر میں ۵، کے مطابق فرق ۴۱.....۰، ہے۔

بطور ایک مثال کے ۴۲،۷۴۶۶۴۷۵۲۷ کا لوکارتھم دریافت کرو صفحہ ۱۷۸ پر

لوک ۵۲۷۴۶ = ۴،۷۲۲۱۸۹۵

فرق ۷، کے لیے = ۵۷.....۰،

فرق ۰۴، کے لیے

$(= \frac{1}{10} \times$ فرق متعلقہ ۴) = ۰۰۰۰۰۰۳،

لوک ۵۲۷۴۶۶۷۴ = ۴،۷۲۲۱۹۵۵

اب ہم دو اور مثالیں حل کرینگے جن میں تمام لوکارتھم جدولوں سے لئے جائینگے اور صرف ضروری عمل مندرج ہوگا۔

مثال ۱۔ ۰۳۴۵۷۴،۰ کا ساتواں جذر دریافت کرو

فرض کرو کہ لا مقدار مطلوبہ ہے تب

لوک لا = $\frac{1}{7}$ لوک (۰۳۴۵۷۴،۰) = $\frac{1}{7}$ ($\bar{2}$،۵۳۸۷۴۹۶)

= $\frac{1}{7}$ ($\bar{7}$ + ۵،۵۳۸۷۴۹۶)

∴ لوک لا = $\bar{1}$،۷۹۱۲۴۹۹

لیکن لوک ۶۱۸۳۷، = $\bar{1}$،۷۹۱۲۴۸۴

فرق = ۱۵.....۰،

لیکن فرق ۱.....۰، کے لیے = ۷۱.....۰،

اس لیے مطلوبہ زیادتی = ۲۱۱.....۰،

اس لیے لا = ۶۱۸۳۷۲۱۱،

```
71)150(211
   142
   ---
     80
     71
     --
     90
     71
     --
     19
```

مثال ۲۔ اگر ا = ۳۴۵۶۲،۷۳ اور ب = ۲۸۳۴۷،۹۱۲ تو $ا^2 - ب^2$ کے جذر المربع کی قیمت دریافت کرو۔

اگر لا مقدار مطلوبہ ہو تو ۲ لوک لا = لوک ($ا^2 - ب^2$)

= لوک (ا - ب) + لوک (ا + ب)

= لوک ۶۲۱۴،۸۱۸ + لوک ۶۲۹۱۰،۶۴۲

اب لوک ۶۲۱۴٫۸ = ۳٫۷۹۳۴۲۷۴

۱ = ۷

۸ = ۶ ۵

اس لیے لوک ۶۲۱۴٫۸۱۸ = ۳٫۷۹۳۴۲۸۰۶

لوک ۶۲۹۱۰٫۰۰۰ = ۴٫۷۹۸۷۱۹۷

۶ ۴۱

۴ ۸ ۲

۲ ۱۴

لوک ۶۲۹۱۰٫۶۴۲ = ۴٫۷۹۸۷۲۴۰۹۴

اس لیے جمع کرنے سے ۲ لوک لا = ۸٫۵۹۲۱۵۲۵۴

اس لیے لوک لا = ۴٫۲۹۶۰۷۶۳

لیکن لوک ۱۹۷۷۳ = ۴٫۲۹۶۰۷۳۶

∴ فرق = ۲۷

لیکن فرق ۱ کے لیے = ۲۲۰

اس لیے متناسب زیادتی = $\frac{۲۷}{۲۲۰}$ × ۱ = ۰٫۱۲۸

∴ لا = ۱۹۷۷۳٫۱۲۸

۱۵۲۔ اس جگہ اصول اجزائے متناسب کا ثبوت نہیں دیا جائیگا، یہ اصول صرف بعض حدود کے درمیان صحیح ہے اس کا استعمال صرف اُن عددوں کی صورت میں ہو سکتا ہے جن میں پانچ سے کم ملحوظ ہندسے نہ ہوں اور اس پر بھی ہم اپنے نتائج کی صحت کا صرف پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک اعتبار کر سکتے ہیں۔

مثلاً ہم کو یہ اصول لوک ۲ اور لوک ۳ کی قیمتوں سے لوک ۲٫۵ کی قیمت حاصل کرنے میں نہیں استعمال کرنا چاہیئے کیونکہ اگر ہم ایسا کریں تو چونکہ لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳ اور لوک ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳ اس لیے لوک ۲٫۵ کی

قیمت اس طرح سے ۵۷۰۹۸۳ ، ہوگی گر جدولوں میں لوک ۵ ،۲ کی قیمت ۰۰۴۹۷۹۳ ، مندرج ہے اس لیے معلوم ہوا کہ اس طرح جو قیمت حاصل ہوگی وہ غلط ہوگی۔

مثلثی نسبتوں کی جدولیں

۱۵۳- جمبر کی جدولوں میں اُن سب زاویوں کی مثلثی نسبتیں مندرج ہیں جو °۰ اور °۴۵ کے درمیان واقع ہوں اور ان میں متواتر زاویوں کا فرق ′۱ ہے۔

اب چونکہ °۴۵ اور °۹۰ کے درمیان جو زاویے واقع ہوں اُن کی مثلثی نسبتیں اُن زاویوں کی نسبتوں میں تحویل ہو سکتی ہیں جو °۰ اور °۴۵ کے درمیان واقع ہوں (دفعہ ۷۵) اِس لیے معلوم ہوا کہ جو زاویے °۴۵ اور °۹۰ کے درمیان واقع ہوں اُن کی مثلثی نسبتوں کی جدولوں کو جداگانہ مرتب کرنے کی ضرورت نہیں مثلاً

[جب °۷۶ ′۱۱ = جب (°۹۰ - °۱۳ ′۴۹) = جم °۱۳ ′۴۹ اِس لیے جیب مجوزہ معلوم ہو سکتی ہے]

اس قسم کی جدولوں کو لوکارتمی جیوب، جیوب التمام، وغیرہ کی جدولوں سے تمیز کرنے کے لیے ان کو طبعی جیوب، جیوب التمام کی جدولیں کہتے ہیں۔

اگر ایک ایسے زاویے کی جیب مطلوب ہو جس میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو وہ جدولوں سے حاصل ہو سکتی ہے، لیکن اگر زاویے میں ثانیے بھی موجود ہوں تو اُس صورت میں ہمیں اصول اجزائے متناسب سے مدد لینی چاہیے۔

مثال ۱- معلوم ہے جب °۲۹ ′۱۴ = ۴۸۸۳۶۷۴، ،

اور جب °۲۹ ′۱۵ = ۴۸۸۶۲۱۲، ،

جب °۲۹ ′۱۴ ″۲۳ کی قیمت دریافت کرو۔

تفریق کرنے سے حاصل ہوگا۔

جیب کا فرق $1'$ کے لیے $= .0002538$

اس لیے جیب کا فرق $32''$ کے لیے $= \frac{32}{60} \times .0002538$

$= .00013536$

$\therefore$ جب $29^\circ\, 14'\, 32'' = .48836742$

$+ .00013536$

$= .48850278$

چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک جواب کی ضرورت ہے اس لیے ہم ۶ کو ساقط کرتے ہیں اور چونکہ ۷۶ بہ نسبت ۷۰ کے ۸۰ کے زیادہ قریب ہے اس لیے ہم لکھتے ہیں۔

جب $29^\circ\, 14'\, 32'' = .4885028$

یادداشت - جب اعشاریہ کے آٹھویں مقام سے کسی ہندسے کو ساقط کیا جائے تو ساتویں مقام پر جو ہندسہ ہو اُس میں ۱ زیادہ کرنا چاہیے اگر عدد متروکہ ۵ یا ۵ سے بڑا ہو۔

مثال ۲۔ معلوم ہے جم $16^\circ\, 27' = .9590672$

اور جم $16^\circ\, 28' = .9589848$

جم $16^\circ\, 27'\, 47''$ کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۵۵ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی جیب التمام گھٹتی ہے۔

اس لیے جب زاویہ بقدر $1'$ یعنی $60''$ کے بڑھیگا تو جیب التمام بقدر $.0000824$ کے گھٹیگی۔

اور اس لیے جب زاویہ بقدر $47''$ کے بڑھیگا تو جیب التمام بقدر $\frac{47}{60} \times .0000824$ کے گھٹیگی۔

$\therefore$ جم $16^\circ\, 27'\, 47'' = .9590672 - \frac{47}{60} \times .0000824$

$= .9590672 - .0000645$

٫۹۵۹۰۶۷۲ =

٫۰۰۰۰۶۴۵ −

٫۹۵۹۰۰۲۷ =

مختصراً اس کو یوں لکھتے ہیں۔

جم ۱۶° ۴۸′ = ٫۹۵۸۹۸۴۸

جم ۱۶° ۴۷′ = ٫۹۵۹۰۶۷۲

فرق ۱′ کے لیے = −٫۰۰۰۰۸۲۴

∴ ۴۷″ = −٫۰۰۰۰۸۲۴ × $\frac{۴۷}{۶۰}$

= −٫۰۰۰۰۶۴۵

∴ جواب = ٫۹۵۹۰۶۷۲

٫۰۰۰۰۶۴۵ −

٫۹۵۹۰۰۲۷ =

۸۲۴
۴۷
۵۷۶۸
۳۲۹۶
۶۰)۳۸۷۲ ۸
۶۴۵

۱۵۴- جب کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو اُس زاویہ کا دریافت کرنا اب آسان ہوگا۔

مثال- ایک زاویہ کا مماس التمام ۱٫۴۱۰۹۳۲۵ ہے اُس کو معلوم کرو، دیا ہوا ہے مم ۵۴° ۱۹′ = ۱٫۴۱۱۴۷۹۹

اور مم ۵۴° ۲۰′ = ۱٫۴۱۰۶۰۹۸

فرض کرو کہ زاویہ مطلوبہ ۵۴° ۱۹′ + لا″ ہے

یعنی مم (۵۴° ۱۹′ + لا″) = ۱٫۴۱۰۹۳۲۵

اوپر کی تین مساواتوں سے ظاہر ہے کہ

جب زاویہ بقدر ۶۰″ کے بڑھتا ہے تو اُس کا مماس التمام بقدر ٫۰۰۰۸۷۰۱ کے گھٹتا ہے۔

" لا″ " " " " " " ٫۰۰۰۵۴۷۴ " "

∴ لا : ۶۰ :: ۵۴۷۴ : ۸۷۰۱ اس لیے لا = ۳۷٫۷

پس زاویہ مطلوبہ = ۵۴° ۱۹′ ۳۷٫۷″

۱۵۵- ایسے سوالات میں مسئلہ اجزائے متناسب استعمال

کرتے وقت طالب علم کو اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی مثلثی نسبتیں بڑھتی ہیں یا گھٹتی ہیں، شاید اس بات کے یاد رکھنے سے اُس کو مدد ملے کہ جب زاویہ ربع اول میں بڑھتا ہے تو اُس کی تین مثلثی نسبتیں جن کے آخر میں "التمام" ہے یعنی جیب التمام، مماس التمام اور قاطع التمام گھٹتی ہیں۔

لوکارتمی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولیں

۱۵۶- کئی قسم کے مثلثی حسابات ایسے ہیں (مثلاً مثلثات کا حل) جن میں مثلثی نسبتوں کے لوکارتموں کی ضرورت پڑتی ہے، اب اگر ہم سب سے پہلے جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب دریافت کریں اور پھر اُس جیب کا لوکارتم دوبارہ جدولوں سے پڑھیں تو اس میں دقت ہوگی، ایسی محنت سے بچنے کے لیے مثلثی نسبتوں کے لوکارتموں کی جدولیں جداگانہ مرتب کی گئی ہیں اور بموجب سابق ان جدولوں میں صرف اُن زاویوں کی قیمتوں کا مندرج کرنا کافی ہے جو ۰ اور ۴۵ کے درمیان واقع ہوں۔ چونکہ زاویہ کی جیب ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے اس لیے جیب کا لوکارتم منفی ہوگا [دفعہ ۱۴۲]

نیز چونکہ جو زاویہ ۰ اور ۴۵ کے درمیان واقع ہو اُس کا مماس ایک سے کم ہوتا ہے اس لیے اس کا لوکارتم ہمیشہ منفی ہوگا۔ لیکن جو زاویہ ۴۵ اور ۹۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا مماس ایک سے بڑا ہوتا ہے اس لیے اس کا لوکارتم ہمیشہ مثبت ہوگا۔

۱۵۷- ہر ایک صورت میں مثلثی جملوں کے لوکارتموں کے ماقبل مناسب علامت تحریر کرنے کی محنت سے بچنے کے لیے جدولوں میں لوکارتموں کی اصلی قیمتیں نہیں لکھی جاتیں لیکن ہر ایک لوکارتم کی اصلی قیمت پر دس کا اضافہ کر دیا جاتا ہے۔

مثلاً جب ۳۰° = ½

اس لیے لوک جب ۳۰° = لوک ½ = - لوک ۲

= - ۳۰۱۰۳ء = ۱٫۶۹۸۹۷

لیکن جدولوں میں جو قیمت مندرج ہوگی وہ

۱۰ + لوک جب ۳۰° یعنی ۹٫۶۹۸۹۷ ہوگی

نیز مس ۶۰° = √۳

اس لیے لوک مس ۶۰° = ½ لوک ۳ = ½ (۴۷۷۱۲۱۳ء)

= ۲۳۸۵۶۰۶ء

اس لوکارتم کی قیمت جدولوں میں

۱۰ + ۲۳۸۵۶۰۶ء یعنی ۱۰٫۲۳۸۵۶۰۶ مندرج ہوگی۔

ان "جدولی لوکارتموں" کو ہم حرف ل سے تعبیر کریں گے۔

مثلاً ل جب ۱۵° ۲۵′ = ۱۰ + لوک جب ۱۵° ۲۵′

اور ل قط ۸۴° ۲۳′ = ۱۰ + لوک قط ۸۴° ۲۳′

۱۵۸- اگر کسی زاویہ میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو اُس کے کسی جملہ کا جدولی لوکارتم بلا واسطہ جدولوں سے حاصل ہوسکتا ہے، لیکن اگر زاویہ میں ثانیے بھی موجود ہوں تو اصول اجزائے متناسب کو استعمال کرنا چاہیے، اس صورت میں ترکیب عمل دفعہ ۱۵۳ کے بالکل مشابہ ہے۔ اب ہم اس کی اور اس کے اُلٹے سوال کی ایک ایک مثال حل کریں گے۔

مثال ۱- معلوم ہے ل قم ۳۲° ۲۱′ = ۱۰٫۲۷۱۵۷۳۳

اور ل قم ۳۲° ۲۲′ = ۱۰٫۲۷۱۳۷۴۰

ل قم ۳۲° ۲۱′ ۱۵″ کی قیمت دریافت کرو۔

جب زاویہ بقدر ۶۰″ کے بڑھتا ہے تو اس کا لوکارتم بقدر ۱۹۹۳۰۰۰ء کے گھٹتا ہے۔

اس لیے جب زاویہ بقدر ۱۵″ کے بڑھیگا تو لوکارتم میں تناسب کی برابر ۱۵/۶۰ × ۱۹۹۳۰۰۰ء

یعنی ۱۶۹۴۰۰۰ء کے ہوگی۔

پس ل قم ۳۲° ۲۱′ ۵۱″ = ۱۰٫۲۷۱۵۷۳۳

۰٫۰۰۰۱۶۹۴ -

= ۱۰٫۲۷۱۴۰۳۹

مثال ۲۔ ایک ایسا زاویہ معلوم کرو جس کے مماس کا جدولی لوکارتم ۹٫۴۴۱۷۲۵۰ ہو۔

فرض کرو کہ لا زاویہ مطلوبہ ہے۔

جدولوں سے حاصل ہوگا

ل مس لا = ۹٫۴۴۱۷۲۵۰

ل مس ۱۵° ۲۷′ = ۹٫۴۴۱۵۱۴۵

فرق = ۲۱۰۵

ل مس ۱۵° ۲۸′ = ۹٫۴۴۲۰۰۶۲

ل مس ۱۵° ۲۷′ = ۹٫۴۴۱۵۱۴۵

فرق ۱′ کے لیے = ۴۹۱۷

متناسب زیادتی = ۶۰″ × ۲۱۰۵ / ۴۹۱۷

= ۲۵٫۷″

۲۱۰۵

۶۰

۴۹۱۷) ۱۲۶۳۰۰ (۲۵٫۷

۹۸۳۴

۲۷۹۶۰

۲۴۵۸۵

۳۳۷۵۰

∴ لا = ۱۵° ۲۷′ ۲۵٫۷″

مثال ۳۔ معلوم ہے ل جب ۱۴° ۶′ = ۹٫۳۸۶۷۰۴۰

ل قم ۱۴° ۶′ کی قیمت دریافت کرو

لوک جب ۱۴° ۶′ = ل جب ۱۴° ۶′ - ۱۰

= -۱ + ٫۳۸۶۷۰۴۰

اب لوک قم ۱۴° ۶′ = لوک $\frac{1}{\text{جب } ۱۴° ۶′}$

= - لوک جب ۱۴° ۶′

= ۱ - ٫۳۸۶۷۰۴۰

= ٫۶۱۳۲۹۶۰

اِس لیے ل قم ۱۴° ۶′ = ۱۰٫۶۱۳۲۹۶۰

اور اس سے زیادہ عام صورت یہ ہے، چونکہ جب طہ × قم طہ = ۱

∴ لوک جب طہ + لوک قم طہ = ۰

∴ ل جب طہ + ل قم طہ = ۲۰

اس عمل میں اس قسم کی غلطی سے بچنا چاہیے، طالب علم بعض اوقات فرض کرتا ہے کہ

چونکہ لوک قم ۴۲° ۶' = - لوک جب ۴۲° ۶'

اس لیے ل قم ۴۲° ۶' = - لوک جب ۴۲° ۶'

اور یہ صریحاً غلط ہے۔

امثلہ نمبری ۲۴

۱۔ معلوم ہے لوک ۳۵۷۰۵ = ۴٫۵۵۲۷۲۹۰

اور لوک ۳۵۷۰۶ = ۴٫۵۵۲۷۴۱۲

لوک ۳۵۷۰٫۵۷ اور لوک ۳۵٫۷۰۵۸۵ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۔ معلوم ہے لوک ۵٫۸۷۴۲ = ٫۷۶۸۹۴۸۷

اور لوک ۵۸۷٫۴۳ = ۲٫۷۶۸۹۵۶۱

لوک ۵۸۷۴۲٫۵ اور لوک ۰٫۰۰۵۸۷۴۲۲ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ معلوم ہے لوک ۴۷۸۴٫۷ = ۳٫۶۷۹۸۵۴۷

اور لوک ۴۷۸۴٫۸ = ۳٫۶۷۹۸۶۳۸

اُن عددوں کو دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب

۲٫۶۷۹۸۵۹۳ اور $\bar{۳}$٫۶۷۹۸۶۱۷ ہوں

۴۔ معلوم ہے لوک ۲۵٫۸۳۶ = ۱٫۴۱۲۲۲۵۳

اور لوک ۲٫۵۸۳۷ = ٫۴۱۲۲۴۲۱

دو عدد دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب

٫۴۱۲۲۳۷۸ اور $\bar{۲}$٫۴۱۲۲۲۸۷ ہوں۔

۵۔ اس کتاب میں قبل ازیں عددوں کے لوکارتموں کی جدول کا کچھ حصہ جو بطور نمونہ کے دیا گیا ہے اُس کی مدد سے ذیل کے اعداد کے لوکارتم دریافت کرو۔

(۱) ۵۲۵۳۸٫۹۷ (۲) ۵۲۷٫۲۸۶ (۳) ٫۰۰۰۵۲۹۶۷۳ اور

وہ عدد دریافت کرو جن کے لوکارتم مفصلہ ذیل ہوں۔

(۴) ۳٫۷۲۲۱۰۹۸ (۵) ۲̅٫۷۲۴۰۰۷۵ (۶) ٫۷۲۱۰۳۸۶

۶۔ معلوم ہے جب ۴۳° ۲۳′ = ٫۶۸۶۸۷۶۱

اور جب ۴۳° ۲۴′ = ٫۶۸۷۰۸۷۵

جب ۴۳° ۲۳′ ۷٫۴″ کی قیمت دریافت کرو۔

۷۔ ایک زاویہ کی جیب ٫۶۸۷۰۳۴۹ ہے اس کو معلوم کرو۔

۸۔ معلوم ہے جم ۳۲° ۱۶′ = ٫۸۴۵۵۷۲۶

اور جم ۳۲° ۱۷′ = ٫۸۴۵۴۱۷۲

جم ۳۲° ۱۶′ ۴۴″ اور جم ۳۲° ۱۶′ ۷٫۴″ کی قیمت دریافت کرو۔

۹۔ نیز اُن زاویوں کو دریافت کرو جن کی جیوب التمام

٫۸۴۵۴۸۳۲ اور ٫۸۴۵۵۱۷۶ ہوں

۱۰۔ معلوم ہے مس ۷۶° ۲۱′ = ۴٫۱۱۷۷۷۸۴

اور مس ۷۶° ۲۲′ = ۴٫۱۲۳۰۰۷۹

مس ۷۶° ۲۱′ ۲۹″ اور مس ۷۶° ۲۱′ ۷٫۴″ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۱۔ معلوم ہے قم ۱۳° ۸′ = ۴٫۴۰۱۰۶۱۶

اور قم ۱۳° ۹′ = ۴٫۳۹۵۵۸۱۷

قم ۱۳° ۸′ ۱۹″ اور قم ۱۳° ۸′ ۷٫۳″ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۲۔ نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا قاطع التمام ۴٫۳۹۶۷۸۹ ہو

۱۳۔ معلوم ہے ل جم ۳۴° ۴۴′ = ۹٫۹۱۴۷۷۲۹

اور ل جم ۳۴° ۴۵′ = ۹٫۹۱۴۶۸۵۲

ل جم ۳۴° ۴۴′ ۷٫۴″ کی قیمت دریافت کرو۔

۱۴۔ نیز زاویہ ط معلوم کرو جہاں

ل جم ط = ۹٫۹۱۴۷۳۲۸

۱۵۔ معلوم ہے ل م ۱۱° ۲۷′ = ۹٫۵۲۵۷۷۷۹

اور
ل مم ا۸ ۲۸ = ۹،۵۲۵۳۵۸۹

ل مم ا۸ ۲۷ ۳۶ کی قیمت دریافت کرو۔

نیز مساوات ل مم ط = ۹،۵۲۵۴۷۸۲ کو حل کرو۔

۱۶- معلوم ہے

ل قط ۸ا ۲۷ = ۱۰،۰۲۲۹۱۶۸

اور
ل قط ۸ا ۲۸ = ۱۰،۰۲۲۹۵۹۰

ل قط ۸ا ۲۷ ۳۵ کی قیمت دریافت کرو۔

۱۷- نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا ل قط مساوی ہو ۱۰،۰۲۲۹۲۸۵ کے

۱۸- انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں وہ زاویہ معلوم کرو جس کی جیب ۶، ہو، معلوم ہے۔

لوک ۶ = ۷،۷۸۱۵۱۳

ل جب ۳۶ ۵۲ = ۹،۷۷۸۱۱۸۶

اور ل جب ۳۶ ۵۳ = ۹،۷۷۸۲۸۷۰

۱۵۹- اس جگہ صفحہ ۲۰۲ پر ہم چیمبر کی جدولوں سے ایک صفحہ بطور نمونہ کے دیتے ہیں، اس میں اُن سب زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے جدولی لوکارثم مندرج ہیں جو ۳۲ اور ۳۳ نیز ۷ اور ۸ کے درمیان واقع ہیں۔

پہلے خانے میں اُن سب زاویوں کی جدولی جیوب مندرج ہیں جو ۳۲ اور ۳۳ کے درمیان بقدر ایک منٹ یا دقیقہ کے بڑھتے ہیں۔

دوسرے خانے میں لفظ **فرق** کے نیچے عدد ۲۰۲۱ لکھا ہوا ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ ل جب ۳۲ ۰ اور ل جب ۳۲ ۱ کے درمیان فرق ۰،۰۰۰۲۰۲۱ ہے، اس کی تصدیق ۹،۷۲۴۲۰۹۷ کو ۹،۷۲۴۴۱۱۸ سے تفریق کرنے سے ہوسکتی ہے، نیز یاد رہے کہ عدد ۲۰۲۱ کو اعداد ۹،۷۲۴۲۰۹۷ اور ۹،۷۲۴۴۱۱۸ کے محاذی وسط میں کرکے لکھا گیا ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ اِن دو عددوں کے حاصل تفریق کو تعبیر کرتا ہے۔

دوسرا خانہ جس کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے بائیں طرف اُس خانہ کے بھی متعلق ہے جس کے راس پر قاطع التمام لکھا ہوا ہے۔

اسی طرح سے پانچواں خانہ جس میں متصل جدولی لوگارتموں کے فرق مندرج ہیں دائیں اور بائیں طرف دونوں خانوں کے متعلق ہے۔

۱۶۰۔ جن خانوں کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے اُن کے استعمال کرنے میں ایک بات یاد رکھنی چاہیے۔ اوپر اس کا ذکر ہو چکا ہے کہ دوسرے خانے میں سب سے اوپر جو عدد ۲۰۲۱ لکھا ہوا ہے درحقیقت اس کا مطلب ۰ء۰۰۰۲۰۲۱ ہے، لیکن آٹھویں خانہ کے سر پر جو عدد ۷۹۰ ہے اس کا مطلب ۰ء۰۰۰۷۹۰ نہیں ہے بلکہ ۰ء۰۰۰۰۷۹۰ ہے، قاعدہ یہ ہے کہ فرق میں جو ہندسہ دائیں طرف اکائی کے مقام پر ہو اُس کو ہمیشہ اعشاریہ کے ساتویں مقام پر رکھ کر بائیں طرف صفروں کی ضروری تعداد کا اضافہ کرنا چاہیے مثلاً

فرق	۹	کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۰ء۰۰۰۰۰۰۹ ہے
فرق	۷۴	〃 〃 〃 ۰ء۰۰۰۰۰۷۴ ہے
فرق	۷۳۵	〃 〃 〃 ۰ء۰۰۰۰۷۳۵ ہے
فرق	۲۰۲۱	〃 〃 〃 ۰ء۰۰۰۲۰۲۱ ہے
فرق	۱۲۳۴۸	〃 〃 〃 ۰ء۰۰۱۲۳۴۸ ہے

۱۶۱۔ جدول صفحات ۲۰۲ تا ۲۰۷ سے ۷۵° اور ۸۵° کے درمیان جو زاویے واقع ہوں اُن کی نسبتوں کے جدولی لوگارتم بھی معلوم ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ل مس ۵°، ۲۰′ مطلوب ہے، اگر ہم صفحۂ مذکور کی سب سے نیچے کی سطر سے شروع کر کے اُس خانے میں اوپر دیکھتے جائیں جس کے پائیں پر مماس لکھا ہوا ہے تو ہمیں ایک عدد ۱۰ء۱۹۳۰۲۸۶ ملیگا جس کے بائیں طرف افقی سطر کے آخر میں عدد ۲۰ لکھا ہوا ہے، یہ عدد ل مس ۵°، ۲۰′ کی قیمت ہے۔

لوکارتمی جیوب، مماس اور قاطع

۳۲ درجہ

′	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	′
۰	۹٫۷۲۴۲۰۹۷		۱۰٫۲۷۵۷۹۰۳	۹٫۷۹۵۷۸۹۲		۱۰٫۲۰۴۲۱۰۸	۱۰٫۰۷۱۵۷۹۵		۹٫۹۲۸۴۲۰۵	۶۰
		۲۰۲۱			۲۸۱۱			۷۹۰		
۱	۹٫۷۲۴۴۱۱۸		۱۰٫۲۷۵۵۸۸۲	۹٫۷۹۶۰۷۰۳		۱۰٫۲۰۳۹۲۹۷	۱۰٫۰۷۱۶۵۸۵		۹٫۹۲۸۳۴۱۵	۵۹
		۲۰۲۰			۲۸۱۰			۷۹۰		
۲	۹٫۷۲۴۶۱۳۸		۱۰٫۲۷۵۳۸۶۲	۹٫۷۹۶۳۵۱۳		۱۰٫۲۰۳۶۴۸۷	۱۰٫۰۷۱۷۳۷۵		۹٫۹۲۸۲۶۲۵	۵۸
		۲۰۱۸			۲۸۰۹			۷۹۱		
۳	۹٫۷۲۴۸۱۵۶		۱۰٫۲۷۵۱۸۴۴	۹٫۷۹۶۶۳۲۲		۱۰٫۲۰۳۳۶۷۸	۱۰٫۰۷۱۸۱۶۶		۹٫۹۲۸۱۸۳۴	۵۷
		۲۰۱۸			۲۸۰۸			۷۹۱		
۴	۹٫۷۲۵۰۱۷۴		۱۰٫۲۷۴۹۸۲۶	۹٫۷۹۶۹۱۳۰		۱۰٫۲۰۳۰۸۷۰	۱۰٫۰۷۱۸۹۵۷		۹٫۹۲۸۱۰۴۳	۵۶
		۲۰۱۵			۲۸۰۸			۷۹۲		
۵	۹٫۷۲۵۲۱۸۹		۱۰٫۲۷۴۷۸۱۱	۹٫۷۹۷۱۹۳۸		۱۰٫۲۰۲۸۰۶۲	۱۰٫۰۷۱۹۷۴۹		۹٫۹۲۸۰۲۵۱	۵۵
		۲۰۱۵			۲۸۰۷			۷۹۲		
۶	۹٫۷۲۵۴۲۰۴		۱۰٫۲۷۴۵۷۹۶	۹٫۷۹۷۴۷۴۵		۱۰٫۲۰۲۵۲۵۵	۱۰٫۰۷۲۰۵۴۱		۹٫۹۲۷۹۴۵۹	۵۴
		۲۰۱۳			۲۸۰۶			۷۹۳		
۷	۹٫۷۲۵۶۲۱۷		۱۰٫۲۷۴۳۷۸۳	۹٫۷۹۷۷۵۵۱		۱۰٫۲۰۲۲۴۴۹	۱۰٫۰۷۲۱۳۳۴		۹٫۹۲۷۸۶۶۶	۵۳
		۲۰۱۲			۲۸۰۵			۷۹۳		
۸	۹٫۷۲۵۸۲۲۹		۱۰٫۲۷۴۱۷۷۱	۹٫۷۹۸۰۳۵۶		۱۰٫۲۰۱۹۶۴۴	۱۰٫۰۷۲۲۱۲۷		۹٫۹۲۷۷۸۷۳	۵۲
		۲۰۱۱			۲۸۰۴			۷۹۴		
۹	۹٫۷۲۶۰۲۴۰		۱۰٫۲۷۳۹۷۶۰	۹٫۷۹۸۳۱۶۰		۱۰٫۲۰۱۶۸۴۰	۱۰٫۰۷۲۲۹۲۱		۹٫۹۲۷۷۰۷۹	۵۱
		۲۰۰۹			۲۸۰۴			۷۹۴		
۱۰	۹٫۷۲۶۲۲۴۹		۱۰٫۲۷۳۷۷۵۱	۹٫۷۹۸۵۹۶۴		۱۰٫۲۰۱۴۰۳۶	۱۰٫۰۷۲۳۷۱۵		۹٫۹۲۷۶۲۸۵	۵۰
		۲۰۰۸			۲۸۰۳			۷۹۵		
′	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	′

'	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	'
۱۱	۹٫۷۲۶۴۲۵۷		۱۰٫۲۷۳۵۷۴۳	۹٫۷۹۸۸۷۶۷		۱۰٫۲۰۱۱۲۳۳	۱۰٫۰۷۲۴۵۱۰		۹٫۹۲۷۵۴۹۰	۴۹
		۲۰۰۷			۲۸۰۲			۷۹۵		
۱۲	۹٫۷۲۶۶۲۶۴		۱۰٫۲۷۳۳۷۳۶	۹٫۷۹۹۱۵۶۹		۱۰٫۲۰۰۸۴۳۱	۱۰٫۰۷۲۵۳۰۵		۹٫۹۲۷۴۶۹۵	۴۸
		۲۰۰۵			۲۸۰۱			۷۹۶		
۱۳	۹٫۷۲۶۸۲۶۹		۱۰٫۲۷۳۱۷۳۱	۹٫۷۹۹۴۳۷۰		۱۰٫۲۰۰۵۶۳۰	۱۰٫۰۷۲۶۱۰۱		۹٫۹۲۷۳۸۹۹	۴۷
		۲۰۰۴			۲۸۰۰			۷۹۶		
۱۴	۹٫۷۲۷۰۲۷۳		۱۰٫۲۷۲۹۷۲۷	۹٫۷۹۹۷۱۷۰		۱۰٫۲۰۰۲۸۳۰	۱۰٫۰۷۲۶۸۹۷		۹٫۹۲۷۳۱۰۳	۴۶
		۲۰۰۳			۲۸۰۰			۷۹۷		
۱۵	۹٫۷۲۷۲۲۷۶		۱۰٫۲۷۲۷۷۲۴	۹٫۷۹۹۹۹۷۰		۱۰٫۲۰۰۰۰۳۰	۱۰٫۰۷۲۷۶۹۴		۹٫۹۲۷۲۳۰۶	۴۵
		۲۰۰۲			۲۷۹۹			۷۹۷		
۱۶	۹٫۷۲۷۴۲۷۸		۱۰٫۲۷۲۵۷۲۲	۹٫۸۰۰۲۷۶۹		۱۰٫۱۹۹۷۲۳۱	۱۰٫۰۷۲۸۴۹۱		۹٫۹۲۷۱۵۰۹	۴۴
		۲۰۰۰			۲۷۹۸			۷۹۸		
۱۷	۹٫۷۲۷۶۲۷۸		۱۰٫۲۷۲۳۷۲۲	۹٫۸۰۰۵۵۶۷		۱۰٫۱۹۹۴۴۳۳	۱۰٫۰۷۲۹۲۸۹		۹٫۹۲۷۰۷۱۱	۴۳
		۱۹۹۹			۲۷۹۸			۷۹۸		
۱۸	۹٫۷۲۷۸۲۷۷		۱۰٫۲۷۲۱۷۲۳	۹٫۸۰۰۸۳۶۵		۱۰٫۱۹۹۱۶۳۵	۱۰٫۰۷۳۰۰۸۷		۹٫۹۲۶۹۹۱۳	۴۲
		۱۹۹۸			۲۷۹۷			۷۹۹		
۱۹	۹٫۷۲۸۰۲۷۵		۱۰٫۲۷۱۹۷۲۵	۹٫۸۰۱۱۱۶۱		۱۰٫۱۹۸۸۸۳۹	۱۰٫۰۷۳۰۸۸۶		۹٫۹۲۶۹۱۱۴	۴۱
		۱۹۹۶			۲۷۹۶			۸۰۰		
۲۰	۹٫۷۲۸۲۲۷۱		۱۰٫۲۷۱۷۷۲۹	۹٫۸۰۱۳۹۵۶		۱۰٫۱۹۸۶۰۴۳	۱۰٫۰۷۳۱۶۸۶		۹٫۹۲۶۸۳۱۴	۴۰
		۱۹۹۶			۲۷۹۵			۸۰۰		
'	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	'

۳۲ درجہ

′	جیب التمام	فرق	قاطع	ماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	′
۳۹	۹٫۹۲۶۷۵۱۴		۱۰٫۰۷۳۲۴۸۶	۱۰٫۱۹۸۳۲۴۸		۹٫۸۰۱۶۷۵۲	۱۰٫۲۷۱۵۷۳۳		۹٫۷۲۸۴۲۶۷	۲۱
۳۸	۹٫۹۲۶۶۷۱۴	۸۰۰	۱۰٫۰۷۳۳۲۸۶	۱۰٫۱۹۸۰۴۵۴	۲۷۹۴	۹٫۸۰۱۹۵۴۶	۱۰٫۲۷۱۳۷۴۰	۱۹۹۳	۹٫۷۲۸۶۲۶۰	۲۲
۳۷	۹٫۹۲۶۵۹۱۳	۸۰۱	۱۰٫۰۷۳۴۰۸۷	۱۰٫۱۹۷۷۶۶۰	۲۷۹۴	۹٫۸۰۲۲۳۴۰	۱۰٫۲۷۱۱۷۴۷	۱۹۹۳	۹٫۷۲۸۸۲۵۳	۲۳
۳۶	۹٫۹۲۶۵۱۱۲	۸۰۱	۱۰٫۰۷۳۴۸۸۸	۱۰٫۱۹۷۴۸۶۷	۲۷۹۳	۹٫۸۰۲۵۱۳۳	۱۰٫۲۷۰۹۷۵۶	۱۹۹۱	۹٫۷۲۹۰۲۴۴	۲۴
۳۵	۹٫۹۲۶۴۳۱۰	۸۰۲	۱۰٫۰۷۳۵۶۹۰	۱۰٫۱۹۷۲۰۷۵	۲۷۹۲	۹٫۸۰۲۷۹۲۵	۱۰٫۲۷۰۷۷۶۶	۱۹۹۰	۹٫۷۲۹۲۲۳۴	۲۵
۳۴	۹٫۹۲۶۳۵۰۷	۸۰۳	۱۰٫۰۷۳۶۴۹۳	۱۰٫۱۹۶۹۲۸۴	۲۷۹۱	۹٫۸۰۳۰۷۱۶	۱۰٫۲۷۰۵۷۷۷	۱۹۸۹	۹٫۷۲۹۴۲۲۳	۲۶
۳۳	۹٫۹۲۶۲۷۰۴	۸۰۳	۱۰٫۰۷۳۷۲۹۶	۱۰٫۱۹۶۶۴۹۴	۲۷۹۰	۹٫۸۰۳۳۵۰۶	۱۰٫۲۷۰۳۷۸۹	۱۹۸۸	۹٫۷۲۹۶۲۱۱	۲۷
۳۲	۹٫۹۲۶۱۹۰۱	۸۰۳	۱۰٫۰۷۳۸۰۹۹	۱۰٫۱۹۶۳۷۰۴	۲۷۹۰	۹٫۸۰۳۶۲۹۶	۱۰٫۲۷۰۱۸۰۴	۱۹۸۶	۹٫۷۲۹۸۱۹۶	۲۸
۳۱	۹٫۹۲۶۱۰۹۶	۸۰۵	۱۰٫۰۷۳۸۹۰۴	۱۰٫۱۹۶۰۹۱۵	۲۷۸۹	۹٫۸۰۳۹۰۸۵	۱۰٫۲۶۹۹۸۱۸	۱۹۸۵	۹٫۷۳۰۰۱۸۲	۲۹
۳۰	۹٫۹۲۶۰۲۹۲	۸۰۴	۱۰٫۰۷۳۹۷۰۸	۱۰٫۱۹۵۸۱۲۷	۲۷۸۸	۹٫۸۰۴۱۸۷۳	۱۰٫۲۶۹۷۸۳۵	۱۹۸۳	۹٫۷۳۰۲۱۶۵	۳۰
		۸۰۵			۲۷۸۸			۱۹۸۳		
′	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	ماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	′

۳۲ درجہ

ʹ	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	ʹ
۲۹	۹٫۹۲۵۹۴۸۷		۱۰٫۰۷۴۰۵۱۳	۱۰٫۱۹۵۵۳۳۹		۹٫۸۰۴۴۶۶۱	۱۰٫۲۶۹۵۸۵۲		۹٫۷۳۰۴۱۴۸	۳۱
		۸۰۶			۲۷۸۶			۱۹۸۱		
۲۸	۹٫۹۲۵۸۶۸۱		۱۰٫۰۷۴۱۳۱۹	۱۰٫۱۹۵۲۵۵۳		۹٫۸۰۴۷۴۴۷	۱۰٫۲۶۹۳۸۷۱		۹٫۷۳۰۶۱۲۹	۳۲
		۸۰۶			۲۷۸۶			۱۹۸۰		
۲۷	۹٫۹۲۵۷۸۷۵		۱۰٫۰۷۴۲۱۲۵	۱۰٫۱۹۴۹۷۶۷		۹٫۸۰۵۰۲۳۳	۱۰٫۲۶۹۱۸۹۱		۹٫۷۳۰۸۱۰۹	۳۳
		۸۰۶			۲۷۸۶			۱۹۷۸		
۲۶	۹٫۹۲۵۷۰۶۹		۱۰٫۰۷۴۲۹۳۱	۱۰٫۱۹۴۶۹۸۱		۹٫۸۰۵۳۰۱۹	۱۰٫۲۶۸۹۹۱۳		۹٫۷۳۱۰۰۸۷	۳۴
		۸۰۸			۲۷۸۴			۱۹۷۷		
۲۵	۹٫۹۲۵۶۲۶۱		۱۰٫۰۷۴۳۷۳۹	۱۰٫۱۹۴۴۱۹۷		۹٫۸۰۵۵۸۰۳	۱۰٫۲۶۸۷۹۳۶		۹٫۷۳۱۲۰۶۴	۳۵
		۸۰۷			۲۷۸۴			۱۹۷۶		
۲۴	۹٫۹۲۵۵۴۵۳		۱۰٫۰۷۴۴۵۴۷	۱۰٫۱۹۴۱۴۱۳		۹٫۸۰۵۸۵۸۷	۱۰٫۲۶۸۵۹۶۰		۹٫۷۳۱۴۰۴۰	۳۶
		۸۰۸			۲۷۸۳			۱۹۷۵		
۲۳	۹٫۹۲۵۴۶۴۶		۱۰٫۰۷۴۵۳۵۴	۱۰٫۱۹۳۸۶۳۰		۹٫۸۰۶۱۳۷۰	۱۰٫۲۶۸۳۹۸۵		۹٫۷۳۱۶۰۱۵	۳۷
		۸۰۹			۲۷۸۲			۱۹۷۴		
۲۲	۹٫۹۲۵۳۸۳۷		۱۰٫۰۷۴۶۱۶۳	۱۰٫۱۹۳۵۸۴۸		۹٫۸۰۶۴۱۵۲	۱۰٫۲۶۸۲۰۱۱		۹٫۷۳۱۷۹۸۹	۳۸
		۸۰۹			۲۷۸۱			۱۹۷۲		
۲۱	۹٫۹۲۵۳۰۲۸		۱۰٫۰۷۴۶۹۷۲	۱۰٫۱۹۳۳۰۶۷		۹٫۸۰۶۶۹۳۳	۱۰٫۲۶۸۰۰۳۹		۹٫۷۳۱۹۹۶۱	۳۹
		۸۱۰			۲۷۸۱			۱۹۷۱		
۲۰	۹٫۹۲۵۲۲۱۸		۱۰٫۰۷۴۷۷۸۲	۱۰٫۱۹۳۰۲۸۶		۹٫۸۰۶۹۷۱۴	۱۰٫۲۶۷۸۰۶۸		۹٫۷۳۲۱۹۳۲	۴۰
		۸۱۰			۲۷۸۰			۱۹۷۰		
ʹ	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	ʹ

۵۷ درجہ

'	جیب التمام	فرق	قاطع	ماس التمام	فرق	ماس	قاطع التمام	فرق	جیب	'
۹	۹٫۹۲۴۳۲۷۷	۸۱۶	۱۰٫۰۷۵۶۷۲۳	۱۰٫۱۸۹۹۷۴۷	۲۷۷۲	۹٫۸۱۰۰۲۵۳	۱۰٫۲۶۵۶۴۷۱	۱۹۵۶	۹٫۷۳۴۳۵۲۹	۵۱
۸	۹٫۹۲۴۲۴۶۱	۸۱۷	۱۰٫۰۷۵۷۵۳۹	۱۰٫۱۸۹۶۹۷۵	۲۷۷۱	۹٫۸۱۰۳۰۲۵	۱۰٫۲۶۵۴۵۱۵	۱۹۵۵	۹٫۷۳۴۵۴۸۵	۵۲
۷	۹٫۹۲۴۱۶۴۳	۸۱۷	۱۰٫۰۷۵۸۳۵۶	۱۰٫۱۸۹۴۲۰۴	۲۷۷۰	۹٫۸۱۰۵۷۹۶	۱۰٫۲۶۵۲۵۶۰	۱۹۵۳	۹٫۷۳۴۷۴۴۰	۵۳
۶	۹٫۹۲۴۰۸۲۶	۸۱۷	۱۰٫۰۷۵۹۱۷۳	۱۰٫۱۸۹۱۴۳۴	۲۷۷۰	۹٫۸۱۰۸۵۶۶	۱۰٫۲۶۵۰۶۰۷	۱۹۵۲	۹٫۷۳۴۹۳۹۳	۵۴
۵	۹٫۹۲۴۰۰۱۰	۸۱۹	۱۰٫۰۷۵۹۹۹۰	۱۰٫۱۸۸۸۶۶۴	۲۷۶۹	۹٫۸۱۱۱۳۳۶	۱۰٫۲۶۴۸۶۵۵	۱۹۵۱	۹٫۷۳۵۱۳۴۵	۵۵
۴	۹٫۹۲۳۹۱۹۱	۸۱۸	۱۰٫۰۷۶۰۸۰۹	۱۰٫۱۸۸۵۸۹۵	۲۷۶۸	۹٫۸۱۱۴۱۰۵	۱۰٫۲۶۴۶۷۰۴	۱۹۵۰	۹٫۷۳۵۳۲۹۶	۵۶
۳	۹٫۹۲۳۸۳۷۳	۸۱۹	۱۰٫۰۷۶۱۶۲۷	۱۰٫۱۸۸۳۱۲۷	۲۷۶۸	۹٫۸۱۱۶۸۷۳	۱۰٫۲۶۴۴۷۵۴	۱۹۴۹	۹٫۷۳۵۵۲۴۶	۵۷
۲	۹٫۹۲۳۷۵۵۴	۸۲۰	۱۰٫۰۷۶۲۴۴۶	۱۰٫۱۸۸۰۳۵۹	۲۷۶۷	۹٫۸۱۱۹۶۴۱	۱۰٫۲۶۴۲۸۰۵	۱۹۴۷	۹٫۷۳۵۷۱۹۵	۵۸
۱	۹٫۹۲۳۶۷۳۴	۸۲۰	۱۰٫۰۷۶۳۲۶۶	۱۰٫۱۸۷۷۵۹۲	۲۷۶۶	۹٫۸۱۲۲۴۰۸	۱۰٫۲۶۴۰۸۵۸	۱۹۴۶	۹٫۷۳۵۹۱۴۲	۵۹
۰	۹٫۹۲۳۵۹۱۴		۱۰٫۰۷۶۴۰۸۶	۱۰٫۱۸۷۴۸۲۶		۹٫۸۱۲۵۱۷۴	۱۰٫۲۶۳۸۹۱۲		۹٫۷۳۶۱۰۸۸	۶۰
'	جیب	فرق	قاطع التمام	ماس	فرق	ماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	'

ر	جیب التمام	فرق	قاطع	ماس التمام	فرق	ماس	قاطع التمام	فرق	جیب
۱۹	۹٫۹۲۵۱۴۰۷		۱۰٫۰۷۴۸۵۹۳	۱۰٫۱۹۲۷۵۰۶		۹٫۸۰۷۲۴۹۴	۱۰٫۲۶۷۶۰۹۸		۹٫۷۳۲۳۹۰۲
		۸۱۱			۲۷۷۹			۱۹۶۸	
۱۸	۹٫۹۲۵۰۵۹۶		۱۰٫۰۷۴۹۴۰۴	۱۰٫۱۹۲۴۷۲۷		۹٫۸۰۷۵۲۷۳	۱۰٫۲۶۷۴۱۳۰		۹٫۷۳۲۵۸۷۰
		۸۱۱			۲۷۷۹			۱۹۶۷	
۱۷	۹٫۹۲۴۹۷۸۵		۱۰٫۰۷۵۰۲۱۵	۱۰٫۱۹۲۱۹۴۸		۹٫۸۰۷۸۰۵۲	۱۰٫۲۶۷۲۱۶۳		۹٫۷۳۲۷۸۳۷
		۸۱۲			۲۷۷۷			۱۹۶۶	
۱۶	۹٫۹۲۴۸۹۷۳		۱۰٫۰۷۵۱۰۲۷	۱۰٫۱۹۱۹۱۷۱		۹٫۸۰۸۰۸۲۹	۱۰٫۲۶۷۰۱۹۷		۹٫۷۳۲۹۸۰۳
		۸۱۳			۲۷۷۷			۱۹۶۵	
۱۵	۹٫۹۲۴۸۱۶۱		۱۰٫۰۷۵۱۸۳۹	۱۰٫۱۹۱۶۳۹۴		۹٫۸۰۸۳۶۰۶	۱۰٫۲۶۶۸۲۳۲		۹٫۷۳۳۱۷۶۸
		۸۱۲			۲۷۷۷			۱۹۶۳	
۱۴	۹٫۹۲۴۷۳۴۹		۱۰٫۰۷۵۲۶۵۱	۱۰٫۱۹۱۳۶۱۷		۹٫۸۰۸۶۳۸۳	۱۰٫۲۶۶۶۲۶۹		۹٫۷۳۳۳۷۳۱
		۸۱۴			۲۷۷۵			۱۹۶۲	
۱۳	۹٫۹۲۴۶۵۳۵		۱۰٫۰۷۵۳۴۶۵	۱۰٫۱۹۱۰۸۴۲		۹٫۸۰۸۹۱۵۸	۱۰٫۲۶۶۴۳۰۷		۹٫۷۳۳۵۶۹۳
		۸۱۴			۲۷۷۵			۱۹۶۱	
۱۲	۹٫۹۲۴۵۷۲۱		۱۰٫۰۷۵۴۲۷۹	۱۰٫۱۹۰۸۰۶۷		۹٫۸۰۹۱۹۳۳	۱۰٫۲۶۶۲۳۴۶		۹٫۷۳۳۷۶۵۴
		۸۱۴			۲۷۷۴			۱۹۶۰	
۱۱	۹٫۹۲۴۴۹۰۷		۱۰٫۰۷۵۵۰۹۳	۱۰٫۱۹۰۵۲۹۳		۹٫۸۰۹۴۷۰۷	۱۰٫۲۶۶۰۳۸۶		۹٫۷۳۳۹۶۱۴
		۸۱۵			۲۷۷۳			۱۹۵۸	
۱۰	۹٫۹۲۴۴۰۹۲		۱۰٫۰۷۵۵۹۰۸	۱۰٫۱۹۰۲۵۲۰		۹٫۸۰۹۷۴۸۰	۱۰٫۲۶۵۸۴۲۸		۹٫۷۳۴۱۵۷۲
		۸۱۵			۲۷۷۳			۱۹۵۷	

امثلہ نمبری ۲۵

۱- معلوم ہے جم طہ = ۹٫۲۵۳۸۲
جسم ۱۳° ۲' = ۹٫۲۵٫۳۳
فرق ۱' کے لیے = ٫٫٫٦
زاویہ طہ کی قیمت دریافت کرو

۲- ایک زاویے کی جیب ۳/۸ ہے اُس کو معلوم کرو۔
معلوم ہے جب ۲۲° ۱' = ۳٫۴۸٫۶۳
نیز ۱' کے لیے فرق = ۲۶۹٦

۳- معلوم ہے قم ۶۵° ۴۴' ۲' = ۱٫۰۹۹۸۲۴۳
فرق ۱' کے لیے = ۱۴٦۴
قم ۶۵° ۴۴' ۲۳' ۲۳" کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو
جس کا قاطع التمام ۱٫۰۹۹٫۹۳۸ ہو

۴- ل مس ۲۲° ۳' = ۹٫٦۱۹٫۲۰۵
فرق ۱' کے لیے = ٫۵۵۳
ل مس ۲۲° ۳' ۲۲" کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو۔
جس کا ل مس = ۹٫٦۱۹۵۲۸۳

۵- وہ زاویہ معلوم کرو جس کی ل جسم برابر ۹٫۹۹۳ کے ہو۔
معلوم ہے ل جم ۱۰° ۵' = ۹٫۹۹۳۰۱۳۱
اور فرق ۱' کے لیے = ۲۲۹

۶- وہ زاویہ دریافت کرو جس کا ل قط برابر ۱۰٫۱۵ کے ہو معلوم ہے
ل قط ۴۴° ۵۵' = ۱۰٫۱۴۹۸۸۴۳
اور ۱' کے لیے فرق = ۱۲٦۰

۷- جدول صفحات ۲۰۲ تا ۲۰۷ سے جملاتِ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔
(۱) ل جب ۳۲° ۱۸' ۴۳" (۲) ل جم ۲۲° ۱٦' ۹"

(۳) ل مم ۳۲° ۲۹′ ۴۳″ (۴) ل قط ۳۲° ۵۲′ ۴۷″

(۵) ل مس ۵۷° ۴۵′ ۲۸″ (۶) ل قم ۵۷° ۴۸′ ۲۱″

(۷) ل جم ۵۷° ۵۸′ ۲۹″

۸۔ اُسی جدول کی مدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) ل مس طہ = ۱۰٫۱۹۵۹۲۶۱

(۲) ل قم طہ = ۱۰٫۰۷۳۸۱۲۵

(۳) ل جم طہ = ۹٫۹۲۵۹۲۸۳

(۴) ل جب طہ = ۹٫۹۲۴۱۳۵۲

۹۔ جدولوں سے ل مس ۱۶° ۶′ ۲۳″ کی قیمت دریافت کرو اور مماس کے جذر کی قیمت کا حساب لگاؤ۔

۱۰۔ مقادیر ذیل کو لوکارثمی حسابات کے لیے موزوں بناؤ یعنی اُن کو حاصل ضرب کی صورت میں بیان کرو۔

(۱) ۱ + مس لا × مس ما (۲) ۱ − مس لا × مس ما

(۳) مم لا + مس ما (۴) مم لا − مس ما

(۵) (۱ − جم ۲ لا) / (۱ + جم ۲ لا) (۶) (مس لا + مس ما) / (مم لا + مم ما)

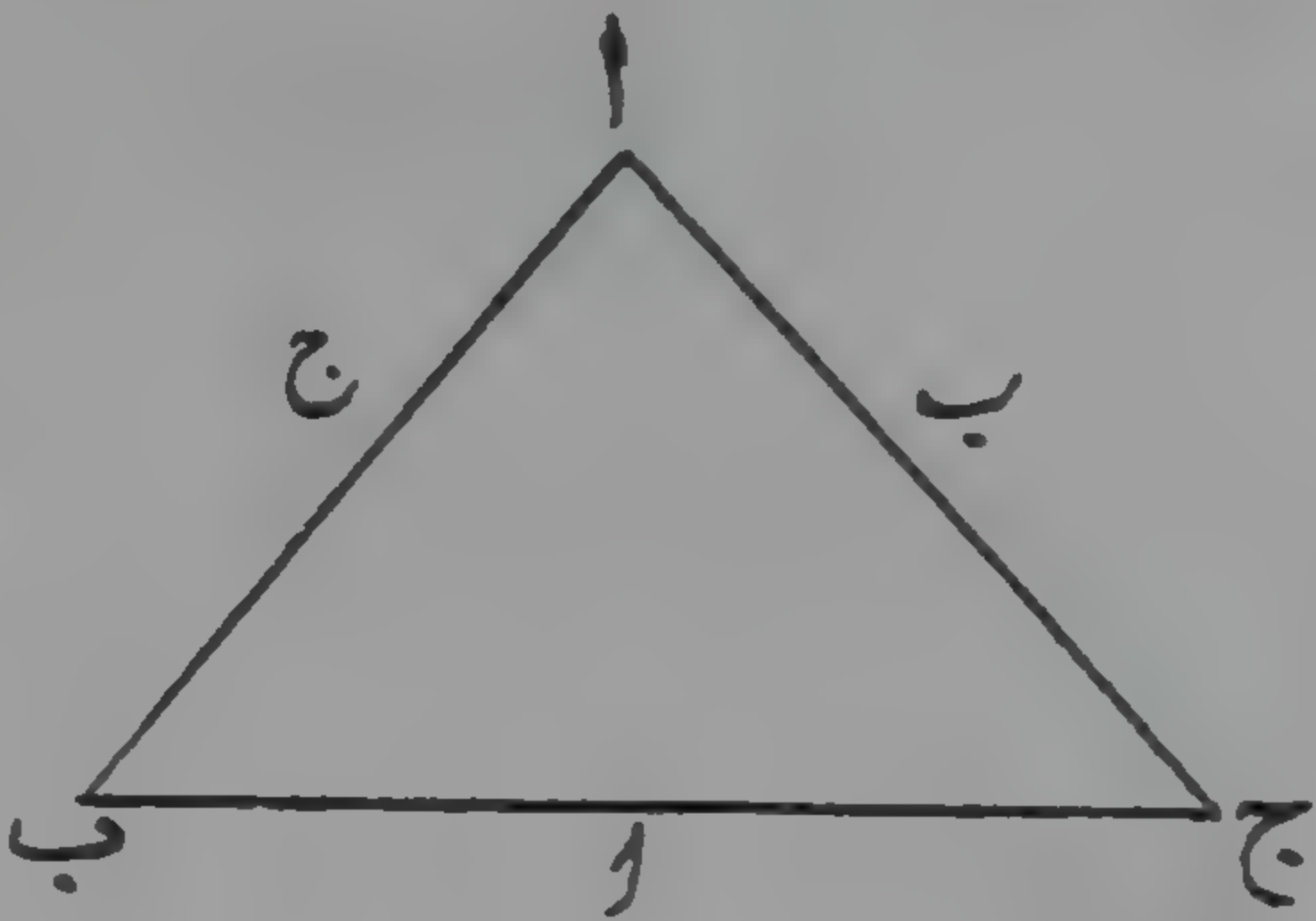
بارھواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے تعلقات

۱۶۲- مثلث کے زاویوں کو ہم آئندہ حروف ا، ب، ج سے اور ان کے مقابل کے اضلاع کو بالترتیب حروف ا، ب، ج سے تعبیر کرینگے۔

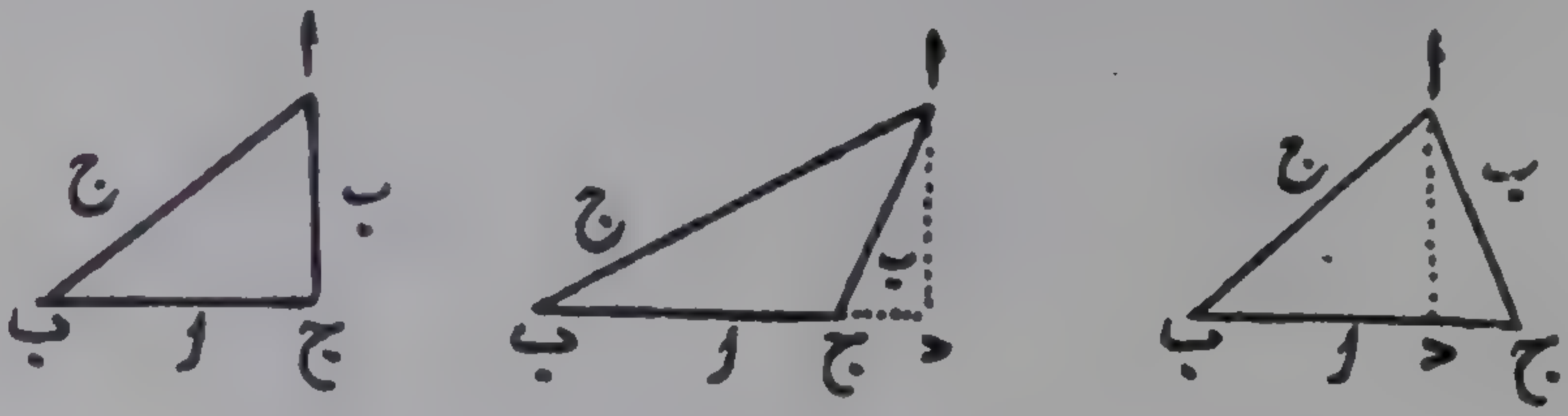
ب ج = ا

ج ا = ب

ا ب = ج

۱۶۳- مسئلہ۔ کسی مثلث اب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{ج}}$$

یعنی مثلث کے زاویوں کی جیوب مقابل کے اضلاع کے

متناسب ہوتی ہیں۔

زاویہ ا سے عمود ا د مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج ممدودہ پر نکالو جو اُس کو نقطہ د پر ملے۔

مثلث ا ب د میں

$$\frac{\text{ا د}}{\text{ا ب}} = \text{جب ب یعنی ا د = ج جب ب}$$

مثلث ا ج د میں

$$\frac{\text{ا د}}{\text{ا ج}} = \text{جب ج یعنی ا د = ب جب ج}$$

[اگر زاویہ ج منفرجہ ہو جیسا کہ دوسری شکل میں تو $\frac{\text{ا د}}{\text{ب}}$ = جب ا ج د
= جب (۱۸۰° - ج) = جب ج (دفعہ ۲۷) یعنی ا د = ب ۔ جب ج]

ا د کی یہ دونوں قیمتیں برابر رکھنے سے

$$\text{ج جب ب = ب جب ج}$$

یعنی

$$\frac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{ج}}$$

اسی طرح زاویہ ب سے ج ا پر عمود نکالنے سے حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{جب ج}}{\text{ج}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{ا}}$$

اگر زاویہ ج قائمہ ہو جیساکہ تیسری شکل میں تو جب ج = ۱

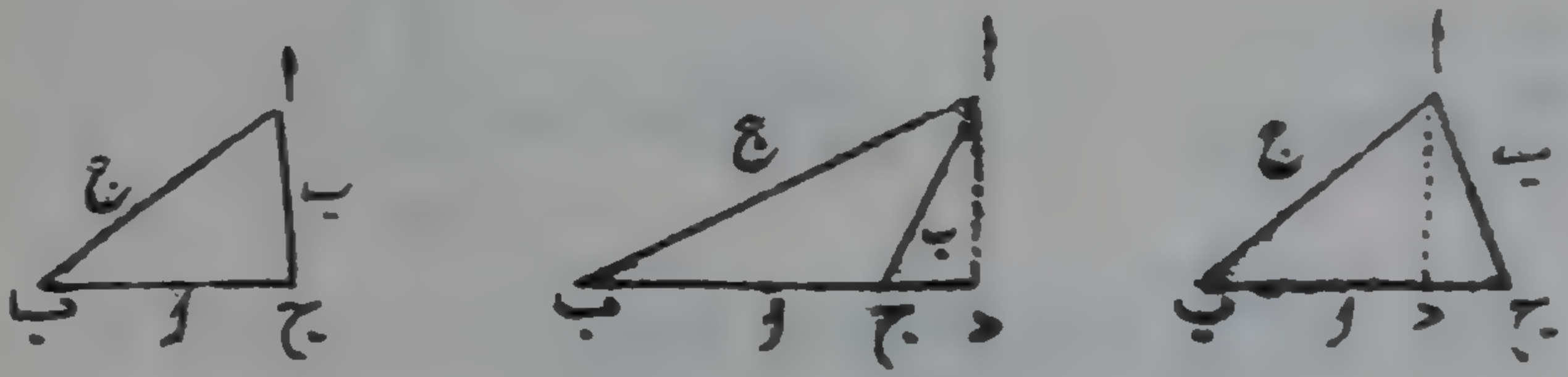
$$\text{جب ا} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \;\text{اور جب ب}= \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$$

اِس لیے

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ج}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{ج}}$$

پس ہرایک صورت میں

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{ج}}$$

۱۶۴- کسی مثلث میں کسی زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں اگر زاویہ ا سے عمود ا د مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج ممدودہ پر نکالا جائے تو وہ اس کو نقطہ د پر ملتا ہے۔

صورتِ اول- فرض کرو کہ زاویہ ج حادہ ہے دیکھو شکل اول

بموجب اقلیدس م ۲ ش ۱۳

$$\text{ا ب}^2 = \text{ب ج}^2 + \text{ج ا}^2 - 2\,\text{ب ج} \times \text{ج د} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

لیکن $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}} = \text{جم ج}$ یعنی $\text{ج د} = \text{ب جم ج}$

اس لیے (۱) سے حاصل ہوگا۔

$$\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{ا} \times \text{ب جم ج}$$

یعنی $$2\,\text{ا ب جم ج} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2$$

یعنی $$\text{جم ج} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2}{2\,\text{ا ب}}$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ زاویہ ج **منفرجہ** ہے جیسا کہ دوسری شکل میں۔

$$\text{اب}^2 = \text{ب ج}^2 + \text{ج ا}^2 + 2\,\text{ب ج} \times \text{ج د} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

لیکن $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}} = \text{جم ا ج د} = \text{جم}(180^\circ - \text{ج}) = -\,\text{جم ج}$

(دفعہ ۲۷)

پس $$\text{ج د} = -\,\text{ب جم ج}$$

اس لیے (۲) سے حاصل ہوگا

$$\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + 2\,\text{ا}\,(-\,\text{ب جم ج})$$
$$= \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{ا ب جم ج}$$

پس صورتِ اول کی طرح

$$\text{جم ج} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2}{2\,\text{ا ب}}$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب ج}}$$

اور $$\text{جم ب} = \frac{\text{ج}^2 + \text{ا}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{ج ا}}$$

اگر مثلث کا ایک زاویہ (مثلاً ج) قائمہ ہو تو اوپر کے ضابطے سے حاصل ہوگا $\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$ یعنی جم ج = ۰ اور یہ درست ہے کیونکہ زاویہ ج قائمہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ ج کی ہر ایک قیمت کے لیے ضابطہ درست ہے۔

مثال۔ اگر ا = ۱۵، ب = ۳۶، ج = ۳۹

تو
$$\text{جم ا} = \frac{\text{۳۶}^2 + \text{۳۹}^2 - \text{۱۵}^2}{\text{۲} \times \text{۳۶} \times \text{۳۹}}$$

$$= \frac{\text{۳}^2(\text{۱۲}^2 + \text{۱۳}^2 - \text{۵}^2)}{\text{۲} \times \text{۳}^2 \times \text{۱۲} \times \text{۱۳}} = \frac{\text{۲۸۸}}{\text{۱۳} \times \text{۲۴}} = \frac{\text{۱۲}}{\text{۱۳}}$$

۱۶۵۔ مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

کسی مثلث میں بموجب دفعہ ۱۶۴

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{\text{۲ب ج}}$$

لیکن بموجب دفعہ ۱۰۹

$$\text{جم ا} = \text{۱} - \text{۲ جب}^2 \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$$

اس لیے
$$\text{۲ جب}^2 \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \text{۱} - \text{جم ا} = \text{۱} - \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{\text{۲ب ج}}$$

$$= \frac{\text{۲ب ج} - \text{ب}^2 - \text{ج}^2 + \text{ا}^2}{\text{۲ب ج}}$$

$$= \frac{\text{ا}^2 - (\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{۲ب ج})}{\text{۲ب ج}} = \frac{\text{ا}^2 - (\text{ب} - \text{ج})^2}{\text{۲ب ج}}$$

$$= \frac{[\text{ا} + (\text{ب} - \text{ج})][\text{ا} - (\text{ب} - \text{ج})]}{\text{۲ب ج}}$$

$= \frac{(ا + ب - ج)(ا - ب + ج)}{۲ ب ج}$ .... (۱)

فرض کرو کہ ۲ س = ا + ب + ج یعنی س مثلث کے نصف مجموعۂ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے۔

تب ا + ب - ج = ا + ب + ج - ۲ ج = ۲ س - ۲ ج

$= ۲ (س - ج)$

اور ا - ب + ج = ا + ب + ج - ۲ ب = ۲ س - ۲ ب

$= ۲ (س - ب)$

ربط (۱) سے حاصل ہوگا

$$۲ \text{ جب}^۲ \frac{ا}{۲} = \frac{۲ (س - ج) \times ۲ (س - ب)}{۲ ب ج}$$

$$= ۲ \frac{(س - ب)(س - ج)}{ب ج}$$

$$\therefore \quad \text{جب} \frac{ا}{۲} = \sqrt{\frac{(س - ب)(س - ج)}{ب ج}} \quad .... (۲)$$

اسی طرح سے $\quad \text{جب} \frac{ب}{۲} = \sqrt{\frac{(س - ج)(س - ا)}{ج ا}}$

اور $\quad \text{جب} \frac{ج}{۲} = \sqrt{\frac{(س - ا)(س - ب)}{ا ب}}$

۱۶۶۔ مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

بموجب دفعہ ۱۰۹

$$\text{جم} ا = ۲ \text{ جم}^۲ \frac{ا}{۲} - ۱$$

اس لیے $۲\,\text{جم}^۲\,\frac{۱}{۲}\text{ا} = ۱ + \text{جم ا} = ۱ + \frac{\text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{ا}^۲}{۲\,\text{ب ج}}$

$$= \frac{۲\,\text{ب ج} + \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{ا}^۲}{۲\,\text{ب ج}} = \frac{(\text{ب} + \text{ج})^۲ - \text{ا}^۲}{۲\,\text{ب ج}}$$

$$= \frac{[(\text{ب} + \text{ج}) + \text{ا}][(\text{ب} + \text{ج}) - \text{ا}]}{۲\,\text{ب ج}}$$

$$= \frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})}{۲\,\text{ب ج}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب $\text{ب} + \text{ج} - \text{ا} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - ۲\text{ا} = ۲\text{س} - ۲\text{ا}$

$$= ۲(\text{س} - \text{ا})$$

پس (۱) سے حاصل ہوگا۔

$$۲\,\text{جم}^۲\,\frac{۱}{۲}\text{ا} = \frac{۲\text{س} \times ۲(\text{س} - \text{ا})}{۲\,\text{ب ج}} = ۲\,\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ا})}{\text{ب ج}}$$

$$\therefore \quad \text{جم}\,\frac{۱}{۲}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ا})}{\text{ب ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اسی طرح سے $\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ب})}{\text{ا ج}}}$

اور $\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ج})}{\text{ا ب}}}$

۱۶۷۔ نصف زاویوں کے مماسات کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

$$\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{ا} = \frac{\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{ا}}{\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\text{ا}}$$

اس لیے بموجب (۲) دفعات ۱۶۵ اور ۱۶۶

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{ب ج}}} \div \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}}$$

اسی طرح سے

$$\text{مس}\ \frac{\text{ب}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ج})(\text{س}-\text{ا})}{\text{س}(\text{س}-\text{ب})}} \quad \text{اور} \quad \text{مس}\ \frac{\text{ج}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ا})(\text{س}-\text{ب})}{\text{س}(\text{س}-\text{ج})}}$$

چونکہ ہر ایک مثلث میں زاویہ ا ہمیشہ $< 180^\circ$ اس لیے $\tfrac{1}{2}$ا ہمیشہ $< 90^\circ$
اس لیے $\tfrac{1}{2}$ا کی جیب، جیب التمام اور مماس ہمیشہ مثبت ہونگے

(دفعہ ۵۲)

اس لیے معلوم ہوا کہ اس دفعہ میں اور گزشتہ دو دفعات میں علامات جذر کے ماقبل ہمیشہ مثبت علامت لینی چاہیے۔

۱۶۸- مثال- اگر ا = ۱۳، ب = ۱۴ اور ج = ۱۵

تو $\text{س} = \frac{13+14+15}{2} = 21$، $\text{س}-\text{ا} = 8$، $\text{س}-\text{ب} = 7$

اور $\text{س}-\text{ج} = 6$

اس لیے $\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{6\times7}{15\times14}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

$$\text{جب}\ \frac{\text{ب}}{2} = \sqrt{\frac{8\times6}{13\times15}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4}{65}\sqrt{65}$$

$$\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{۲}=\sqrt{\frac{۲۱\times۶}{۱۴\times۱۴}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۳}{۱۳}\sqrt{۱۳}$$

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب}}{۲}=\sqrt{\frac{۸\times۶}{۷\times۲۱}}=\frac{۴}{۷}$$

۱۶۹- مثلث کے کسی زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

بموجب دفعہ ۱۰۹

$$\text{جب ا}=۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{ا}\;\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\text{ا}$$

لیکن دفعات گزشتہ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{ا}=\sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{ب ج}}}\quad\text{اور جم}\,\frac{۱}{۲}\text{ا}=\sqrt{\frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}}}$$

اس لیے

$$\text{جب ا}=۲\sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{ب ج}}}\sqrt{\frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}}}$$

$$\therefore\ \text{جب ا}=\frac{۲}{\text{ب ج}}\sqrt{\text{س}(\text{س}-\text{ا})(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}$$

امثلہ نمبری (۲۶)

کسی مثلث میں

۱- معلوم ہے۔ ا = ۲۵، ب = ۵۲ اور ج = ۶۳

مس $\frac{\text{ا}}{۲}$، مس $\frac{\text{ب}}{۲}$ اور مس $\frac{\text{ج}}{۲}$ معلوم کرو۔

۲- معلوم ہے ا = ۱۲۵، ب = ۱۲۳ اور ج = ۶۲

مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب اور زاویوں کی جیوب دریافت کرو۔

۳- معلوم ہے ا = ۱۸، ب = ۲۴ اور ج = ۳۰

جب ا، جب ب، جب ج دریافت کرو۔

ہر صورت میں ترسیمی عمل سے تصدیق کرو۔

۴- معلوم ہے۔ ا = ۳۵، ب = ۸۴ اور ج = ۹۱

مس ا، مس ب، مس ج دریافت کرو

۵- معلوم ہے ا = ۱۳، ب = ۱۴ اور ج = ۱۵

زاویوں کی جیوب دریافت کرو۔ نیز عمل ترسیمی سے اپنے نتائج کی تصدیق کرو۔

۶- معلوم ہے ا = ۲۸۷، ب = ۸۱۶، ج = ۸۶۵

مس (ا/۲) اور مس ا کی قیمتیں دریافت کرو۔

۷- معلوم ہے ا = √۳، ب = √۲ اور ج = (√۶ + √۲)/۲

مثلث کے زاویے دریافت کرو۔

۱۷۰- ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

ا = ب جم ج + ج جم ب

دیکھو شکل دفعہ ۱۶۴

صورت اول میں

ب د / ب ا = جم ب یعنی ب د = ج جم ب

اور ج د / ج ا = جم ج یعنی ج د = ب جم ج

اس لیے ا = ب ج = ب د + د ج = ج جم ب + ب جم ج

صورت دوم میں

ب د / ب ا = جم ب یعنی ب د = ج جم ب

اور $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ۲}} = \text{جم ا ج د} = \text{جم} (۱۸۰ - \text{ج})$

$= -\text{جم ج}$ (دفعہ ۷۲)

پس $\text{ج د} = -\text{ب جم ج}$

اس لیے اس صورت میں

$\text{ا} = \text{ب ج} = \text{ب د} - \text{ج د} = \text{ج جم ب} - (-\text{ب جم ج})$

پس ہر ایک صورت میں

$$\text{ا} = \text{ب جم ج} + \text{ج جم ب}$$

اسی طرح سے $\text{ب} = \text{ج جم ا} + \text{ا جم ج}$

اور $\text{ج} = \text{ا جم ب} + \text{ب جم ا}$

۱۷۱۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\text{مس} \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} \text{ مم } \frac{\text{ا}}{۲}$$

کسی مثلث میں

$$\frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ج}}$$

$$\therefore \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} = \frac{\text{جب ب} - \text{جب ج}}{\text{جب ب} + \text{جب ج}} = \frac{۲ \text{ جم } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲}}{۲ \text{ جب } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲}}{\text{مس } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲}} = \frac{\text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲}}{\text{مس } (۹۰ - \frac{\text{ا}}{۲})}$$

$$= \frac{\text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲}}{\text{مم } \frac{\text{ا}}{۲}} \quad \text{(دفعہ ۶۹)}$$

اس لیے　$مس \frac{ب-ج}{۲} = \frac{ب-ج}{ب+ج} مم \frac{ا}{۲}$

۱۷۲- دفعہ ۱۶۴ کے ضابطوں سے ضوابط دفعہ ۱۷۰ حاصل ہو سکتے ہیں اور بر عکس اس کے۔

دفعہ ۱۶۴ کے پہلے اور تیسرے ضابطے سے حاصل ہوگا۔

$$ب جم ج + ج جم ب = \frac{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}{۲ ا} + \frac{ج^۲ + ا^۲ - ب^۲}{۲ ا}$$

$$= \frac{۲ ا^۲}{۲ ا} = ا$$

اس لیے　$ا = ب جم ج + ج جم ب$

اسی طرح سے دفعہ ۱۷۰ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں

نیز دفعہ ۱۷۰ کے تین ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے۔

$$ا = ب جم ج + ج جم ب$$

$$ب = ج جم ا + ا جم ج$$

اور　$ج = ا جم ب + ب جم ا$

ان تینوں کو بالترتیب ا، ب، - ج سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$ا^۲ + ب^۲ - ج^۲ = ا (ب جم ج + ج جم ب)$$

$$+ ب (ج جم ا + ا جم ج) - ج (ا جم ب + ب جم ا) = ۲ ا ب جم ج$$

$$\therefore جم ج = \frac{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}{۲ ا ب}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۶۴ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۷۳- طالب علم کو اکثر ایسی متماثلہ مساواتیں حل کرنی پڑینگی جن میں مثلث کے اضلاع اور زاویے دونوں شامل ہوں، ایسی صورت میں بہتر ہوگا کہ وہ ضلعوں کو زاویوں کی رقوم میں یا زاویوں کی نسبتوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرے۔

مثال ۱ - ثابت کرو کہ $\text{ا}\ \text{جم}\ \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = (\text{ب} + \text{ج})\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}$

بموجب دفعہ ۱۶۳

$$\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ب} + \text{جب ج}}{\text{جب ا}} = \frac{۲\ \text{جب}\ \frac{\text{ب}+\text{ج}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{۲\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}} = \frac{\text{جم}\ \frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$\therefore\ (\text{ب}+\text{ج})\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲} = \text{ا}\ \text{جم}\ \frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}$$

مثال ۲ - ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(\text{ب}^۲ - \text{ج}^۲)\ \text{مم ا} + (\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲)\ \text{مم ب} + (\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\ \text{مم ج} = ۰$$

بموجب دفعہ ۱۶۳

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{ج}} = \text{ک}\ \ (\text{فرض کرو})$$

پس جملہ معلومہ

$$= (\text{ب}^۲ - \text{ج}^۲)\frac{\text{جم ا}}{\text{ا ک}} + (\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲)\frac{\text{جم ب}}{\text{ب ک}} + (\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\frac{\text{جم ج}}{\text{ج ک}}$$

$$= \frac{۱}{\text{ک}}\Big[(\text{ب}^۲ - \text{ج}^۲)\frac{\text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{ا}^۲}{۲\ \text{ا ب ج}} + (\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲)\frac{\text{ج}^۲ + \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}{۲\ \text{ا ب ج}}$$

$$+ (\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\frac{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲}{۲\ \text{ا ب ج}}\Big]$$

$$= \frac{۱}{۲\ \text{ا ب ج ک}}\Big[\text{ب}^۴ - \text{ج}^۴ - \text{ا}^۲(\text{ب}^۲ - \text{ج}^۲) + \text{ج}^۴ - \text{ا}^۴$$

$$-ب^2(ج^2-ا^2)+ا^2-ب^2-ج^2(ا^2-ب^2)\,] = ۰$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(ا+ب+ج)\left(\text{مس}\,\frac{ا}{۲}+\text{مس}\,\frac{ب}{۲}\right)=۲ج\;\text{مم}\,\frac{ج}{۲}$$

دائیں طرف کا رکن

$$=۲س\left[\sqrt{\frac{(س-ب)(س-ج)}{س(س-ا)}}+\sqrt{\frac{(س-ج)(س-ا)}{س(س-ب)}}\right] \quad \text{دفعہ ۱۶۷}$$

$$=۲س\sqrt{\frac{س-ج}{س}}\left[\sqrt{\frac{س-ب}{س-ا}}+\sqrt{\frac{س-ا}{س-ب}}\right]$$

$$=۲\sqrt{س(س-ج)}\left[\frac{س-ب+س-ا}{\sqrt{(س-ا)(س-ب)}}\right]$$

$$=\frac{۲\sqrt{س(س-ج)}\times ج}{\sqrt{(س-ا)(س-ب)}} \quad \text{چونکہ } ۲س=ا+ب+ج$$

$$=۲ج\;\text{مم}\,\frac{ج}{۲}$$

یہ مماثلہ اضلاع کو زاویوں کی رقوم میں بیان کرنے سے بھی

ثابت ہو سکتی ہے دفعہ ۱۶۳ کی مدد سے

$$\frac{ا+ب+ج}{ج}=\frac{\text{جب}\,ا+\text{جب}\,ب+\text{جب}\,ج}{\text{جب}\,ج}$$

$$= \frac{\text{۴ جم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{۲ جب}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}} \quad \text{دفعہ ۱۲۷}$$

$$= \frac{\text{۲ جم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}$$

نیز

$$\frac{\text{۲ مم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}+\text{مس}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۲ جم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\left[\text{جب}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}+\text{جم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ جب}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\right]}$$

$$= \frac{\text{۲ جم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\text{ جب}\frac{\text{ا+ب}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۲ جم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ جم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}} \quad (\text{دفعہ ۶۹})$$

اس لیے

$$\frac{\text{ا+ب+ج}}{\text{ج}} = \frac{\text{۲ مم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}+\text{مس}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}$$

یعنی

$$(\text{ا+ب+ج})\left(\text{مس}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}+\text{مس}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\right) = \text{۲ ج مم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$$

مثال ۴۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نصف زاویوں کے مماس التمام بھی سلسلۂ حسابیہ میں ہونگے۔

معلوم ہے ا + ج = ۲ ب .... (۱)

اور ثابت کرنا مطلوب ہے۔

$$\text{مم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}+\text{مم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}} = \text{۲ مم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}} \quad \text{.................... (۲)}$$

ربط (۲) درست ہوگا اگر

$$\sqrt{\frac{س(س-ا)}{(س-ب)(س-ج)}}+\sqrt{\frac{س(س-ج)}{(س-ا)(س-ب)}}$$

$$=۲\sqrt{\frac{س(س-ب)}{(س-ج)(س-ا)}}$$

یا طرفین کو $\sqrt{\frac{(س-ا)(س-ب)(س-ج)}{س}}$ میں ضرب دینے سے ربط (۲) درست ہوگا۔

اگر $(س-ا)+(س-ج)=۲(س-ب)$

یعنی اگر $۲س-(ا+ج)=۲س-۲ب$

یعنی اگر $ا+ج=۲ب$ جو ربط (۱) ہے

پس معلوم ہوا کہ اگر ربط (۱) صحیح ہو تو ربط (۲) بھی صحیح ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۷

ثابت کرو کہ کسی مثلث ا ب ج میں

۱- $جب\,\frac{ب-ج}{۲}=\frac{ب-ج}{ا}\,جم\,\frac{ا}{۲}$

۲- $ب^{۲}\,جب\,۲ج+ج^{۲}\,جب\,۲ب=۲ب\,ج\,جب\,ا$

۳- $ا(ب\,جم\,ج-ج\,جم\,ب)=ب^{۲}-ج^{۲}$

۴- $(ب+ج)\,جم\,ا+(ج+ا)\,جم\,ب+(ا+ب)\,جم\,ج=ا+ب+ج$

۵- $ا(جم\,ب+جم\,ج)=۲(ب+ج)\,جب^{۲}\,\frac{ا}{۲}$

۶- ا (جم ج − جم ب) = ۲ (ب − ج) جم² ۱/۲

۷- جب (ب − ج) / جب (ب + ج) = (ب² − ج²) / ا²

۸- (ا + ب) / (ا − ب) = مس (ا + ب)/۲ مم (ا − ب)/۲

۹- ا جب (۱/۲ + ب) = (ب + ج) جب ۱/۲

۱۰- ا² جب (ب − ج) / (جب ب + جب ج) + ب² جب (ج − ا) / (جب ج + جب ا) + ج² جب (ا − ب) / (جب ا + جب ب) = ۰

۱۱- (ب + ج − ا) (مم ب/۲ + مم ج/۲) = ۲ ا مم ۱/۲

۱۲- ا² + ب² + ج² = ۲ (ب ج جم ا + ج ا جم ب + ا ب جم ج)

۱۳- (ا² − ب² + ج²) مس ب = (ا² + ب² − ج²) مس ج

۱۴- ج² = (ا − ب)² جم² ج/۲ + (ا + ب)² جب² ج/۲

۱۵- ا جب (ب − ج) + ب جب (ج − ا) + ج جب (ا − ب) = ۰

۱۶- ا جب (ب − ج) / (ب² − ج²) = ب جب (ج − ا) / (ج² − ا²) = ج جب (ا − ب) / (ا² − ب²)

۱۷- ا جب ۱/۲ جب (ب − ج)/۲ + ب جب ب/۲ . جب (ج − ا)/۲

+ ج جب ج/۲ جب (ا − ب)/۲ = ۰

۱۸- ا² (جم² ب − جم² ج) + ب² (جم² ج − جم² ا)

+ ج² (جم² ا − جم² ب) = ۰

۱۹- $\frac{ب^2 - ج^2}{ا^2}$ جب ۲ ا + $\frac{ج^2 - ا^2}{ب^2}$ جب ۲ ب

+ $\frac{ا^2 - ب^2}{ج^2}$ جب ۲ ج = ۰

۲۰- $\frac{(ا + ب + ج)}{ا^2 + ب^2 + ج^2} = \frac{\text{مم } \frac{ا}{۲} + \text{مم } \frac{ب}{۲} + \text{مم } \frac{ج}{۲}}{\text{مم } ا + \text{مم } ب + \text{مم } ج}$

۲۱- $ا^3$ جم (ب - ج) + $ب^3$ جم (ج - ا) + $ج^3$ جم (ا - ب) = ۳ ا ب ج

۲۲- اگر کسی مثلث کے اضلاع ۳، ۴، $\sqrt{۳۸}$ فٹ ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا سب سے بڑا زاویہ ۱۲۰° سے بڑا ہوگا۔

۲۳- ایک مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع ۲۱ اور ۲۸ فٹ ہیں، اگر قائم الزاویہ سے وتر پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول دریافت کرو۔

۲۴- اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱ : ۲ : ۳ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے مقابل کے اضلاع کی نسبتیں ۱ : $\sqrt{۳}$: ۲ ہونگی۔

۲۵- اگر کسی مثلث میں

مس $\frac{ا}{۲} = \frac{۵}{۶}$ اور مس $\frac{ب}{۲} = \frac{۲۰}{۳۷}$

تو مس $\frac{ج}{۲}$ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس مثلث میں ا + ج = ۲ ب

۲۶- کسی قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث میں ایک مستقیم خط مساوی ضلعوں میں سے ایک ضلع کے وسطی نقطہ کو مقابل کے زاویے سے ملاتا ہے، ثابت کرو کہ یہ زاویے کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مماس التمام ۲ اور ۳ ہیں۔

کسی مثلث ا ب ج میں عمود ا د قاعدے کو ایسے دو حصوں میں

تقسیم کرتا ہے کہ خطوط ب د ج د اور ا د کی باہمی نسبتیں ۲، ۳، ۶ ہیں، ثابت کرو کہ مثلث کا راسی زاویہ ۵ ہ ہے۔

۲۸۔ ایک وزن دار حلقہ کا قطر ۱۰ انچ ہے اور وہ ایک نقطہ سے جس کا راسی فاصلہ مرکز سے ۱ فٹ ہے چھ مساوی رسیوں کے ذریعہ جو محیط کے ساتھ برابر برابر فاصلوں پر بندھی ہوئی ہیں آویزاں ہے، متصل رسیوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام دریافت کرو۔

۲۹۔ اگر ا^۲، ب^۲، ج^۲ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ مم ا، مم ب، مم ج بھی سلسلۂ حسابیہ میں ہوں گے۔

۳۰۔ اگر ا، ب، ج سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جم ا مم $\frac{۱}{۲}$، جم ب مم $\frac{ب}{۲}$ اور جم ج مم $\frac{ج}{۲}$ بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔

۳۱۔ اگر ا، ب، ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جب^۲ $\frac{۱}{۲}$، جب^۲ $\frac{ب}{۲}$ اور جب^۲ $\frac{ج}{۲}$ بھی سلسلہ موسیقیہ میں ہوں گے۔

۳۲۔ ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ بالترتیب طہ اور فہ ہے، ثابت کرو کہ

۴ (۱ - جم طہ) (۱ - جم فہ) = جم طہ + جم فہ

۳۳۔ ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا زاویہ سب سے چھوٹے زاویے سے بقدر °۹۰ کے زیادہ ہے، ثابت کرو کہ اضلاع $\sqrt{۷}+۱$، $\sqrt{۷}$ اور $\sqrt{۷}-۱$ کے متناسب ہیں۔

۳۴۔ اگر ج = °۶۰ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ا + ج} + \frac{۱}{ب + ج} = \frac{۳}{ا + ب + ج}$$

۳۵۔ اگر کسی مثلث ا ب ج میں قاعدہ ب ج پر ایک ایسا نقطہ د لیں کہ ب د : د ج :: م : ن اور اگر

∠ ب ا د = عہ، ∠ د ا ج = بہ، ∠ ج د ا = طہ اور
ا د = لا تو ثابت کرو کہ

(م + ن) مم طہ = م مم عہ - ن مم بہ
= ن مم ب - م مم ج

اور (م + ن)² × لا² = (م + ن)(م ب² + ن ج²) - م ن ا²

۳۶- اگر کسی مثلث میں ضلع ج کا منصف ضلع ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ

۲ مس ا + مس ج = ۰

۳۷- ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث میں طہ کوئی زاویہ ہو تو

ب جم طہ = ج جم (ا - طہ) + ا جم (ج + طہ)

۳۸- اگر کسی مثلث کے زاویوں ا اور ب سے دو عمود ع اور م ایک ایسے خط پر نکالے جائیں جو مثلث کے راس ج میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ

ا² ع² + ب² م² - ۲ ا ب ع م جم ج = ا² ب² جب² ج

۳۹- کسی مثلث ا ب ج میں خطوط و ا، و ب اور و ج اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

∠ و ا ب = ∠ و ب ج = ∠ و ج ا = سہ
تو ثابت کرو کہ

مم سہ = مم ا + مم ب + مم ج
قم² سہ = قم² ا + قم² ب + قم² ج

تیرہواں باب

مثلثوں کا حل

۱۷۴۔ کسی مثلث کے تین ضلعوں اور تین زاویوں کو مثلث کے اجزا کہتے ہیں اگر کوئی سے تین اجزا کسی مثلث کے معلوم ہوں بشرطیکہ وہ تین زاویے نہ ہوں تو باقی اضلاع اور زاویے معلوم ہو سکتے ہیں۔ لیکن جب تین زاویے معلوم ہوں تو صرف اضلاع کے طولوں کی باہمی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ یعنی مثلث کی شکل دریافت ہو سکتی ہے اور مقدار نہیں معلوم ہو سکتی، جب مثلث کے تین اجزاء معلوم ہوں تو باقی تین اجزا معلوم کرنے کے عمل کو **مثلث کا حل** کرنا کہتے ہیں۔

سب سے پہلے ہم مثلث قائم الزاویہ کے حل پر بحث کرینگے۔ مثلث قائم الزاویہ وہ مثلث ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔ ذیل کی چار دفعات ایسے مثلثوں سے متعلق ہیں جن میں زاویہ ج قائمہ ہے۔

۱۷۵۔ صورت اول۔ مثلث قائم الزاویہ کا وتر اور ایک ضلع معلوم ہے مثلث کو حل کرو۔

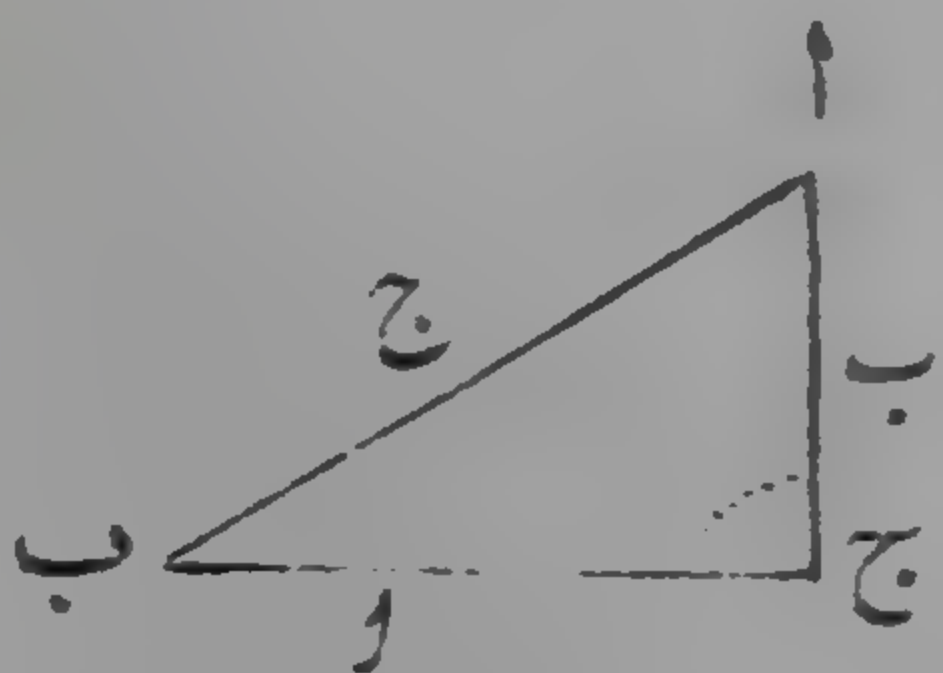
ا

ج

ب

ب ج

و

فرض کرو کہ ضلع ب اور وتر ج معلوم ہیں۔

رابطہ جب ب $= \frac{ب}{ج}$ ہے

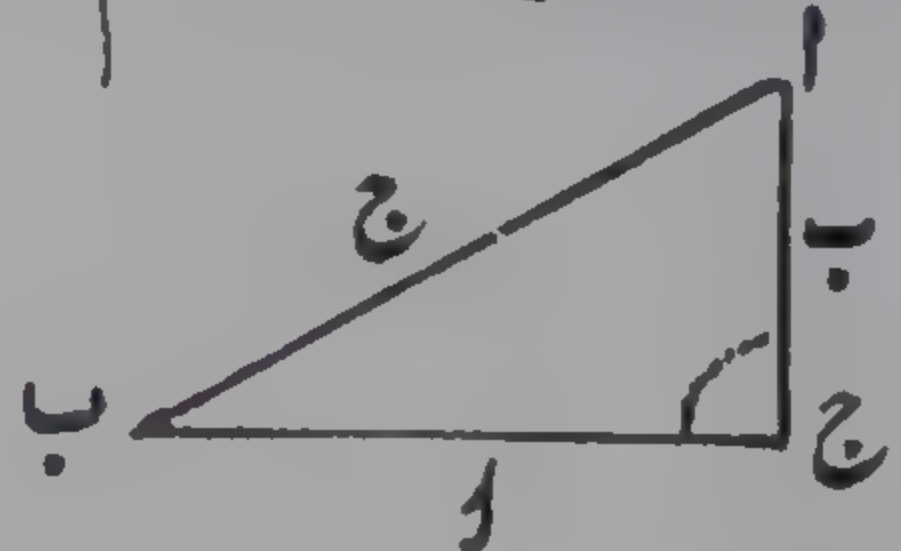
زاویہ ب معلوم ہوسکتا ہے۔

∴ ل جب ب = ۱۰ + لوک ب ۔ لوک ج

اب چونکہ ب اور ج معلوم ہیں اس لیے ل جب ب اور ب معلوم ہوسکتے ہیں اور اس لیے زاویہ ا (= ۹۰° - ب) معلوم ہوسکتا ہے۔

ضلع ا ذیل کے کسی ایک ربط سے معلوم ہوسکتا ہے۔

$$\text{جم ب} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}،\ \text{مس ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{یا}\ \text{ا} = \sqrt{(\text{ج} - \text{ب})(\text{ج} + \text{ب})}$$

۱۷۶۔ صورت دوم۔ اضلاع ا اور ب معلوم ہیں، مثلث کو حل کریں۔

اس صورت میں زاویہ ب ربط $\text{مس ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ سے معلوم ہوسکتا ہے۔

یعنی ل مس ب = ۱۰ + لوک ب - لوک ا

اس لیے ل مس ب اور اس لیے ب معلوم ہوسکتا ہے۔

نیز زاویہ ا (= ۹۰° - ب) معلوم ہوسکتا ہے۔

ربط $\text{ج} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ سے وتر ج دریافت ہوسکتا ہے۔

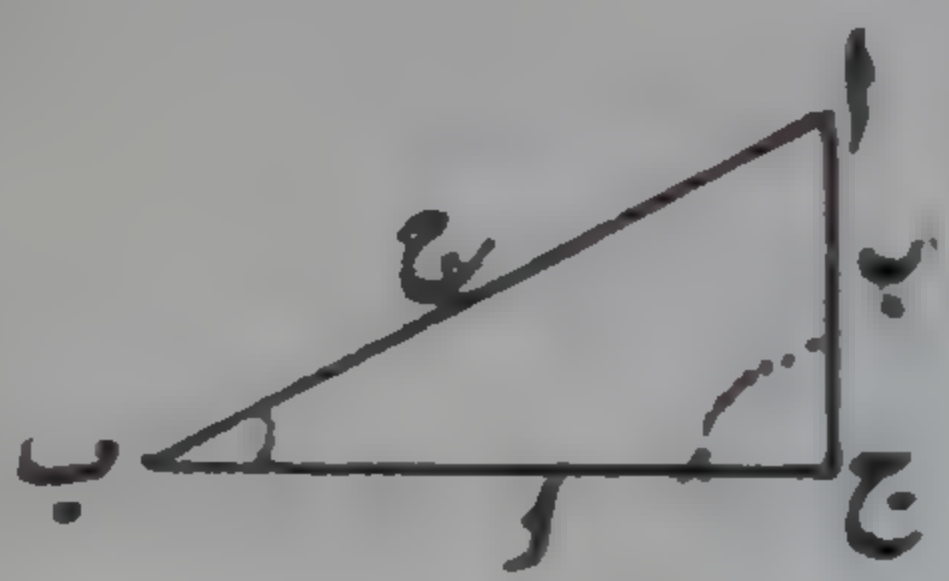
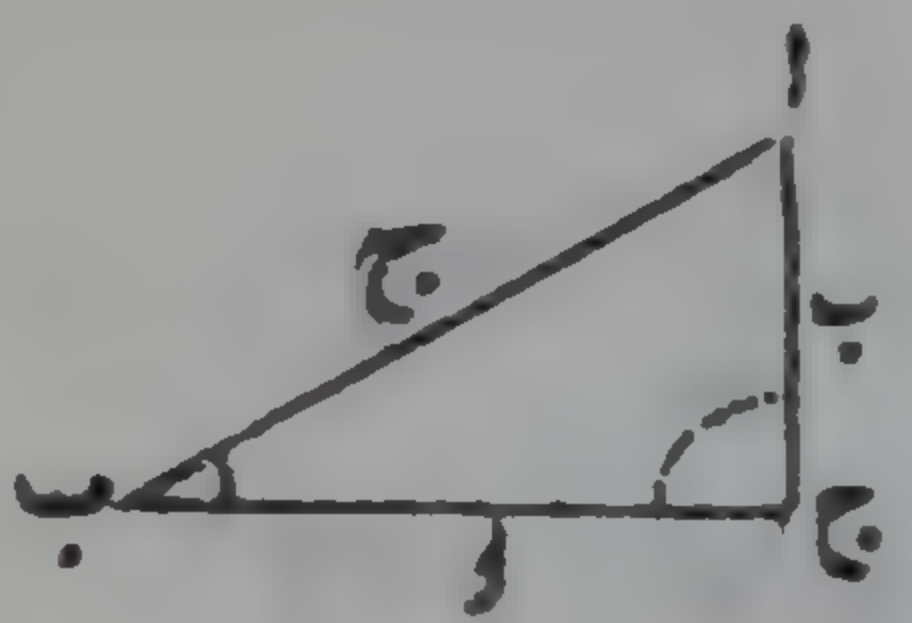
لیکن یہ ربط لوکارثمی حسابات کے لیے موزوں نہیں ہے وتر ج دریافت کرنے کے لیے مندرجۂ ذیل طریقہ بہتر ہوگا۔

$$\text{جب ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}\ \text{یعنی}\ \text{ج} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}}$$

لوک ج = لوک ب - لوک جب ب

= ۱۰ + لوک ب - ل جب ب جس سے ج معلوم ہوسکتا ہے

۱۷۷۔ صورت سوم۔ مثلث کا زاویہ ب اور ایک ضلع ا معلوم ہیں، مثلث کو حل کرو۔

اس صورت میں ا (= ۹۰° - ب) معلوم ہے۔
ضلع ب کو ربط ب/د = مس ب سے اور
ج کو ربط د/ج = جم ب سے دریافت کرو۔

۱۷۸- صورت چہارم - زاویہ ب
اور وتر ج معلوم ہیں، مثلث کو
حل کرو۔

ا معلوم ہے اور اضلاع د اور
ب روابط ذیل سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

د/ج = جم ب اور ب/ج = جب ب

امثلہ نمبری ۲۸

۱- مثلث قائم الزاویہ ا ب ج میں ج قائمہ ہے، اگر د = ۵۰۰ اور ب = ۷۵°
تو اضلاع دریافت کرو (مس ۷۵° = ۲ + √۳)

۲- مثلث کے دو ضلعے ۱۰ اور ۲۰ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۹۰° ہے، مثلث
کو حل کرو۔ معلوم ہے لوک ۲۰ = ۱٬۳۰۱۰۳
اور ل مس ۲۶° ۳۴' = ۹٬۶۹۸۶۸۴۷
نیز فرق ا' کے لیے = ۳۱۶۰

۳- اگر مثلث کے ایک زاویہ سے اس کے قاعدے پر عمود نکالا جائے تو
اس کا طول ۳ انچ ہوتا ہے اور اُس زاویہ کو احاطہ کرنے والے اضلاع کے
طول ۴ اور ۵ انچ ہیں، مثلث کے زاویے دریافت کرو۔
معلوم ہے لوک ۲ = ۰٬۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ۰٬۴۷۷۱۲۱۳
ل جب ۴۸° ۳۵' = ۹٬۸۷۵۰۱۲۲ فرق ا' کے لیے = ۱۱۱۵
ل جب ۳۶° ۵۲' = ۹٬۷۷۸۱۱۹۶ فرق ا' کے لیے = ۱۶۸۴ اور

۴۔ ایک مثلث قائم الزاویہ میں وتر اُس عمود کا چار گنا ہے جو زاویہ قائمہ سے وتر پر نکالا جائے۔ مثلث کے حادے زاویے دریافت کرو۔

۱۷۹۔ اب ہم ایسے مثلثوں کے حل کے متعلق بحث کرینگے جن کا کوئی زاویۂ قائمہ نہ ہو۔

اس کی مختلف صورتیں یہ ہیں:

صورت اوّل۔ تین اضلاع معلوم ہیں۔

صورت دوم۔ دو اضلاع اور درمیانی زاویے معلوم ہیں

صورت سوم۔ دو اضلاع اور ایک ضلع کے مقابل کا زاویہ معلوم ہیں۔

صورت چہارم۔ ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہیں

صورت پنجم۔ تینوں زاویے معلوم ہیں۔

۱۸۰۔ صورت اوّل۔ تینوں اضلاع ا، ب، ج معلوم ہیں۔

چونکہ اضلاع معلوم ہیں اس لیے س اور اس لیے مقادیر س۔ا، س۔ب، س۔ج معلوم ہیں۔ نصف زاویے $\frac{\text{ا}}{2}$، $\frac{\text{ب}}{2}$، $\frac{\text{ج}}{2}$ ذیل کے ضابطوں سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

$$\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{2}=\sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}}\,،\quad \text{مس}\,\frac{\text{ب}}{2}=\sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ج})(\text{س}-\text{ا})}{\text{س}(\text{س}-\text{ب})}}$$

$$\text{اور}\quad \text{مس}\,\frac{\text{ج}}{2}=\sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ا})(\text{س}-\text{ب})}{\text{س}(\text{س}-\text{ج})}}$$

صرف دو زاویوں کا دریافت کرنا کافی ہوگا کیونکہ ان دو کے مجموعہ کو ۱۸۰° سے تفریق کرنے سے تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہے۔

اوپر کے زاویوں کی قیمتیں نصف زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں۔ دیکھو دفعات (۱۶۵ اور ۱۶۶)

یہ سب ضابطے لوکارثمی حسابات کے لیے موزوں ہیں۔

نیز زاویہ ا ضابطہ جم ا $=\frac{\text{ب}^2+\text{ج}^2-\text{ا}^2}{2\,\text{ب}\,\text{ج}}$ (دفعہ ۱۶۴) سے بھی معلوم

ہو سکتا ہے۔

لیکن بالعموم یہ ضابطہ لوکارتمی حسابات کے لیے موزوں نہیں ہوتا مگر جب اضلاع ا، ب، ج مقدار میں قلیل ہوں تو اُس وقت اس ضابطے کو استعمال کرنے میں سہولت ہوگی۔

مثال۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۲، ۴۰، ۶۶ فٹ ہیں، سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے۔

لوک ۲۰۷ = ۲٫۳۱۵۹۷۰۳، لوک ۱۰۷۳ = ۳٫۰۳۰۵۹۹۷

ل مم ۶۶° ۱۸′ = ۹٫۶۴۲۲۴۳۴۱، جدولوں سے فرق ۱′ کے لیے = ۳۴۳۱

اس جگہ ا = ۳۲، ب = ۴۰، ج = ۶۶

یعنی س = $\frac{\text{۳۲ + ۴۰ + ۶۶}}{\text{۲}}$ = ۶۹، س - ا = ۳۷، س - ب = ۲۹

اور س - ج = ۳

اس لیے مم $\frac{\text{ج}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{س (س - ج)}}{\text{(س - ا) (س - ب)}}} = \sqrt{\frac{\text{۶۹} \times \text{۳}}{\text{۳۷} \times \text{۲۹}}} = \sqrt{\frac{\text{۲۰۷}}{\text{۱۰۷۳}}}$

ل مم $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$ = ۱۰ + $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ [لوک ۲۰۷ - لوک ۱۰۷۳]

= ۱۰ + ۱٫۱۵۷۹۸۵۱۵ - ۱٫۵۱۵۲۹۹۸۵

= ۹٫۶۴۲۲۶۸۵۳

ل مم $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$ اس لیے ل مم ۶۶° ۱۸′ سے بڑا ہے یعنی $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$ زاویہ ۶۶° ۱۸′ سے کم ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$ = ۶۶° ۱۸′ - لاً

زاویہ کی قیمت کا فرق لاً ہے، اس کے مقابل لوکارتم کا فرق

= ۹٫۶۴۲۲۶۸۵۳

- ۹٫۶۴۲۲۴۳۴۱

= ۰٫۰۰۰۰۲۵۱۲

نیز فرق ۶۰″ کے لیے = ۰۰۰۳۴۳۱ء۰

اس لیے لا/۶۰ = ۰۰۰۲۵۱۲ء۰ / ۰۰۰۳۴۳۱ء۰

یعنی لا = ۲۵۱۲/۳۴۳۱ × ۶۰ = ۴۴ تقریباً

∴ ج/۲ = ۶۶° ۱۸′ − ۴۴″ = ۶۶° ۱۷′ ۱۶″

اور اس لیے ج = ۱۳۲° ۳۴′ ۳۲″

امثلہ نمبری ۲۹

[طالب علم کو امثلۂ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۱، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲) کے نتائج کی تصدیق عمل ترسیمی سے کرنی چاہیے]۔

۱۔ ایک مثلث کے اضلاع ۵۶، ۶۵، ۳۳ فٹ ہیں، اس کا سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۲۔ مثلث کے اضلاع بالترتیب ۷، ۴√۲، √۱۳ گز ہیں، سب سے چھوٹے زاویے میں درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ ایک مثلث کے اضلاع لا² + لا + ۱، ۲ لا + ۱ اور لا² − ۱ ہیں، ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا زاویہ ۱۲۰° ہے

۴۔ مثلث کے اضلاع ا، ب، √(ا² + اب + ب²) فٹ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر ا = ۲، ب = √۶ اور ج = √۳ − ۱ تو مثلث کو حل کرو۔

۶۔ اگر ا = ۲، ب = √۶ اور ج = √۳ + ۱ تو مثلث کو حل کرو۔

۷۔ اگر ا = ۹، ب = ۱۰، ج = ۱۱ تو ب معلوم کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء

ل مس ۲۹° ۲۹′ = ۹ء۷۵۲۳۴۷۲

اور ل مس ۲۹° ۳۰′ = ۹ء۷۵۲۶۴۲۰

۸۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۳۰، ۱۲۳، ۷۷ فٹ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے۔

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل مس ۴۸° ۳۹′ = ۹ء۹۰۲۹۳۷۶

اور ل مس ۴۸° ۴۰′ = ۹ء۹۰۳۱۹۶۶

۹۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲۴۲، ۱۸۸، ۲۷۰ فٹ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے۔

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ء، ل مس ۴۸° ۲۰′ = ۹ء۸۹۸۰۱۰۴

اور ل مس ۴۸° ۱۹′ = ۹ء۸۹۷۷۵۰۷

۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲، ۳، ۴ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

ل مس ۵۲° ۱۴′ = ۱۰ء۱۱۰۸۳۹۵

اور ل مس ۵۲° ۱۵′ = ۱۰ء۱۱۱۱۰۰۴

جدولوں کو استعمال کرنے سے اُن مثلثوں کے سب زاویے دریافت کرو جن میں

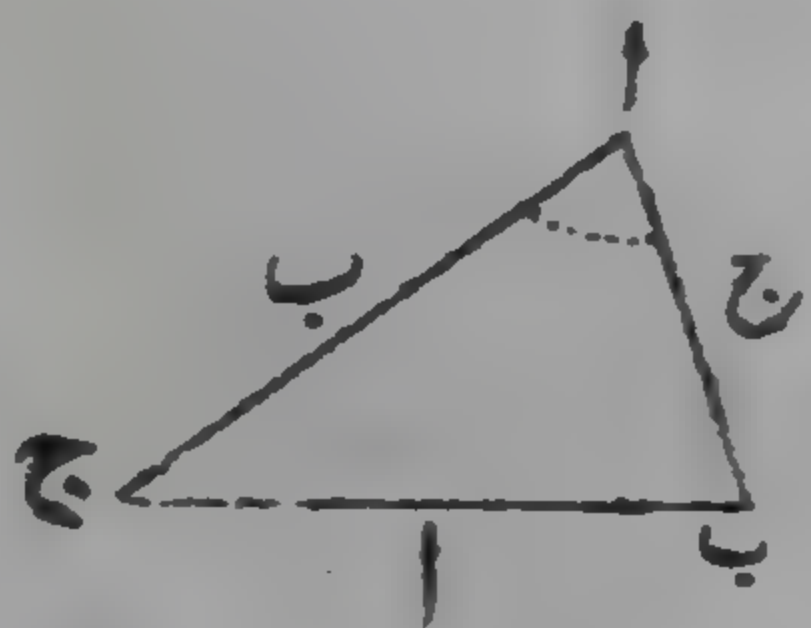
۱۱۔ ا = ۲۵، ب = ۲۶، ج = ۲۷

۱۲۔ ا = ۱۷، ب = ۲۰، ج = ۲۷

۱۳۔ ا = ۲۰۰۰، ب = ۱۰۵۰، ج = ۱۱۵۰

۱۸۱۔ صورتِ دوم۔ دو اضلاع ب اور ج اور اُن کا درمیانی زاویہ ا معلوم ہیں، مثلث کو حل کرو۔

فرض کرو کہ ضلع ب ضلع ج سے بڑا ہے تب

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲} = \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ب}+\text{ج}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۲} \quad \text{(دفعہ ۱۷۱)} \;\ldots(۱)$$

اور $\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}} = \text{۹۰}^\circ - \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ .... (۲)

ان دو ربطوں سے $\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}$ اور $\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}}$ کی قیمتیں اور اس لیے جمع اور تفریق کرنے سے ب اور ج کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

اس کے بعد تیسرا ضلع ا ربط $\frac{\text{ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}}$ سے حاصل ہو سکتا ہے۔

یعنی $\text{ا} = \text{ب}\,\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ جس سے ا حاصل ہوگا۔

ضلع ا ضابطہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\text{ا}^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{۲ب ج جم ا}$$

یہ ضابطہ لوکارتمی حسابات کے لیے اتنا موزوں نہیں، لیکن اس صورت میں اکثر مفید ثابت ہوتا ہے جبکہ اضلاع ا اور ب مقدار میں قلیل ہوں۔

۱۸۲۔ مثال ۱۔ اگر $\text{ب} = \sqrt{\text{۳}}$، $\text{ج} = \text{۱}$ اور $\text{ا} = \text{۳۰}^\circ$ تو مثلث کو حل کرو۔

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}} = \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ب}+\text{ج}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \frac{\sqrt{\text{۳}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}+\text{۱}}\,\text{مم}\,\text{۱۵}^\circ$$

اب $\text{مس}\,\text{۱۵}^\circ = \frac{\sqrt{\text{۳}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}+\text{۱}}$ (دفعہ ۱۰۱)

یعنی $\text{مم}\,\text{۱۵}^\circ = \frac{\sqrt{\text{۳}}+\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}-\text{۱}}$

اس لیے $\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}} = \text{۱}$

$\therefore \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}} = \text{۴۵}^\circ$ .... (۱)

نیز (ب + ج)/۲ = ۹۰° − ا/۲ = ۹۰° − ۱۵° = ۷۵° .... (۲)

جمع کرنے سے ب = ۱۲۰°

تفریق کرنے سے ج = ۳۰°

چونکہ ا = ج، اس لیے اَ = ج = ا

یا بطریق ذیل

اَ² = بَ² + جَ² − ۲ ب ج جم ا = ۳ + ۱ − ۲ × √۳ × √۳/۲ = ۱

یعنی اَ = ا = ج

∴ ج = ا = ۳۰°

اور ب = ۱۸۰° − ا − ج = ۱۲۰°

مثال ۲۔ اگر ب = ۲۱۵، ج = ۱۰۵ اور ا = ۴۶° ۲۷′ تو باقی دو زاویے نیز تیسرا ضلع اَ دریافت کرو۔ معلوم ہے۔

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰، لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

لوک ۱۰۵ = ۲٫۰۲۱۱۸۹۳، لوک ۲۱۲٫۶۴۷۶ = ۲٫۳۲۷۳۱۰۳

ل مم ۲۳° ۱۳′ = ۱۰٫۱۱۹۴۷۲۳، فرق ۱′ کے لیے = ۲۶۲۲

ل مس ۲۴° ۲۰′ = ۹٫۶۵۵۴۴۷۷، فرق ۱′ کے لیے = ۳۳۶۴

ل جب ۴۶° ۲۷′ = ۹٫۹۸۳۸۰۵۲

اور ل قم ۲۸° ۲۵′ = ۱۰٫۳۲۲۵۰۲۵، فرق ۱′ کے لیے = ۳۳۳۴

اس جگہ مس (ب − ج)/۲ = (ب − ج)/(ب + ج) مم ا/۲ = ۱۱/۳۲ مم ۲۳° ۱۳′ ۳۰″

اب ل مم ۲۷° ۱۳′ = ۱۰٫۱۱۱۹۴۷۲۳

فرق ۳۰″ کے لیے = −۱۳۱۱

∴ ل مم ۲۷° ۱۳′ ۳۰″ = ۱۰٫۱۱۱۹۳۴۱۲

لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

۱۱٫۱۱۶۰۷۳۹

لوک ۳۲ = ۱٫۵۰۵۱۵

∴ ل مس ½(ب−ج) = ۹٫۶۵۵۵۸۳۹

لیکن ل مس ۱۴° ۲۰′ = ۹٫۶۵۵۳۴۷۷

فرق = ۲۳۶۲

$$= \text{فرق}\ \frac{۲۳۶۲}{۳۳۶۴} \times ۶۰'' \ \text{کے لیے}$$

= فرق ۴۲٫۱″ کے لیے

$$\therefore \frac{ب-ج}{۲} = ۱۴°\ ۲۰'\ ۴۲''$$

$$\text{لیکن}\ \frac{ب+ج}{۲} = ۹۰° - \frac{۱}{۲} = ۶۲°\ ۴۶'\ ۳۰''$$

جمع کرنے سے ب = ۷۷° ۷′ ۱۲″

اور تفریق کرنے سے ج = ۴۸° ۲۵′ ۴۸″

$$\text{نیز}\ \frac{ا}{\text{جب ا}} = \frac{ج}{\text{جب ج}} = \text{ج قم ج}$$

∴ ا = ۱۰۵ جب ۷۴° ۲۷′ قم ۴۸° ۲۵′ ۴۸″

لیکن ل قم ۴۸° ۲۵′ = ۱۰٫۳۲۲۲۵۰۲۵

فرق ۴۸″ کے لیے = −۱۸۶۷

ل قم ۴۸° ۲۵′ ۴۸″ = ۱۰٫۳۲۲۲۳۱۵۸

ل جب ۷۴° ۲۷′ = ۹٫۹۸۳۸۰۵۲

لوک ۱۰۵ = ۲٫۰۲۱۱۸۹۳

۲۲٫۳۲۷۳۱۰۳

۲۰

∴ لوک ا = ۲٫۳۲۷۳۱۰۳

∴ ا = ۲۱۲٫۴۷۶

٫۳۰۱۰۳
۵
۱٫۵۰۵۱۵

۲۳۶۲
۶۰
۳۳۶۴)۱۴۱۷۲۰(۴۲٫۱
۱۳۴۵۶
۷۱۶۰
۶۷۲۸
۴۳۲۰

$$۲۳۳۴ \times \frac{۴۸}{۶۰}$$

$$= ۲۳۳۴ \times \frac{۴}{۵}$$

$$= ۱۸۶۷$$

۱۵۴۔ صورت دوم میں مثلث کا تیسرا ضلع ا زاویوں ب اور ج کو دریافت کرنے کے بغیر بھی معلوم ہوسکتا ہے۔ دو طریقے حسب ذیل ہیں۔

(۱) چونکہ $ا^2 = ب^2 + ج^2 - ۲\,ب\,ج\,جم\,ا$

$$= ب^2 + ج^2 - ۲\,ب\,ج\left(۲\,جم^2 \frac{ا}{۲} - ۱\right)$$

$$= (ب + ج)^2 - ۴\,ب\,ج\,جم^2 \frac{ا}{۲}$$

$$\therefore\ ا^2 = (ب+ج)^2 \left[۱ - \frac{۴\,ب\,ج}{(ب+ج)^2}\,جم^2 \frac{ا}{۲}\right]$$

اس لیے اگر $جب^2\,ط = \frac{۴\,ب\,ج}{(ب+ج)^2}\,جم^2 \frac{ا}{۲}$

تو $ا^2 = (ب+ج)^2 \left[۱ - جب^2\,ط\right] = (ب+ج)^2\,جم^2\,ط$

یعنی $ا = (ب+ج)\,جم\,ط$

پس اگر حیب ط کو ربط $جب\,ط = \frac{۲\sqrt{ب\,ج}}{ب+ج}\,جم\,\frac{ا}{۲}$ سے معلوم کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$ا = (ب+ج)\,جم\,ط$$

(۲) $ا^2 = ب^2 + ج^2 - ۲\,ب\,ج\,جم\,ا$

$$= ب^2 + ج^2 - ۲\,ب\,ج\left(۱ - ۲\,جب^2 \frac{ا}{۲}\right) = (ب-ج)^2 + ۴\,ب\,ج\,جب^2 \frac{ا}{۲}$$

$$= (ب-ج)^2 \left[۱ + \frac{۴\,ب\,ج}{(ب-ج)^2}\,جب^2 \frac{ا}{۲}\right]$$

فرض کرو کہ $\frac{۴\,ب\,ج}{(ب-ج)^2}\,جب^2 \frac{ا}{۲} = مس^2\,ف$

یعنی $مس\,ف = \frac{۲\sqrt{ب\,ج}}{ب-ج}\,جب\,\frac{ا}{۲}$

اس لیے ف معلوم ہوسکتا ہے۔

نیز $ا^2 = (ب-ج)^2 \left[۱ + مس^2\,ف\right] = \frac{(ب-ج)^2}{جم^2\,ف}$

یعنی ا = (ب-ج) قط فہ

اس سے ا بآسانی معلوم ہو سکتا ہے۔

اس دفعہ کے حسابات میں زاویے طہ اور فہ سہولت عمل کے لیے داخل کیے گئے ہیں ان کو امدادی زاویے کہتے ہیں (دفعہ ۱۲۹)

امثلہ نمبری ۳۰

[طالب علم کو امثلۂ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۴، ۵، ۶، ۱۱) کے نتائج کی تصدیق ترسیمی عمل سے کرنی چاہیے]

۱- اگر ب = ۹۰°، ج = ۷۰° اور ا = ۲۰۸۴۳ تو ب اور ج دریافت کرو، معلوم ہے۔

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل مم ۳۶° ۲۴′ ۵″ = ۱۰ء۱۳۲۲۱۱۱

ل مس ۹° ۳۷′ = ۹ء۲۲۹۰۰۷۱

اور ل مس ۹° ۳۸′ = ۹ء۲۲۹۷۷۲۵

۲- اگر ا = ۲۱، ب = ۱۱ اور ج = ۳۴° ۲۴′ ۳۰″ تو ا اور ب دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء

اور ل مس ۲۷° ۳۸′ ۵۴″ = ۱۰ء۵۰۵۱۵

۳- اگر کسی مثلث کے زاویے سلسلۂ حسابیہ میں ہوں اور سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے اضلاع کے طول بالترتیب ۲۴ اور ۱۶ فٹ ہوں تو مثلث کے زاویے دریافت کرو، نیز تیسرے ضلع کا طول معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء،

اور ل مس ۱۹° ۶′ = ۹ء۵۳۹۴۲۸۷ فرق ۱′ کے لیے = ۴۰۸۴

۴- اگر ا = ۳، ب = ۷ اور ج = ۶۰° تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

اور ل مس ۲۷° ۴۷' = ۹٫۷۱۵۵۵۰۸، فرق ۱' کے لیے = ۳۰۸۷

۵- اگر ا = ۲ ب اور ج = ۱۲۰° تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، نیز ج اور ا کی باہمی نسبت معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫

اور ل مس ۱۰° ۵۳' = ۹٫۲۸۳۹۰۷۰، فرق ۱' کے لیے = ۶۸۰۸

۶- اگر ب = ۱۴، ج = ۱۱ اور ا = ۶۰° تو ب اور ج کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳٫، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫

ل مس ۱۱° ۴۴' = ۹٫۳۱۷۴۲۹۹

اور ل مس ۱۱° ۴۵' = ۹٫۳۱۸۰۶۴۰

۷- ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طول بالترتیب ۵۴۰ اور ۴۲۰ گز ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۲° ۶' ہے، باقی زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳٫۰۱۰۳، ل مس ۲۶° ۳' = ۹٫۶۸۹۱۴۳۰

ل مس ۱۴° ۴۰' = ۹٫۴۰۷۴۱۸۹ اور ل مس ۱۴° ۱' = ۹٫۴۰۷۹۴۵۳

۸- اگر ب = $\frac{1}{2}$۲ فٹ، ج = ۲ فٹ اور ا = ۲۲° ۲۰' تو باقی زاویے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ تیسرا ضلع تقریباً ۱ فٹ ہے، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳٫، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲٫

ل مم ۱۱° ۱۰' = ۱۰٫۷۰۴۶۵، ل جب ۲۲° ۲۰' = ۹٫۵۷۹۷۷

ل مس ۶۹° ۲۲' ۲۰" = ۹٫۷۵۰۳۸، ل مس ۶۹° ۲۲' ۳۰" = ۹٫۷۵۰۴۳

اور ل جب ۶۹° ۲۷' ۴۳" = ۹٫۸۸۰۷۹

۹- اگر ا = ۲، ب = ۱ + $\sqrt{3}$ اور ج = ۶۰° تو مثلث کو حل کرو۔

۱۰- مثلث کے دو اضلاع ۱ + $\sqrt{3}$ اور ۱ - $\sqrt{3}$ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے، تیسرا ضلع اور باقی زاویے دریافت کرو۔

۱۱- اگر ب = ۱، ج = ۱ - $\sqrt{3}$ اور ا = ۶۰° تو ضلع ا کا طول دریافت کرو۔

۱۲- اگر ب = ۹، ج = ۱۲۵ اور مس $\frac{1}{2}$ = $\frac{17}{6}$ تو ثابت کرو کہ ا = ۲۰۴

۱۳- اگر ا = ۵، ب = ۴ اور جم (ا - ب) = $\frac{۳۱}{۳۲}$ تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع ج = ۶

۱۴- ایک مثلث کا ایک زاویہ °۶۰ ہے اور اس کے متصل ضلعوں کے طول ۴۰ اور ۴۰ $\overline{۳۱}$ گز ہیں، تیسرے ضلع کا طول دریافت کرو نیز باقی زاویوں میں انگریزی درجوں کی تعداد معلوم کرو۔

۱۵- ایک مثلث کے اضلاع ۹ اور ۳ ہیں اور ان کے مقابل کے زاویوں کا فرق °۹۰ ہے، مثلث کا قاعدہ اور اس کے زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

لوک ۴۵۸۹۷ = ۴۸۸۰۲۰۷۴ء۴، لوک ۴۵۸۹۷ = ۴۸۸۰۲۱۳۲ء۴

ل مس °۲۶ ۳۳ = ۹۶۹۸۶۸۴۷ء۹

اور ل مس °۲۶ ۳۴ = ۹۶۹۹۰۰۰۶ء۹

۱۶- اگر مس فہ = $\frac{ا - ب}{ا + ب}$ جم $\frac{ج}{۲}$ تو ثابت کرو کہ

$$ج = (ا + ب) \frac{\text{جب } \frac{ج}{۲}}{\text{جم فہ}}$$

اگر ا = ۳، ب = ۱ اور ج = °۵۳ ۷′ ۴۸″ تو ا اور ب کو دریافت کرنے کے بغیر ج دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۲۵۲۹۸ = ۴۰۳۰۸۶۲ء۴

لوک ۲۵۲۹۹ = ۴۰۳۱۰۳۴ء۴، ل جم °۲۶ ۳۳′ ۵۴″ = ۹۵۱۵۴۵۲ء۹

اور ل مس °۲۶ ۳۳′ ۵۴″ = ۹۶۹۸۹۷۰۰ء۹

۱۷- ایک مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷ اور ۱۵۸ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ °۶۶ ۲۸′ ہے، قاعدہ اور باقی زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۷۹ = ۱۸۹۷۶۳ء۱

لوک ۲۲۶۸۷ = ۴۳۵۵۷۸ء۴، ل مم °۳۳ ۴۰′ = ۱۸۱۹۷ء۱۰

ل جب °۳۳ ۴۰′ = ۷۳۹۹۸ء۹، ل مس °۱۶ ۴۵′ = ۴۸۲۶۲ء۹

ل مس ۱۶° ۵۵' = ۹،۴۸۳۰۸ ، ل قط ۱۶° ۵۴' = ۱۰،۰۱۹۱۷

اور ل قط ۱۶° ۵۵' = ۱۰،۰۱۹۲۱

[ضابطہ جم (ب - ج)/۲ = (ب + ج)/ا جب ا/۲ کو استعمال کرو یا ضابطہ مثال ۱۶ کو]

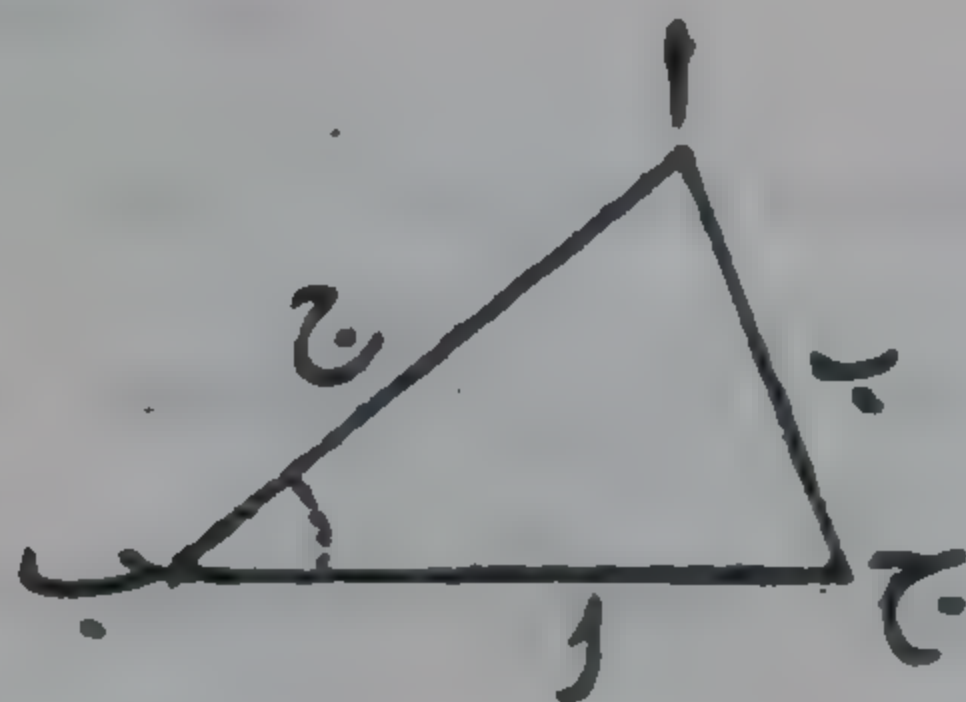
ذیل کی چار مثالوں میں مطلوبہ لوکارثموں کو جدولوں سے لو۔

۱۸- اگر ا = ۲۴۲،۵، ب = ۱۶۴،۳ اور ج = ۴۵° ۳۶' تو مثلث کو حل کرو۔

۱۹- اگر ب = ۱۳۰، ج = ۶۳ اور ا = ۲۴° ۱۵' ۳۰" تو مثلث کو حل کرو۔

۲۰- مثلث کے دو اضلاع ۲۲۶۵،۴ اور ۱۷۷۹ فٹ ہیں اور اُن کا درمیانی زاویہ ۸۵° ۱۷' ہے، باقی زاویے دریافت کرو۔

۲۱- مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷،۰۹ اور ۱۳۰،۹۶ فٹ ہیں اور اُن کا درمیانی زاویہ ۵۵° ۵۹' ہے، باقی زاویے دریافت کرو۔

۱۸۴- صورتِ سوم- دو اضلاع ب اور ج معلوم ہیں اور اُن میں سے ایک کے مقابل کا زاویہ ب معلوم ہے، مثلث کو حل کرو۔

زاویہ ج ربط (جب ج)/ج = (جب ب)/ب سے

یعنی جب ج = (ج/ب) جب ب .... (۱)

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

طرفین کے لوکارتم لینے سے زاویہ ج معلوم ہوسکتا ہے۔

اور پھر ا (=۱۸۰ - ب - ج) جس سے ﺍ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ضلع ﺍ ربط}\ \frac{ﺍ}{\text{جب ا}} = \frac{ب}{\text{جب ب}}$$

یعنی $$ﺍ = ب \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (۲)$$

سے دریافت ہوسکتا ہے۔

۱۸۵۔ دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) سے بعض صورتوں میں ج کی کوئی قیمت حاصل نہیں ہوتی اور بعض دفعہ ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور بعض دفعہ دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

صورتِ اول۔ فرض کرو کہ زاویہ ب حادّہ ہے۔

(ﺍ) اگر ب < ج جب ب تو مساوات (۱) میں دائیں طرف کا رُکن ایک سے بڑا ہوگا اور اس مساوات کے موافق ج کی کوئی قیمت نہیں ہوسکتی۔

(ب) اگر ب = ج جب ب تو (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک کے برابر ہوگا اور اس صورت میں ج کی قیمت ۹۰° ہوگی۔

(ج) اگر ب > ج جب ب تو ج کی دو قیمتیں ایسی ہونگی جن میں سے ہر ایک کی جیب $\frac{\text{ج جب ب}}{\text{ب}}$ ہوگی، ایک قیمت ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگی۔ اور دوسری ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان۔

لیکن یہ دونوں قیمتیں ہمیشہ شرائط سوال کو پورا نہیں کرینگی۔

کیونکہ اگر ب > ج تو ب > ج، اب اس صورت میں ج کی منفرجہ قیمت جائز نہیں ہوسکتی۔ کیونکہ ج زاویہ منفرجہ نہیں ہوسکتا جب تک کہ ب زاویہ منفرجہ نہ ہو اور ایک ہی مثلث میں دو زاویوں سے ہر ایک کا قائمہ سے بڑا ہونا صریحاً ناممکن ہے۔

اگر ب < ج اور زاویہ ب حادہ ہو تو ج کی دونوں قیمتیں شرائط سوال کو پورا کرینگی، اس صورت میں ا کی دو قیمتیں ہونگی اور اس کے لیے ربط (۲) سے ﺍ کی بھی دو قیمتیں حاصل ہونگی اور اس لیے دو مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرینگے۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ب زاویہ منفرجہ ہے۔

اگر ب > یا = ج، تو ب بالترتیب کم ہوگا یا برابر ہوگا ج کے اس لیے ج زاویہ منفرجہ ہوگا، اس صورت میں مثلث کا بننا ہی ناممکن ہوگا۔

اگر ب > ج تو زاویہ ج کی حادہ قیمت جو مساوات (۱) سے حاصل ہوگی شرائط سوال کو پورا کریگی مگر منفرجہ قیمت جائز نہیں ہوگی اس صورت میں مثلث کا صرف ایک جائز حل ہوگا۔

چونکہ ب، ج اور ب کی بعض قیمتوں کے لیے مثلث کے حل کرنے میں شک یا اشتباہ واقع ہوتا ہے اس لیے اس صورت کو مثلثوں کے حل کی **مشتبہ صورت** کہتے ہیں۔

۱۸۶۔ صورت مشتبہ پر بحث بطریق ہندسی اس طرح ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ اجزا ب، ج اور ب معلوم ہیں اور ہم مثلث کو بنانے کی کوشش کرتے ہیں سب سے اول زاویہ ا ب د برابر زاویہ ب کے بناؤ۔ اس کے بعد سمت ب ا میں طول ب ا کو ج کے مساوی قطع کرو۔ اس طرح سے زاویۂ ا کا نقطۂ راس معلوم ہو جائیگا۔

اب ہمیں ایک تیسرا نقطہ ج معلوم کرنا ہے جو ب د پر واقع ہو اور جس کا فاصلہ نقطہ ا سے ب کے برابر ہو، اس نقطہ کا مقام دریافت کرنے کے لیے ا کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ب ہو، اب اگر یہ دائرہ ب د کو قطع کرے تو جو نقطہ یا نقاطِ تقاطع اس طرح حاصل ہونگے اِن سے ج کا مقام معلوم ہو جائیگا۔

ب د پر عمود ا د نکالو پس

ا د = ا ب جب ب = ج جب ب

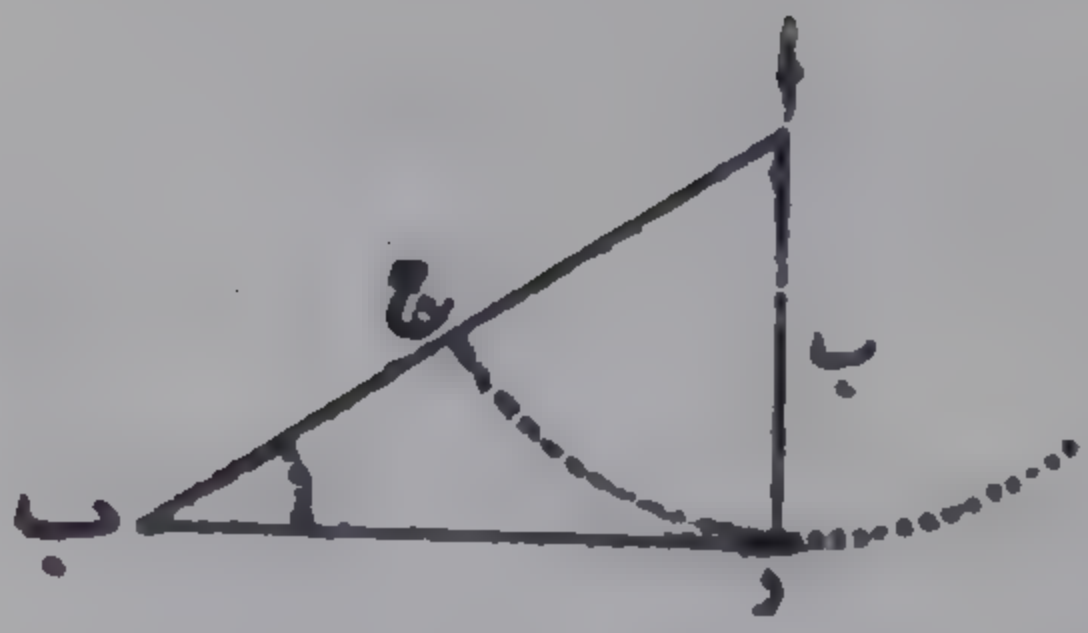
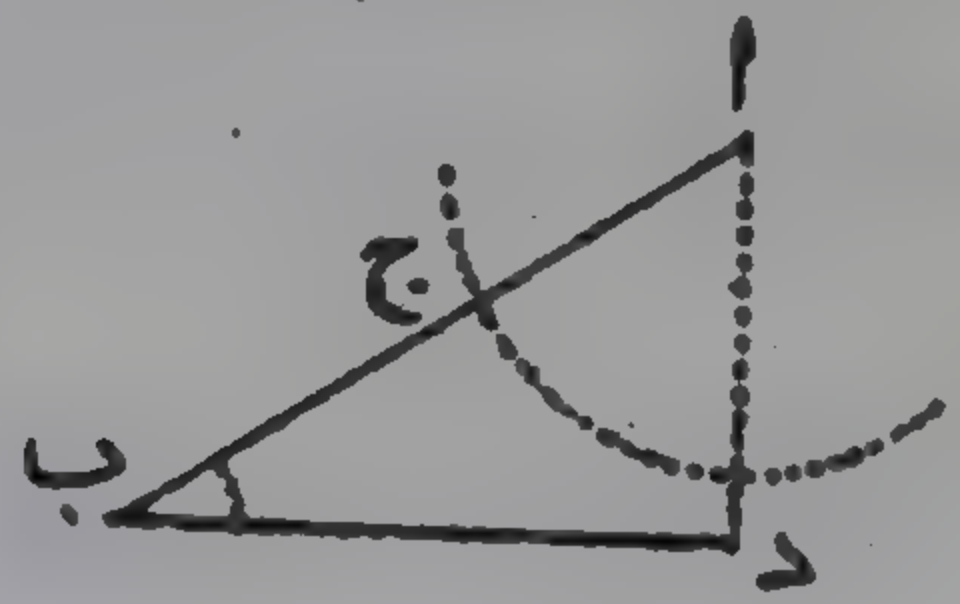
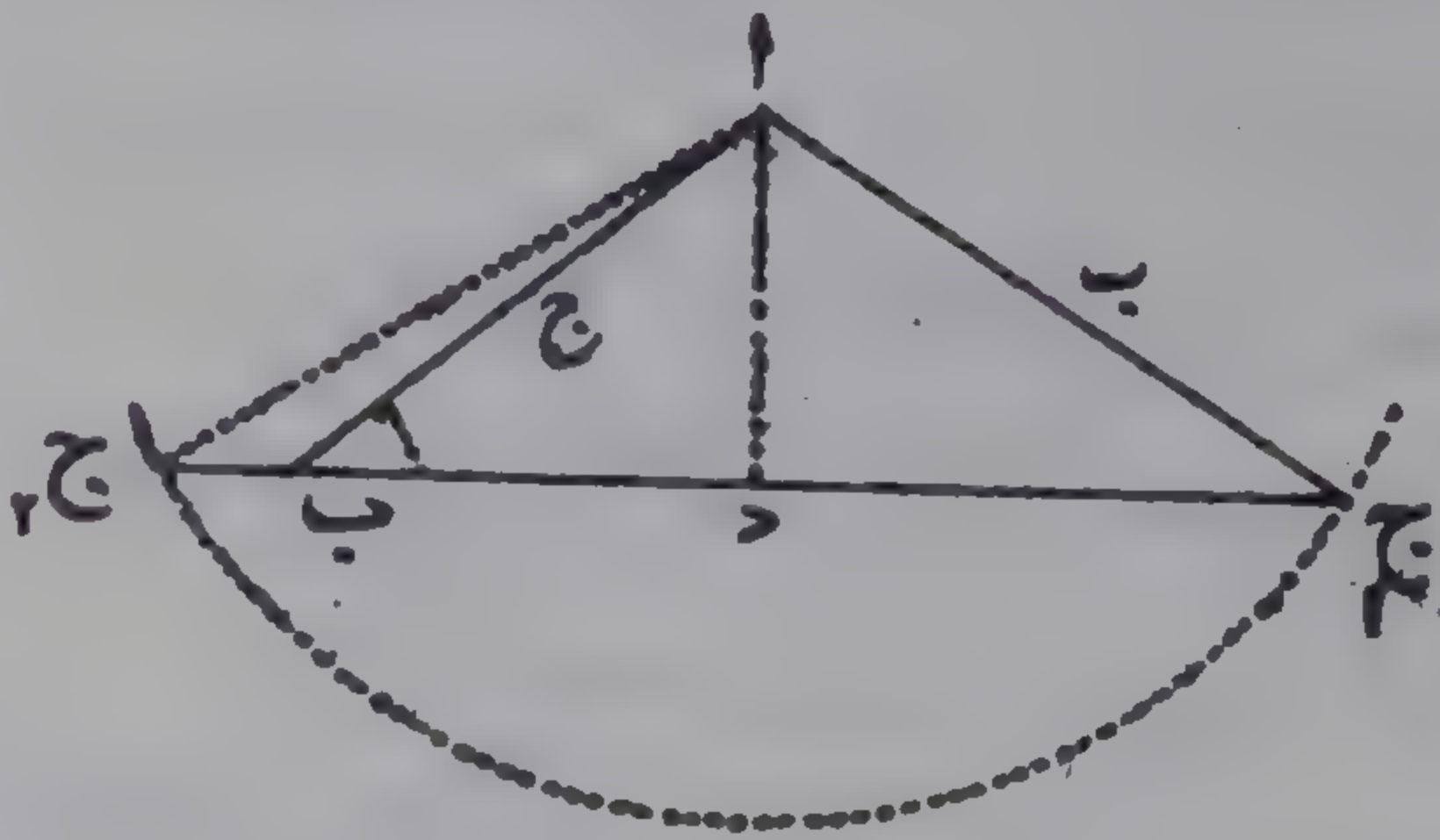
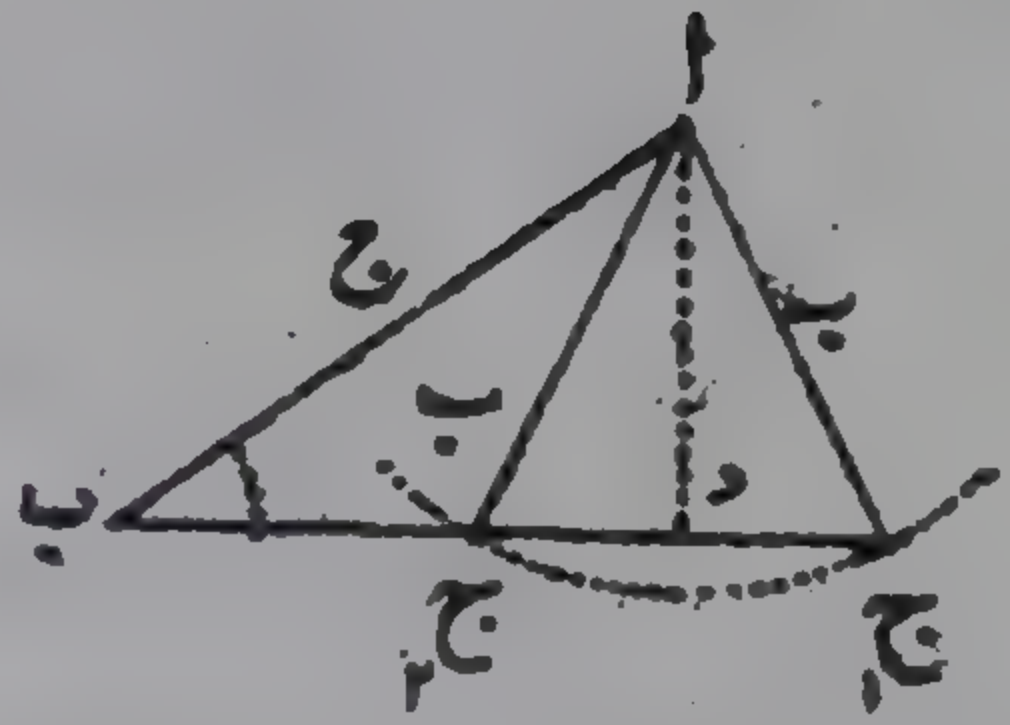
ذیل کی صورتوں میں سے ایک نہ ایک صورت پیدا ہوگی۔

ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو قطع نہ کرے (شکل اول)

یا ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو مس کرے (شکل دوم)

یا دائرہ ب ج کو دو نقطوں ...

شکل ۲   شکل ۱

شکل ۴   شکل ۳

پہلی شکل سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں کوئی ایسا مثلث نہیں ہو سکتا جو شرائط مطلوبہ کو پورا کرے۔

اس صورت میں ب < ا د یعنی < ج جب ب

دوسری شکل سے ایک مثلث ا ب د حاصل ہوتا ہے جس میں زاویہ د قائمہ ہے۔

اس صورت میں ب = ا د = ج جب ب

تیسری شکل سے دو مثلث ا ب ج۱ اور ا ب ج۲ حاصل ہوتے ہیں اس صورت میں ب بلحاظ مقدار کے ا د اور ج کے درمیان واقع ہے

یعنی ب > ج جب ب اور < ج

چوتھی شکل میں صرف ایک مثلث ا ب ج۱ ایسا ہے جو شرائطِ سوال کو پورا کرتا ہے۔

[مثلث ا ب ج، شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کرتا کیونکہ اس میں مقام ب پر جو زاویہ بنتا ہے وہ زاویہ ب کے برابر نہیں۔ لیکن وہ زاویہ ۱۸۰°۔ ب کے برابر ہے]۔ ظاہر ہے کہ اس صورت میں مقدار ب مقادیر ج جب ب اور ج دونوں سے بڑی ہے۔

اگر زاویہ ب منفرجہ ہو تو مناسب شکلیں کھینچنے سے معلوم ہو گا کہ اگر ب < ج تو کوئی مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کر سکتا (کیونکہ مثلثوں ا ب ج، اور ا ب ج، میں مقام ب پر جو زاویہ بنیگا وہ ۱۸۰°۔ ب کے برابر ہو گا اور ب کے برابر نہیں ہو گا)۔ اگر ب > ج تو معلوم ہو گا کہ اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کر سکتا ہے۔

اوپر کے نتائج کا خلاصہ یہ ہے:

فرض کرو کہ مثلث کے اجزاء ب، ج، ب معلوم ہیں۔

(۱) اگر ب < ج جب ب تو اس صورت میں کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کرتا۔

(۲) اگر ب = ج جب ب تو ایک مثلث قائم الزاویہ شرائط سوال کو پورا کرتا ہے۔

(۳) اگر ب > ج جب ب اور < ج اور زاویہ ب حادہ ہو تو دو مثلث شرائط معلومہ کو پورا کرتے ہیں۔

(۴) اگر ب > ج تو اس صورت میں صرف ایک مثلث ہو گا۔

صریحاً اگر ب = ج تو شکل سوم میں نقاط ب اور ج، ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور اس صورت میں صرف ایک مثلث ہو گا۔

(۵) اگر ب منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کر سکتا سوائے اس صورت کے جبکہ ب > ج

۱۸۷۔ صورت مشتبہ پر بحث بطریق جبریہ اس طرح ہو سکتی ہے۔

شکل دفعہ ۱۴۸ سے حاصل ہو گا۔

$$ب^2 = ج^2 + ا^2 - ۲ ج ا جم ب$$

= ب^2 - ج^2 + ج^2 جم^2 ب = ب^2 - ج^2 جب^2 ب

∴ ا - ج جم ب = ± $\sqrt{}$ ب^2 - ج^2 جب^2 ب

یعنی ا = ج جم ب ± $\sqrt{}$ ب^2 - ج^2 جب^2 ب .... (۱)

مساوات (۱) سے ا کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر ب، ج اور ب معلوم ہوں۔

(ا) اگر ب < ج جب ب تو مقدار $\sqrt{}$ ب^2 - ج^2 جب^2 ب خیالی ہوگی اور (۱) سے ا کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہ ہوگی۔

(ب) اگر ب = ج جب ب تو ا کی صرف ایک قیمت ج جم ب ہو گی۔ پس اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کریگا اور وہ مثلث قائم الزاویہ ہوگا۔

(ج) اگر ب > ج جب ب تو ا کی دو قیمتیں ہونگی لیکن چونکہ ا کا مثبت ہونا ضروری ہے اس لیے مساوات (۱) میں ہم علامت جذر کے ماقبل منفی علامت صرف اس صورت میں لے سکتے ہیں۔

جبکہ ج جم ب - $\sqrt{}$ ب^2 - ج^2 جب^2 ب مثبت ہو

یعنی جبکہ $\sqrt{}$ ب^2 - ج^2 جب^2 ب < ج جم ب

یعنی ب^2 - ج^2 جب^2 ب < ج^2 جم^2 ب

یعنی ب^2 < ج^2

اس لیے معلوم ہوا کہ دو مثلث صرف اسی صورت میں حاصل ہونگے جبکہ ب > ج جب ب اور ساتھ ہی < ج

(د) اگر زاویہ ب منفرجہ ہو تو ج جم ب منفی ہوگا اور ا کی ایک قیمت ہمیشہ منفی ہوگی اور مثلث ناممکن ہوگا۔

دوسری قیمت صرف اُس صورت میں مثبت ہوگی۔

اگر ج جم ب + √(ب² − ج² جب² ب) مثبت ہو

یعنی اگر √(ب² − ج² جب² ب) > − ج جم ب

یعنی اگر ب² > ج² جب² ب + ج² جم² ب

یعنی اگر ب > ج

اس لیے معلوم ہوا کہ جب زاویہ ب منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائطِ سوال کو پورا نہیں کرسکتا اگر ب < ج، اور صرف ایک مثلث شرائطِ مطلوبہ کو پورا کریگا اگر ب > ج

۱۸۸- مثال- معلوم ہے ب = ۱۶، ج = ۲۵ اور ب = ۳۳° ۱۵′،
ثابت کرو کہ مثلث کا حل مشتبہ ہے، باقی زاویے دریافت کرو،

معلوم ہے۔

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل جب ۳۳° ۱۵′ = ۹٫۷۳۹۰۱۲۹

ل جب ۵۸° ۵۶′ = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶

اور ل جب ۵۸° ۵۷′ = ۹٫۹۳۲۸۳۷۶

جب ج = (ج/ب) جب ب = (۲۵/۱۶) جب ب = (۱۰۰/۶۴) جب ب = (۱۰²/۲⁶) جب ۳۳° ۱۵′

اس لیے ل جب ج = ۲ + ل جب ۳۳° ۱۵′ − ۶ لوک ۲

= ۹٫۹۳۲۸۳۲۹

اس لیے ل جب ج = ۹٫۹۳۲۸۳۲۹ ‏ ‏ ‏ ل جب ۵۸° ۵۷′ = ۹٫۹۳۲۸۳۷۶

ل جب ۵۸° ۵۶′ = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶ ‏ ‏ ‏ ل جب ۵۸° ۵۶′ = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶

فرق = ۷۱۳ ‏ ‏ ‏ فرق ۱′ کے لیے = ۷۶۰

∴ زاویئی فرق = (۷۱۳/۷۶۰) × ۶۰″

= ۵۶″ تقریباً

۷۱۳
۶
۷۶)۴۲۷۸(۵۶
۳۸۰
۴۷۸
۴۵۶

اس لیے (شکل ۳ دفعہ ۱۸۶) سے حاصل ہوگا۔

ج₁ = ۵۸° ۵۶′ ۵۶″ اور ج₂ = ۱۲۱° ۳′ ۴″

∴ ∠ ب ا ج₁ = ۱۸۰° − ۳۳° ۱۵′ − ۵۸° ۵۶′ ۵۶″

= ۸۷° ۴۸′ ۴″

∠ ب ا ج₂ = ۱۸۰° − ۳۳° ۱۵′ − ۱۲۱° ۳′ ۴″

= ۲۵° ۴۱′ ۵۶″

امثلہ نمبری ۳۱

[طالب علم کو امثلۂ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳) کے نتائج کی ترسیمی عمل سے تصدیق کرنی چاہیے]

۱۔ اگر ل = ۵، ب = ۷ اور جیب ا = ۳/۴، تو معلوم کرو کہ مثلث کے حل کرنے میں مشتبہ صورت پیدا ہوگی یا نہیں۔

۲۔ اگر ل = ۲، ج = √۳ + ۱ اور ا = ۴۵° تو مثلث کو حل کرو۔

۳۔ اگر ل = ۱۰۰، ج = ۱۰۰√۲ اور ا = ۳۰° تو مثلث کو حل کرو۔

۴۔ اگر ۲ب = ۳ ل اور مس² ا = ۳/۵ تو ثابت کرو کہ تیسرے ضلع کی دو قیمتیں ہوسکتی ہیں جن میں سے ایک دوسری کی دوچند ہے۔

۵۔ اگر ا = ۳۰°، ب = ۸ اور ل = ۶ تو ج دریافت کرو۔

۶۔ معلوم ہے ب = ۳۰°، ج = ۱۵۰ اور ب = ۵۰√۳

ثابت کرو کہ اُن دو مثلثوں میں سے جو شرائطِ سوال کو پورا کرتے ہیں، ایک مثلث متساوی الساقین ہے اور دوسرا مثلث قائم الزاویہ ہے،

تیسرے ضلع کی بڑی قیمت دریافت کرو۔

اگر ب = ۳۰°، ج = ۱۵۰ اور ب = ۷۵، تو کیا حل مشتبہ ہوگا؟

۷۔ صورتِ مشتبہ میں ل، ب اور ا معلوم ہیں، ثابت کرو کہ ج کی دو قیمتوں کا

تفاوت ۲ $\sqrt{\text{ل}^2 - \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{ا}}$ ہے۔

۸- اگر ل = ۵، ب = ۴ اور ا = ۵۰° تو مثلث کے باقی زاویے دریافت کرو، معلوم ہے۔

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل جب ۳۴° ۴۹′ = ۹ء۷۵۲۰۵۰۷

اور ل جب ۳۴° ۳۰′ = ۹ء۷۵۳۰۹۹۳

۹- اگر ل = ۹، ب = ۱۲ اور ا = ۳۰° تو ج دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء لوک ۳ = ۴۷۷۱۲ء

لوک ۱۷۱ = ۲ء۲۳۳۰۱ لوک ۳۶۸ = ۲ء۵۶۵۸۳۵

ل جب ۱۱° ۸′ ۹″ = ۹ء۳۱۱۰۸، ل جب ۱۱° ۴۸′ ۳۹″ = ۹ء۸۲۳۹۱

اور ل جب ۱۰۸° ۱۱′ ۱۱″ = ۹ء۹۷۷۷۴

۱۰- معلوم کرو کہ ذیل کے مثلثوں کے حل مشتبہ ہیں یا نہیں۔ صورت مشتبہ میں تیسرے ضلع کی چھوٹی قیمت اور دونوں صورتوں میں باقی زاویے دریافت کرو۔

(۱) ا = ۳۰°، ج = ۲۵۰ فٹ اور ل = ۱۲۵ فٹ

(۲) ا = ۳۰°، ج = ۲۵۰ فٹ اور ل = ۲۰۰ فٹ

معلوم ہے۔

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳۸۹۳ء۶ = ۷۸۰۹۶۰۱ء

ل جب ۳۸° ۴۱′ = ۹ء۷۹۵۸۸۰۰

اور ل جب ۸° ۴۱′ = ۹ء۱۷۸۹۰۰۱

۱۱- معلوم ہے ل = ۲۵۰، ب = ۲۴۰ اور ا = ۶۲° ۴′ ۴۸″ زاویے ب اور ج دریافت کرو اور نیز یہ بھی معلوم کرو کہ کیا ان کی ایک سے زیادہ قیمت ہو سکتی ہے؟

معلوم ہے، لوک ۲ء۵ = ۳۹۷۹۴۰۰ء، لوک ۲ء۴ = ۳۸۰۲۱۱۲ء

ل جب ۶۲° ۴′ = ۹ء۹۴۷۸۳۷۰۲، ل جب ۶۲° ۵′ = ۹ء۹۴۷۸۴۱۱۱

اور ل جب ۵۹° ۵′ = ۹ء۹۳۶۰۶۷۳۹

۱۲- دو سیدھی سڑکیں ایک دوسری کو زاویہ ۶۰° پر قطع کرتی ہیں، ان کے
مقام تقاطع سے دو مسافر ا اور ب ایک ہی وقت پر روانہ ہوتے ہیں، ا ایک سڑک پر ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتا ہے اور ب یکساں رفتار سے دوسری سڑک پر چلتا ہے، تین گھنٹے کے بعد اُن کا باہمی فاصلہ ۹ میل ہے ثابت کرو کہ اس شرط کو پورا کرنے کے لیے ب کی رفتار کی دو قیمتیں ہو سکتی ہیں، اُن کو معلوم کرو۔

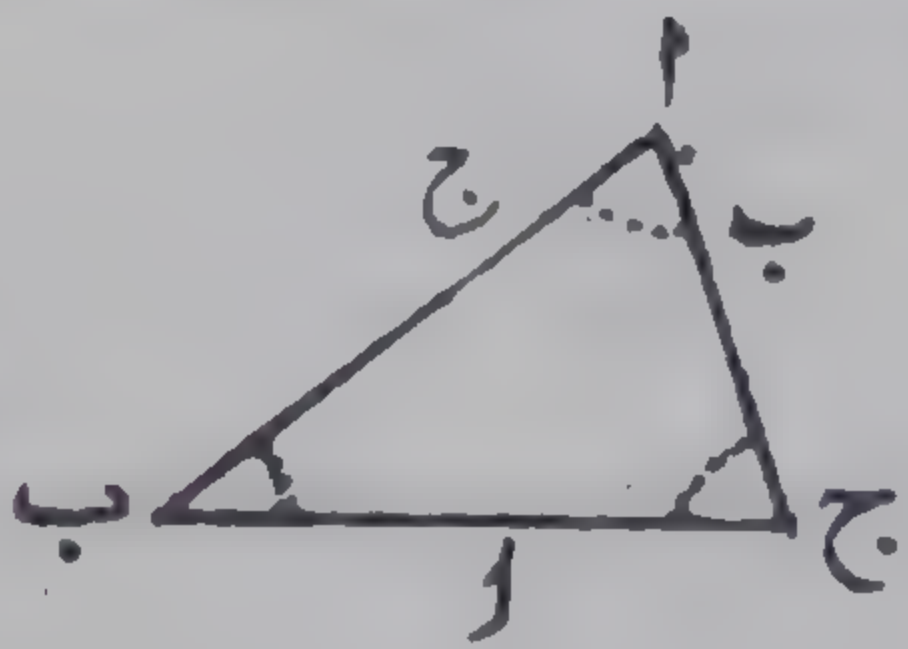
[ذیل کی تین مثالوں کے لیے جدولوں کی کتاب کی ضرورت ہے]

۱۳- ایک مثلث کا ایک ضلع ۳۲،۷ فٹ ہے اور اس کے مقابل کا زاویہ ۴۰° ہے مثلث کا دوسرا ضلع ۱۰٫۱۵ فٹ ہے اس کے مقابل کا زاویہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس زاویہ کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

۱۴- ایک مثلث کے دو اضلاع ۵۲۳،۴۵ اور ۱۵۸۶،۶ فٹ ہیں اور ضلع ۱۵۸۶،۶ کے مقابل کا زاویہ ۱۱° ۵' ہے، مثلث یا مثلثوں کے باقی زاویے دریافت کرو۔

۱۵- معلوم ہے ا = ۱۰°، ا = ۲۳۰۸،۷ اور ب = ۹۰۳۲،۷ ج کی چھوٹی قیمت دریافت کرو۔

۱۸۹- صورت چہارم- ایک ضلع اور دو زاویے یعنی ا، ب اور ج معلوم ہیں۔

چونکہ ایک مثلث کے تین زاویے دو قائموں کے برابر ہوتے ہیں اس لیے تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہے۔

اضلاع ب اور ج روابط ذیل سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\frac{ب}{جب\ ب} = \frac{ج}{جب\ ج} = \frac{ا}{جب\ ا}$$

جس سے $ب = ا \frac{جب\ ب}{جب\ ا}$ اور $ج = ا \frac{جب\ ج}{جب\ ا}$

۱۹۰- صورتِ پنجم- تینوں زاویے ا، ب، ج معلوم ھیں۔ اس صورت میں صرف اضلاع کی نسبتیں ذیل کے ضابطوں سے معلوم ہوسکتی ہیں۔

$$\frac{ا}{جب\ ا} = \frac{ب}{جب\ ب} = \frac{ج}{جب\ ج}$$

اضلاع کی مطلق قیمتیں اس صورت میں معلوم نہیں ہوسکتیں۔

امثلہ نمبری ۳۲

۱- اگر جم ا = $\frac{۱۷}{۲۲}$ اور جم ج = $\frac{۱}{۱۴}$ تو ا : ب : ج کی نسبتیں دریافت کرو۔

۲- ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱ : ۲ : ۷ ہیں ثابت کرو کہ سب سے بڑے ضلع کی نسبت سب سے چھوٹے ضلع کے ساتھ $\sqrt{۵}$ + ۱ : $\sqrt{۵}$ - ۱ ہے۔

۳- اگر ا = ۴۵°، ب = ۷۵° اور ج = ۶۰° تو ثابت کرو کہ

ا + ج $\sqrt{۲}$ = ۲ب

۴- ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب ۴۱° ۱۳′ ۲۲″ اور ۱۰۷° ۱۹′ ۵″ ہیں اور پہلے زاویے کے مقابل کا ضلع ۵۵ ہے، دوسرے زاویے کے مقابل جو ضلع ہو اُس کا طول دریافت کرو، معلوم ہے۔

لوک ۵۵ = ۱٫۷۴۰۳۶۲۷ لوک ۷۹٫۰۶۳ = ۴٫۸۹۷۹۷۷۵

ل جب ۴۱° ۱۳′ ۲۲″ = ۹٫۸۱۸۸۷۷۹

اور ل جب ۷۱° ۱۹′ ۵″ = ۹٫۹۷۶۴۹۲۷

۵- دو جہازوں کے درمیان فاصلہ ایک میل ہے اور ہر ایک جہاز سے اُس زاویہ کا مشاہدہ کیا گیا ہے جو دوسرے جہاز اور کنارہ پر کے ایک منارۂ روشنی کے درمیانی فاصلے کے محاذی اول الذکر جہاز پر بنتا ہے اور یہ زاویے بالترتیب ۵۲° ۲۵′ ۱۵″ اور ۷۵° ۹′ ۳۰″ ہیں، معلوم ہے۔

ل جب ۷۵° ۹′ ۳۰″ = ۹٫۹۸۵۲۲۳۵

ل جب ۵۲ ۲۵ ۱۵ = ۹۱۸۹۹۰۰۵۵

لوک ۱٫۲۱۹۷ = ۶۰۸۶۲۵۳۰ اور لوک ۱٫۲۱۹۸ = ۶۰۸۶۲۸۸۶

ہر ایک جہاز سے روشنی کا فاصلہ دریافت کرو۔

۶۔ ایک مثلث میں قاعدے کے متصل زاویے °۲۲ ½ اور °۱۱۲ ½ ہیں، ثابت کرو کہ قاعدہ ارتفاع کا دوچند ہے۔

ذیل کی پانچ مثالوں کے لیے لوکارتمی جدولوں کی ضرورت ہوگی۔

۷۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۷ فٹ ہے اور قاعدے کے متصلہ زاویے ′۲۳ °۱۲۹ اور ′۳۶ °۳۸ ہیں، چھوٹے ضلع کا طول دریافت کرو۔

۸۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۵ : ۱۰ : ۲۱ ہوں اور چھوٹے زاویے کے مقابل کا ضلع ۳ فٹ ہو تو باقی اضلاع دریافت کرو۔

۹۔ ایک مثلث کے زاویے °۱۵۰، ′۲۰ °۸ اور ′۴۰ °۱۱ ہیں اور سب سے بڑا ضلع ۱۰۰۰ فٹ ہے، سب سے چھوٹا ضلع دریافت کرو۔

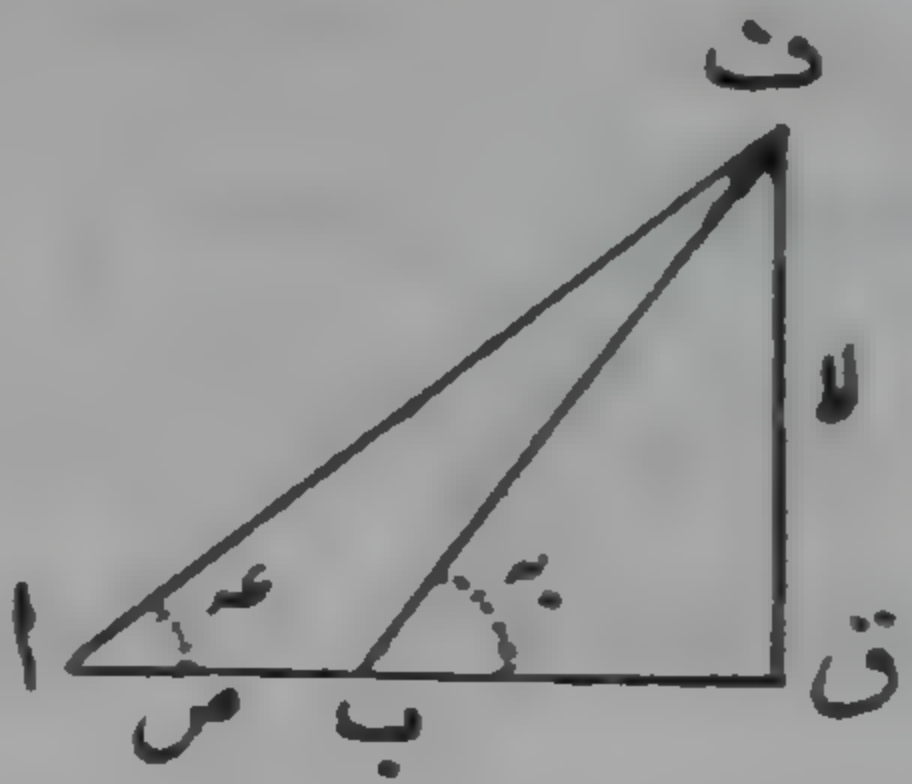
۱۰۔ نقطہ ب سے نقطہ ا کا فاصلہ دریافت کرنے کے لیے خط ب ج اور زوایا ا ب ج اور ب ج ا کو ناپا گیا ہے اور ان کی پیمائشیں بالترتیب ۲۸۷ گز اور ′۱۰ ′۳۲ °۵۵ اور ″۲۰ ′۸ °۱۵ ہیں، فاصلہ ا ب دریافت کرو۔

۱۱۔ فاصلہ ا ف معلوم کرنے کی غرض سے ا ب مساوی ۱۰۰۰ گز کسی مناسب سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط ا اور ب پر کے زاویے ف ا ب اور ف ب ا بالترتیب ′۱۸ °۱۴ اور ′۳۸ °۱۱۴ مشاہدہ کیے گئے ہیں، فاصلہ ا ف کو قریب ترین گز تک دریافت کرو۔

چودھواں باب

بلندیاں اور فاصلے

۱۹۱۔ اس باب میں ہم خاص قسم کے عملی مسائل پر غور کرینگے جو بالعموم ارضی پیمائشوں میں استعمال ہوتے ہیں، اس قسم کے سادہ سوالات کا ذکر باب سوم میں آچکا ہے۔

۱۹۲۔ مختلف مقامات پر زاویوں کا مشاہدہ کرنے سے ایک ایسے برج کی بلندی دریافت کرو جس تک ہم پہنچ نہیں سکتے۔

فرض کرو کہ ف ق برج ہے اور پائیں برج ق میں سے جو زمین گزرتی ہے وہ متوازی الافق ہے۔

اس زمین کے نقطہ ا پر برج کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع عہ ناپو۔ مقام ا سے پائین برج کی سیدھ میں فاصلہ ا ب (= ص) ناپو اور مقام ب پر زاویۂ ارتفاع بہ مشاہدہ کرو۔

اب برج کی بلندی لا مطلوب ہے، ہمیں اس کو فاصلہ ص سے منسلک کرنا ہے، اس کا سب سے اچھا طریقہ حسب ذیل ہے:-

مثلث ف ب ق سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب ف}} = \text{جب به} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اور مثلث ف ا ب سے

$$\frac{\text{ف ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ف ا ب}}{\text{جب ب ف ا}} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

چونکہ $\angle$ ب ف ا = $\angle$ ق ب ف - $\angle$ ق ا ف = بہ - عہ

(۱) اور (۲) کو باہم ضرب دینے سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

یعنی

$$\text{لا} = \text{ص} \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

جس سے بلندی لا حاصل ہوتی ہے اور اس ضابطہ کی صورت لوکارتمی حسابات کے لیے نہایت موزوں ہے۔

عددی مثال۔ اگر ص = ۱۰۰ فٹ، عہ = ۳۰° اور بہ = ۶۰° تو

$$\text{لا} = ۱۰۰ \frac{\text{جب ۳۰° جب ۶۰°}}{\text{جب ۳۰°}} = ۱۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۸۶٫۶۶ \text{ فٹ}$$

۱۹۳۔ اگر فاصلہ ا ب کو ق کی سیدھ میں ناپنا آسان نہ ہو تو اس کو سطح افقی پر کسی اور مناسب سمت میں ناپو اور مقام ا پر ف کا زاویۂ ارتفاع عہ مشاہدہ کرو، نیز زاویہ ف ا ب (= بہ) معلوم کرو۔

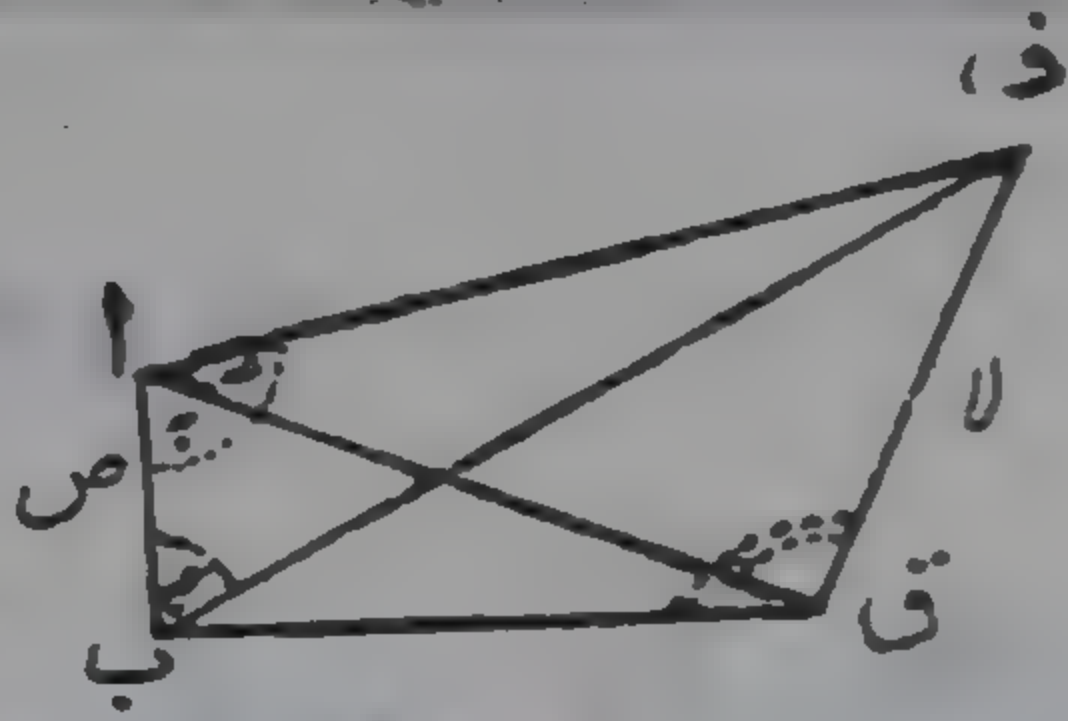
مقام ب پر زاویہ ف ب ا (= جہ) ناپو۔

مثلث ف ا ب میں

$$\angle \text{ ا ف ب} = ۱۸۰° - \angle \text{ ف ا ب} - \angle \text{ ف ب ا}$$

$$= ۱۸۰° - (\text{بہ} + \text{جہ})$$

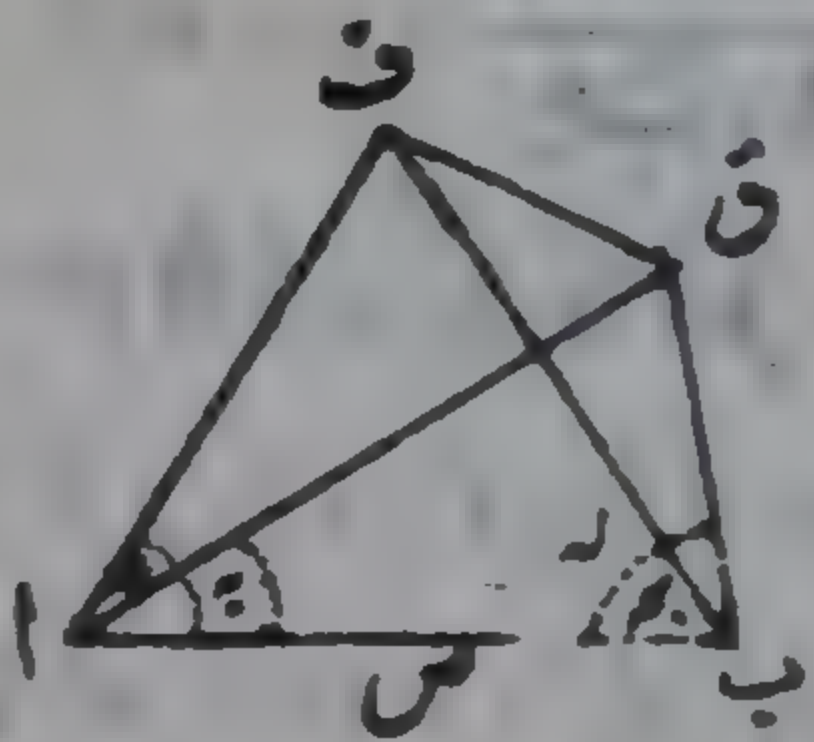
اس لیے

$$\frac{\text{ا ف}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ف ب ا}}{\text{جب ب ف ا}} = \frac{\text{جب جہ}}{\text{جب (بہ + جہ)}}$$

مثلث ف ا ق سے حاصل ہوگا۔

$$لا = اف \; جب \; عہ = ص \frac{جب \; عہ \; جب \; جہ}{جب \; (بہ + جہ)}$$

اور یہ جملہ لوکارثمی حسابات کے لیے موزوں ہے۔

۱۹۴- دو مقامات کے درمیان کا فاصلہ معلوم ہے، اُن پر کھڑے ہوکر دو اور ایسے مقامات کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو جن تک ہم پہنچ نہیں سکتے، چاروں مقام ایک ہی سطح میں واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ف اور ق دو مقام ہیں جن کا باہمی فاصلہ ف ق مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ مقامات ا اور ب کا فاصلہ (ص) دیا ہوا ہے مقام ا پر زاویے ف ا ب اور ق ا ب ناپو اور ان کو بالترتیب عہ اور بہ سے تعبیر کرو۔

نیز مقام ب پر زاویے ف ب ا اور ق ب ا ناپو اور ان کو بالترتیب جہ اور لہ سے تعبیر کرو۔

اب چونکہ مثلث ف ا ب میں ایک ضلع ص اور دو متصل زاویے عہ اور جہ معلوم ہیں۔ اس لیے بموجب دفعہ ۱۶۳، اف ذیل کے ربط سے حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\frac{اف}{ص} = \frac{جب \; جہ}{جب \; اف ب} = \frac{جب \; جہ}{جب \; (عہ + جہ)} \quad \ldots\ldots (1)$$

اسی طرح سے مثلث ق ا ب میں

$$\frac{\text{ا ق}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب لہ}}{\text{جب (بہ + لہ)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

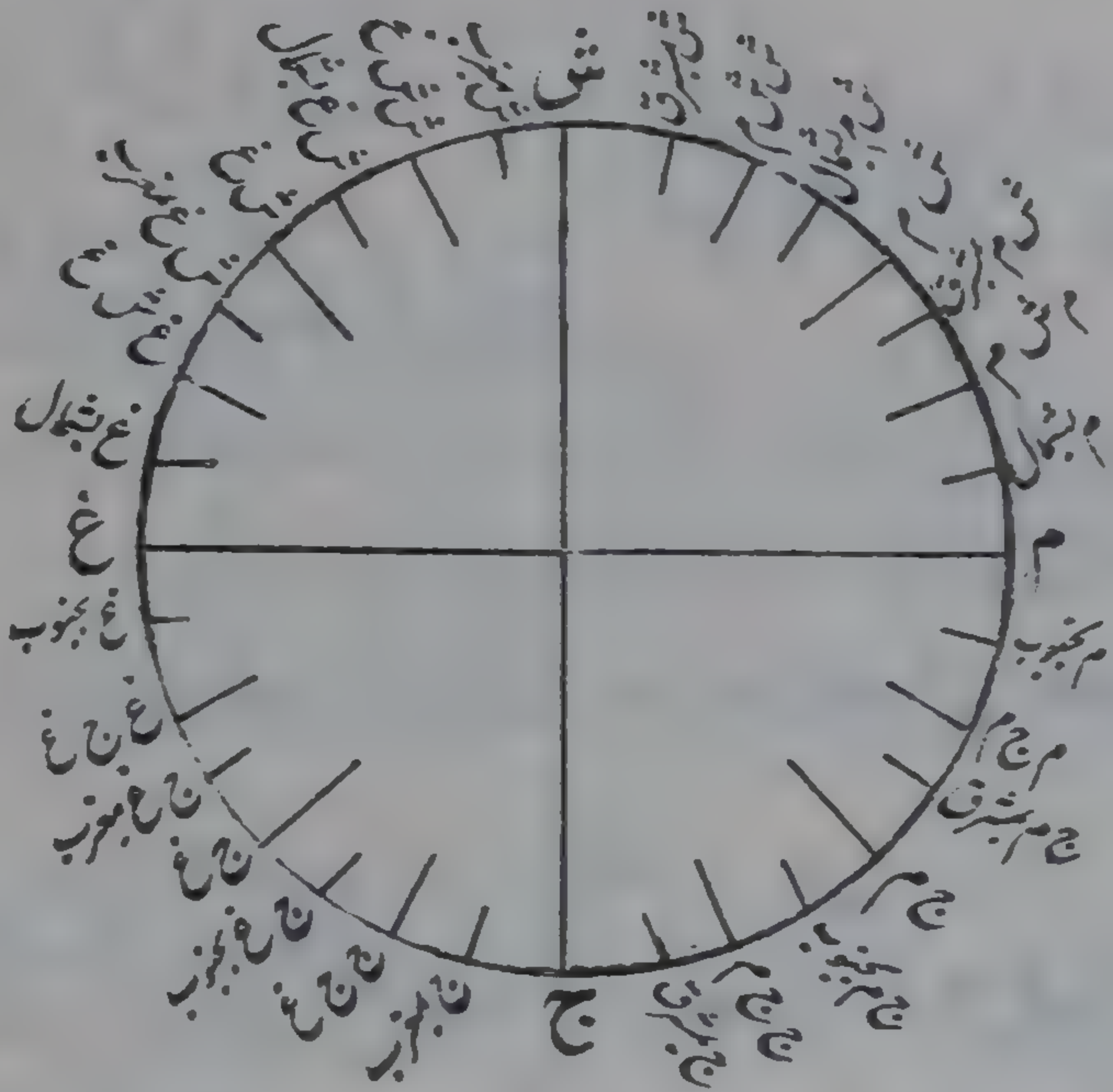
اب ہمیں مثلث ا ف ق کے اضلاع ا ف اور ا ق نیز ان کا درمیانی زاویہ ف ا ق (= عہ - بہ) معلوم ہوگیا۔ اس لیے ہم ضلع ف ق کو دفعہ ۱۸۱ کے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر چاروں مقامات ا، ب، ف، ق ایک ہی سطح میں نہ ہوں تو ہمیں زاویہ ف ا ق بھی ناپ لینا چاہیے کیونکہ اس صورت میں ف ا ق زاویہ عہ - بہ کے برابر نہیں ہے، باقی سب طرح سے حل مندرجۂ بالا عمل کے مطابق ہوگا۔

۱۹۵- بحری قطب نما کے نقاط وجہات-

اگر نقطہ معینہ و پر کھڑے ہو کر ایک اور نقطہ معلومہ ب کی طرف دیکھیں تو جس سمت میں نقطہ ب نقطہ و سے نظر آئے اس کو بلحاظ نقطۂ و کے نقطہ ب کی جہت کہتے ہیں مثلاً اگر و ب اسمات شمال اور مشرق کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے تو ب کی جہت یا سمت کو ہم "شمال مشرق" کہینگے۔ اگر یہ کہا جائے کہ ایک خط کی جہت یا سمت شمال سے ۲۰° مغرب کو ہے تو اس کا یہ مطلب ہوگا کہ یہ سمت شمال سے زاویہ ۲۰° بناتی ہے اور یہ زاویہ شمال کی جانب سے مغرب کی طرف کو ناپا گیا ہے۔

اس غرض سے کہ ایک نقطہ کی جہت بآسانی قائم ہو سکے یا بیان ہو سکے بحری قطب نما کے کارڈ کو ۳۲ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ملاحظہ ہو شکل صفحہ ۲۶۰ یا صفحہ آئندہ۔ ان حصوں میں مختلف نشان لگے ہوتے ہیں۔ فرض کرو فی الحال زیر بحث صرف وہی ربع ہے جو شمال اور مشرق کے درمیان واقع ہے۔ ش اور م کی درمیانی قوس کے نقطۂ وسط پر نشان ش م یعنی "شمال مشرق" بنا ہوا ہے۔

نیز ش م اور ش اور م کے درمیان جو قوسین ہیں ان کے

منصفوں پر بالترتیب "شمال۔شمال مشرق" اور "مشرق۔شمال۔مشرق"
(یعنی ش ش م اور م ش م) لکھا ہوا ہے۔

اگر شمال کی طرف سے شمار کیا جائے تو باقی چھوٹے چار حصوں کو شمال بمشرق،
ش م بشمال، ش م بمشرق اور مشرق بشمال کہتے ہیں اسی طرح سے قطب نما کے
باقی تین حصے بھی منقسم ہو سکتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ کارڈ کے دو چھوٹے درجوں کی درمیانی قوس کے محاذی مرکز
د پر زاویہ $\frac{۳۶۰}{۳۲}$ یعنی $۱۱\frac{۱}{۴}$ بنتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲

۱۔ ایک مربع برج کے وسط میں ایک علم قائم ہے، ایک شخص کو جو برج کے

ایک رُخ کے وسط کے مقابل زمین پر چلتا ہے علم کی چوٹی عین ۱۰۰ فٹ کے فاصلے سے
دکھائی دینا شروع ہوتی ہے، ۱۰۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہ برج کی چوٹی اور علم کی چوٹی کے
ارتفاعی زاویوں کو مشاہدہ کرتا ہے، ان زاویوں کے مماس بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{5}{9}$ ہیں۔ بُرج
کی بلندی اور عرض نیز علم کی بلندی دریافت کرو، زمین متوازی الافق ہے۔

۲۔ سطح ہموار پر ایک شخص ایک برج کی سیدھ میں جاتا ہے اور ایک خاص مقام
پر برج کا زاویۂ ارتفاع ۱۰° مشاہدہ کرتا ہے، برج کی سمت میں ۵۰ گز جانے کے بعد وہی
زاویۂ ارتفاع ۱۵° دکھائی دیتا ہے، اگر معلوم ہو۔

ل جب ۱۵° = ۹٫۴۱۲۹۹۶۲، ل جم ۵° = ۹٫۹۹۸۳۴۴۲

لوک ۲۵٫۷۸۳ = ۱٫۴۱۱۳۳۳۴، اور لوک ۲۵٫۷۸۴ = ۱٫۴۱۱۳۵۰۳

تو برج کی بلندی گزوں میں ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۳۔ ایک بُرج دع سطح افقی پر کھڑا ہے اور اُسی سطح میں ایک خط ا ب ج د
واقع ہے، بُرج کی بلندی کے محاذی ا پر زاویہ ط، ب پر زاویہ ۲ط اور ج پر زاویہ
۳ط بنتا ہے۔ اگر ا ب اور ب ج بالترتیب ۵۰ اور ۲۰ فٹ ہوں تو برج کی بلندی
اور فاصلہ ج د معلوم کرو۔

۴۔ ایک ۵۰ فٹ اونچا برج ایک ٹیلے کی چوٹی پر واقع ہے، سطح زمین پر کے کسی نقطہ
سے برج کے پائین اور راس کے ارتفاعی زاویے بالترتیب ۵۲° اور ۵۴° ناپے گئے ہیں،
ٹیلے کی بلندی دریافت کرو۔

۵۔ ایک عمودی لاٹھ ۱۰۰ فٹ سے زیادہ اونچی ہے اور اس کے دو حصّے ہیں، نچلا حصّہ
کُل طول کا $\frac{1}{4}$ ہے، لاٹھ کی جڑ میں سے جو سطح افقی گزرتی ہے اس پر ایک نقطہ لاٹھ سے
۴۰ فٹ کے فاصلے پر لیا گیا ہے اور اوپر کے حصے کے محاذی اُس نقطہ پر جو زاویہ بنتا ہے
اُس کا مماس $\frac{1}{4}$ ہے، لاٹھ کی بلندی دریافت کرو۔

۶۔ ایک برج کے محاذی ایک نقطہ پر جو پائین برج میں سے گزرنے والی سطح افقی
پر واقع ہے زاویہ عہ بنتا ہے اور ایک دوسرے نقطہ پر جو پہلے نقطہ سے ۵ فٹ
اونچا ہے پائین بُرج کا زاویہ انخفاض بہ مشاہدہ کیا گیا ہے، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۷۔ سطح سمندر کے کنارے پر کی ہموار زمین کے کسی مقام سے ایک شخص غبارہ کے

ذریعہ سمت راس میں اوپر چڑھا اور اس نے سمندر میں ایک ساکن جہاز کا زاویہ نشیب ۳۰° مشاہدہ کیا، پھر ۶۰۰ فٹ عمودی سمت میں نیچے اترنے کے بعد اُس نے دیکھا کہ زاویہ نشیب ۱۵° ہے، نقطۂ صعود سے جہاز کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۸۔ سطح ہموار پر ایک بُرج ف ق کا پائین ق ہے، اُسی سطح افق میں دو اور نقاط ا اور ب ایسے ہیں کہ ∠ ق ا ب = ۹۰° اور ا ب = ۴۰ فٹ، نیز یہ معلوم ہے کہ

$$\text{مم ف ا ق} = \frac{۳}{۱۰} \quad \text{اور} \quad \text{مم ف ب ق} = \frac{۱}{۲}$$

برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک مینار کسی شخص کے م ج م کی طرف واقع ہے، اور دوپہر کے وقت اس کے سایہ کا سرا ایک شخص کے شمال۔مشرق کی طرف ہوتا ہے، اگر سایہ ۸۰ فٹ لمبا ہو اور نقطۂ نظر سے مینار کا ارتفاع ۴۵° ہو تو مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۰۔ دو مقامات ا اور ب سے ایک بُرج کا مشاہدہ کرنے پر معلوم ہوا کہ یہ ا کے شمال کی طرف اور ب کے شمال۔مغرب کی طرف واقع ہے، ب مقام ا سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلے پر مشرق کی طرف کو ہے، اگر مقام ا سے بُرج کا زاویہ ارتفاع دیکھا جائے تو یہ زاویہ اُس زاویہ ارتفاع کے متمم کے برابر ہوتا ہے جو مقام ب سے مشاہدہ کیا گیا ہو، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک مینار کا ارتفاع ایک ایسے مقام سے جو اس کے جنوب کی طرف واقع ہے ۴۵° ہے اور ایک دوسرے مقام سے جو مقام اول الذکر کے مغرب کی طرف واقع ہے ۱۵° ہے، اگر ان دو مقامات کے درمیان فاصلہ ل ہو تو ثابت کرو کہ

بلندی $\frac{ل(\sqrt{۳} - ۱)}{۲\sqrt[۴]{۳}}$ ہے۔

۱۲۔ ایک گرجے کے برج کا قاعدہ شکل میں مربع ہے، ایک شخص اس کے قطر ممدودہ پہ برج سے ۲۰ فٹ کے فاصلے پر کھڑا ہو کر برج کی چوٹی کے دو بیرونی کونوں میں سے ہر ایک کے زاویۂ ارتفاع کو ۳۰° مشاہدہ کرتا ہے، نیز سب سے نزدیک کے

کونے کا ارتفاع ۵ہ ہے، ثابت کرو کہ برج کا عرض ل (۲√۔۱۰√) فٹ ہے۔

۱۳- ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور ایک شخص اس کے جنوب کی طرف مقام ا پر کھڑا ہو کر اس کا زاویۂ ارتفاع ۶۰ مشاہدہ کرتا ہے، پھر وہ ا کے مغرب کی طرف مقام ب پر جاتا ہے اور اس جگہ زاویۂ ارتفاع ۴۵ پاتا ہے، اس کے بعد ا ب ممدودہ میں ایک مقام ج پر زاویۂ ارتفاع ۳۰ ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مقام ب مقامات ا اور ج کے عین وسط میں واقع ہے۔

۱۴- ایک اُفقی قاعدہ کا طول ۲ ل ہے اور اس کے دو کناروں سے ایک چوٹی کا زاویہ ارتفاع طہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور اس کے وسط سے یہی زاویہ فہ دکھائی دیتا ہے۔

ثابت کرو کہ چوٹی کی بلندی $\frac{\text{ل جب طہ جب فہ}}{\sqrt{\text{جب (فہ + طہ) جب (فہ - طہ)}}}$ ہے۔

۱۵- دو مقامات ا اور ب کے درمیان فاصلہ ۱۰۰۰ فٹ ہے، اسی سطح افقی میں جس میں ا ب واقع ہے ف اور ق خط ا ب کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں، زاویے ف ا ب، ف ب ا، ق ا ب، ق ب ا بالترتیب ۷۵، ۳۰، ۴۵ اور ۹۰ ہیں، معلوم کرو کہ ف مقام ق سے کتنی دور ہے اور ان میں سے ہر ایک ا اور ب سے کتنی دور ہے۔

امثلۂ ذیل کے حل کرنے میں لوگارتمی جدولوں کی ضرورت ہوگی۔

۱۶- سطح افقی کے ایک نقطہ پر کسی پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع ۲۲ ۱۵ ہے اور سطح کے ایک اور نقطہ پر جو کہ پہاڑ اور نقطۂ اول کو ملانے والے خط راست میں نقطۂ اول سے ایک میل کے فاصلہ پر واقع ہے۔ چوٹی کا ارتفاع ۱۰ ۲۱ ہے پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۷- ایک پہاڑ کی چوٹی سے دو مسلسل میل کے پتھروں کے انخفاضی زاویے ۵ اور ۱۰ مشاہدہ کیے گئے ہیں، پتھر ہموار زمین پر ایک ایسی سطح عمودی میں واقع ہیں جو نقطۂ نظر میں سے گزرتی ہے، پہاڑ کی بلندی اور نزدیک کے پتھر کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۸- سطح افقی پر ایک قلعہ اور مقبرہ ہے، قلعہ کی بلندی ۱۴۰ فٹ ہے اور اس کی چوٹی سے مقبرہ کی چوٹی اور پائین کے انخفاضی زاویے ۳۰ اور ۴۵ مشاہدہ

کیے گئے ہیں، مقبرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۹۔ ایک علم ع ن ہموار زمین پر قائم ہے، ایک بنیادی خط ا ب خط ا ن پر عمود وار ناپا گیا ہے، نقاط ا، ب، ن ایک ہی سطح افقی میں واقع ہیں اور زاویے ع ا ن اور ع ب ن بالترتیب عہ اور بہ ہیں، ثابت کرو کہ علم کی بلندی

$$\text{اب}\ \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\sqrt{\text{جب (عہ - بہ) جب (عہ + بہ)}}}\ \text{ہے}$$

اگر اب = ۱۰۰ فٹ، عہ = ۷۰°، اور بہ = ۵۰° تو بلندی دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک شخص نے ایک برج کے ٹھیک جنوب میں اُس سطح افقی پر کھڑے ہوکر جو پائین برج میں سے گزرتی ہے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۵° ۱۶′ دیکھا، ۱۰۰ اگز مشرق کی طرف جانے پر اُس نے ارتفاع ۵۰° ۸′ پایا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک شخص نے غبارہ میں بیٹھ کر زمین پر ایک چیز کا زاویۂ انخفاض ۳۳° دیکھا وہ چیز اس وقت اس کے ٹھیک جانب شمال میں تھی، اس کے بعد ہوا غبارہ کو ۳ میل مغرب کی طرف لے گئی اب زاویۂ انخفاض ۱۲° تھا، غبارہ کی بلندی دریافت کرو۔

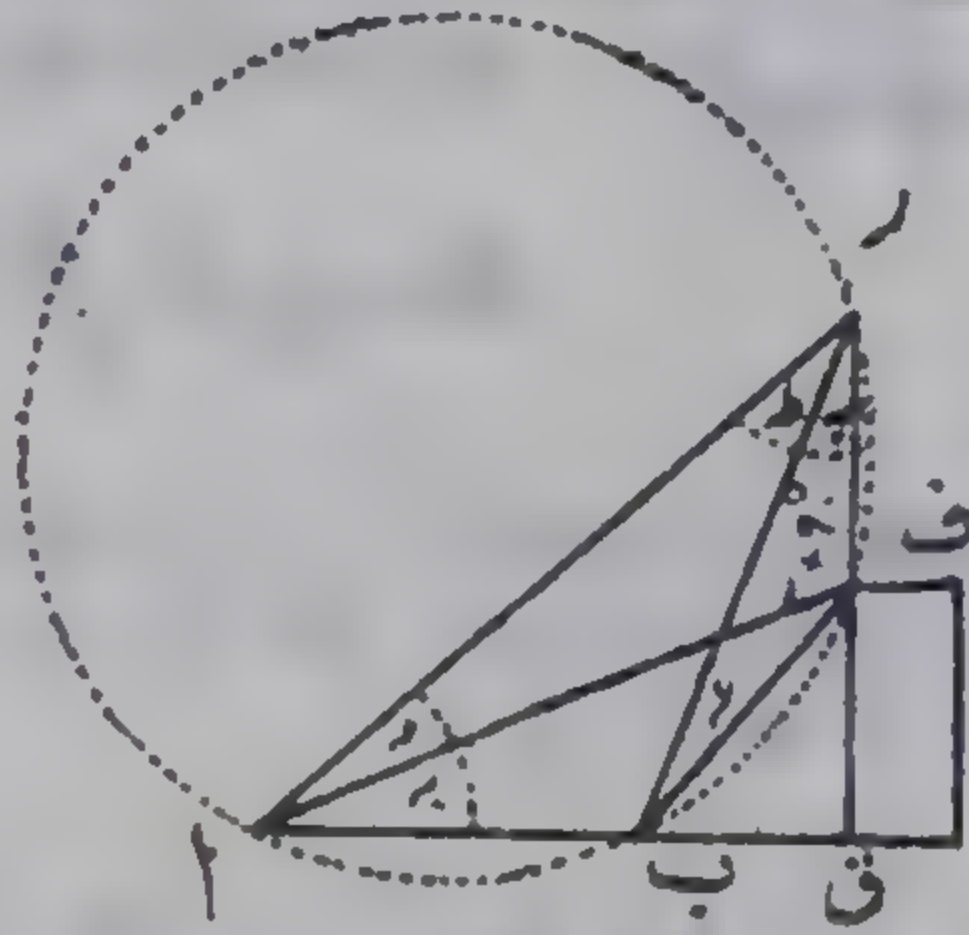
۲۲۔ ایک افقی بنیادی خط ا ب (= ۱۰۰۰ فٹ) کے دونوں سروں سے پائین برج ج کی جہات مشاہدہ کی گئیں اور معلوم ہوا کہ ∠ ج ا ب = ۵۶° ۲۳′ اور ∠ ج ب ا = ۷۴° ۱۵′ اور مقام ا سے برج کا ارتفاع ۹° ۲۵′ دیکھا گیا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۱۹۶۔ مثال ۱۔ سطحِ اُفقی پر ایک برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک جھنڈا ہے۔ جھنڈے اور برج کے محاذی سطح اُفقی کے ایک مقام پر زاویے عہ اور بہ بنتے ہیں، ایک شخص اُن کو ناپتا ہے اس کے بعد وہ برج کے پائین کی طرف ایک معلومہ فاصلہ ا چل کر دیکھتا ہے کہ جھنڈے کے محاذی نئے مقام پر

دھی زاویہ بنتا ھے جو پہلے تھا ثابت کرو کہ برج کی بلندی اور جھنڈے کا طول بالترتیب

$$\frac{\text{ا جب بہ جم (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا جب عہ}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}} \quad \text{ہیں}$$

فرض کرو کہ ف چوٹی اور ق پائین برج ہے۔ نیز ف ر جھنڈا ہے۔ فرض کرو کہ نقاط ا اور ب پر زاویے ناپے گئے ہیں یعنی ∠ ف ا ق = بہ اور ∠ ف ا ر = ∠ ف ب ر = عہ، چونکہ یہ دو آخری زاویے برابر ہیں اس لیے ان چار نقاط ا، ب، ف، ر میں سے ایک دائرہ گزریگا۔

جھنڈے کی بلندی دریافت کرنے کے لیے ہمیں نامعلوم طول ف ر اور معلومہ طول ا ب کا باہمی تعلق دریافت کرنا چاہیے۔ اس غرض سے ہم کو چاہیے کہ ان میں سے ہر ایک طول کو ا ر کے ساتھ ایک ربط کے ذریعہ منسلک کردیں۔

سب سے اول مثلث ا ر ف اور ا ر ب کے زاویوں کی تحقیق کرنی چاہیے۔
چونکہ نقاط ا، ب، ف، ر ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

اس لیے ∠ ب ر ف = ∠ ب ا ف = بہ

اور ∠ ا ف ب = ∠ ا ر ب = طہ (فرض کرو)۔

نیز ∠ ا ف ر = ۹۰° + ∠ ف ا ق = ۹۰° + بہ

اب چونکہ مثلث ا ف ر کے زاویے مل کر دو قائموں کے برابر ہیں

اس لیے $\text{۱۸۰}^\circ = \text{ع} + (\text{۹۰}^\circ + \text{ب}) + (\text{ط} + \text{ب})$

$$\text{ط} = \text{۹۰}^\circ - (\text{ع} + \text{۲ب}) \quad \ldots\ldots (\text{۱})$$

مثلث ا ف ر اور ا ب ر سے

$$\frac{\text{ف ر}}{\text{جب ع}} = \frac{\text{ا ر}}{\text{جب ر ف ا}} = \frac{\text{ا ر}}{\text{جب ر ب ا}} = \frac{\text{ل}}{\text{جب ط}} \quad (\text{دفعہ ۱۶۳})$$

[پندرھویں باب سے معلوم ہوگا کہ ان میں سے ہر ایک مقدار قطر دائرہ کے برابر ہے]

پس جھنڈے کی بلندی

$$= \text{ف ر} = \frac{\text{ل جب ع}}{\text{جب ط}} = \frac{\text{ل جب ع}}{\text{جم (ع + ۲ب)}} \quad \text{بذریعہ (۱)}$$

نیز $\dfrac{\text{ف ق}}{\text{ف ب}} = \text{جم ب ف ق} = \text{جم (ع + ب)} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$

اور $\dfrac{\text{ف ب}}{\text{ل}} = \dfrac{\text{جب ف ا ب}}{\text{جب ا ف ب}} = \dfrac{\text{جب ب}}{\text{جب ط}} \quad \ldots\ldots (\text{۳})$

تعلقات (۲) اور (۳) سے عمل ضرب سے

$$\frac{\text{ف ق}}{\text{ل}} = \frac{\text{جب ب جم (ع + ب)}}{\text{جب ط}} = \frac{\text{جب ب جم (ع + ب)}}{\text{جم (ع + ۲ب)}} \quad \text{بذریعہ (۱)}$$

نیز ب ق = ف ق س ب ف ق

$$= \text{ف ق س (ع + ب)} = \text{ل} \frac{\text{جب ب جب (ع + ب)}}{\text{جم (ع + ۲ب)}}$$

اور $\text{ا ق} = \text{ل} + \text{ب ق} = \text{ل} \dfrac{\text{جم (ع + ۲ب)} + \text{جب ب جب (ع + ب)}}{\text{جم (ع + ۲ب)}}$

$$= \text{ل} \frac{\text{جم ب جم (ع + ب)}}{\text{جم (ع + ۲ب)}}$$

اگر ؤ، عہ اور بہ کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ان کی نتائج کی شکل لوکارتمی حسابات کے لیے نہایت موزوں ہے۔

مثال ۲۔ برج ف ق کی بلندی ب معلوم ہے، برج کے اوپر ایک جھنڈا ق ر ہے، پائین برج سے فاصلہ و پر برج اور جھنڈے دونوں کے محاذی برابر زاویے بنتے ہیں، جھنڈے کی بلندی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ن نقطۂ نگاہ ہے اور زاویوں ف ن ق اور ق ن ر میں سے ہر ایک طہ کے برابر ہے۔ نیز فرض کرو کہ بلندی ق ر = ما

$$\text{تب}\quad \text{مس طہ} = \frac{\text{ب}}{\text{و}}\text{، اور مس ۲ طہ} = \frac{\text{ب} + \text{ما}}{\text{و}}$$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{ب} + \text{ما}}{\text{و}} = \text{مس ۲ طہ} = \frac{\text{۲ مس طہ}}{\text{۱} - \text{مس}^{2}\text{طہ}} = \frac{\frac{\text{۲ب}}{\text{و}}}{\text{۱} - \frac{\text{ب}^{2}}{\text{و}^{2}}}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ب} + \text{ما}}{\text{و}} = \frac{\text{۲ و ب}}{\text{و}^{2} - \text{ب}^{2}}$$

$$\text{تب ما} = \frac{\text{۲ و}^{2}\text{ب}}{\text{و}^{2} - \text{ب}^{2}} - \text{ب} = \text{ب}\,\frac{\text{و}^{2} + \text{ب}^{2}}{\text{و}^{2} - \text{ب}^{2}}$$

اگر و اور ب کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ما آسانی حاصل ہوسکتا ہے۔

۱۹۷۔ مثال۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر جاتا تھا اُس نے سڑک کے ایک مقام پر دیکھا کہ دو اشیاء کے محاذی بڑے سے بڑا زاویہ عہ بنتا ہے اور اس مقام سے سڑک پر فاصلہ ص آگے چل کر اُس نے دیکھا کہ دونوں اشیاء ایک ایسے خطِ مستقیم میں واقع ہیں جو سڑک سے زاویہ بہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ

اشیاء کے درمیان فاصلہ

ص جب عہ جب بہ قط (عہ + بہ)/۱ قط (عہ − بہ)/۲ ہے

فرض کرو کہ ف اور ق دو نقطے ہیں اور خط ف ق سڑک کو نقطہ ب پر ملتا ہے۔

اگر نقطہ ا پر بڑے سے بڑا زاویہ بنے تو لازماً نقاط ف اور ق میں سے گزرنے والا دائرہ سڑک کو نقطہ ا پر مس کریگا۔

[کیونکہ فرض کرو کہ ا ب پر کوئی اَور نقطہ اَ ہے، اس کو ف سے ملاؤ اور فرض کرو کہ اَ ف دائرہ کو نقطہ بَ پر قطع کرتا ہے۔

تب زاویہ ف اَ ق < زاویہ ف بَ ق (اقلیدس م ۱ ش ۱۶)

اور اس لیے < زاویہ ف ا ق (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)

فرض کرو کہ زاویہ ق ا ب = طہ تب

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۳۲ زاویہ ا ف ق بھی طہ کے برابر ہے۔

اس لیے ۱۸۰° = مثلث ف ا ب کے زاویوں کا مجموعہ

= طہ + (عہ + طہ) + بہ

یعنی طہ = ۹۰° − (عہ + بہ)/۲.

مثلثات ف ا ق اور ق ا ب سے

$$\frac{\text{ف ق}}{\text{ا ق}} = \frac{\text{جب ع}}{\text{جب ط}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا ق}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا ق ب}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (ط + ع)}}$$

اس لیے عمل ضرب سے حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{ف ق}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ع جب ب}}{\text{جب ط جب (ط + ع)}}$$

$$= \frac{\text{جب ع جب ب}}{\text{جم} \frac{\text{ع + ب}}{2} \text{جم} \frac{\text{ع − ب}}{2}}$$

$$\therefore \text{ف ق} = \text{ص جب ع جب ب قط} \frac{\text{ع + ب}}{2} \text{قط} \frac{\text{ع − ب}}{2}$$

امثلہ نمبری ۳۴

۱۔ ایک پُل ۷ ستونوں پر قائم ہے جو ایک دوسرے سے برابر برابر فاصلوں پر ہیں اور دو مسلسل ستونوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے، ایک کشتی ایک درمیانی ستون کی سیدھ میں لنگر ڈالے کھڑی ہے اور پُل کی تمام لمبائی کے محاذی کشتی پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ کشتی کا فاصلہ پل سے ۱۰۰ $\sqrt{6}$ فٹ ہے۔

۲۔ ایک سیڑھی بازار کے ایک طرف ۲۷ فٹ اونچی کھڑکی کے نچلے پتھر تک پہنچتی ہے اور زمین سے زاویہ ۷۵° کا بناتی ہے، سیڑھی کے نچلے سرے کو قائم رکھ کر اس کو اس طرح پھرایا گیا ہے کہ وہ بازار کی دوسری طرف دیوار کے ساتھ جا لگتی ہے اس حالت میں سیڑھی کا زاویہ زمین کے ساتھ ۱۵° ہوتا ہے، ثابت کرو کہ بازار کی چوڑائی اور سیڑھی کی لمبائی بالترتیب ۲۷ ($3 - \sqrt{3}$) اور ۲۷ ($\sqrt{6} - \sqrt{2}$) فٹ ہے۔

۳۔ بازار کی ایک طرف کے ایک گھر سے مقابل کے گھر کی اونچائی کے محاذی جو زاویے بنتے ہیں اُن کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ سطح زمین پر اونچائی کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اُس کا مماس ۳ ہے اور دو کھڑکیوں پر جو ایک دوسری کے اوپر واقع ہیں

اونچائی کے محاذی جو زاویے بنتے ہیں اُن میں سے ہر ایک کا مماس ۳ ہے، اگر مقابل کے گھر کی بلندی ۶۰ فٹ ہو تو سطح زمین سے دونوں کھڑکیوں کی بلندیاں دریافت کرو۔

۴۔ ایک سلاخ کا طول معلوم ہے اور اس کا ایک سرا زمین پر ثابت کردیا گیا ہے اگر وہ سورج میں سے گزرنے والی سطح انتصابی میں بلا تکلف حرکت کرسکے تو بڑے سے بڑے سایہ کا طول جو سلاخ زمین پر ڈال سکتی ہے دریافت کرو۔

اگر بڑے سے بڑا سایہ سلاخ کے طول کا $\frac{1}{2}$ ۳ گنا ہو تو سورج کا ارتفاع دریافت کرو۔

۵۔ جہاز ا پر سے ایک شخص ایک اور جہاز ب کو بندرگاہ سے باہر آتا ہوا دیکھتا ہے اس وقت بندرگاہ کی جہت شمال مغرب ہے۔ دس منٹ تک ا ایک میل شمال مشرق کی طرف جاتا ہے اور اُس وقت اس کے مقام سے جہاز ب ٹھیک مغرب کی طرف دکھائی دیتا ہے اور بندرگاہ کی سمت اس وقت شمال سے 60° کا زاویہ مغرب کی طرف کو بناتی ہے' اور دس منٹ کے بعد ب کی سمت جنوب مغرب ہوتی ہے' ا اور ب کا درمیانی فاصلہ اول مشاہدہ کے وقت دریافت کرو' نیز ب کی سمت اور رفتار معلوم کرو۔

۶۔ ایک جہاز شمال کی طرف جارہا تھا اُس پر سے ایک شخص نے ٹھیک اپنے مغرب کی طرف ایک سیدھ میں دو روشنی گھر دیکھے جن کا درمیانی فاصلہ ۶ میل تھا۔ ایک گھنٹہ کے بعد ایک روشنی گھر کی سمت جنوب۔مغرب تھی اور دوسرے کی جنوب۔جنوب مغرب' جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۷۔ تختہ جہاز پر سے ایک شخص نے ایک روشنی گھر کو اپنے ٹھیک شمال مغرب کی طرف دیکھا' اس کے بعد جہاز ۱۲ میل ایسی سمت میں چلا جو سمت مغرب سے جنوب کی طرف کو 15° کا زاویہ بناتی تھی۔ اُس وقت روشنی گھر کی سمت شمال تھی۔ ہر ایک مقام پر جہاز کا فاصلہ روشنی گھر سے دریافت کرو۔

۸۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر مغرب کی طرف جارہا تھا اس نے دیکھا کہ جب وہ ایک پون چکی کے ٹھیک جنوب میں ہو تو جو خطِ مستقیم اس کے مقام کو ایک دور کے برج کے

ساتھ وصل کرتا ہے وہ سڑک سے زاویہ ۶۰° بناتا ہے، ایک میل آگے چل کر پون چکی اور برج کی اسمات اس نے بالترتیب شمال مشرق اور شمال مغرب دیکھیں، برج کے فاصلے پون چکی سے اور سڑک کے قریب ترین نقطہ سے دریافت کرو۔

۹۔ اونچی زمین پر کھڑے ہوکر ایک شخص نے ایک جہاز کو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا۔ ایک چوتھائی گھنٹہ کے بعد جہاز کی سمت ٹھیک مشرق تھی، اور آدھ گھنٹہ گذرنے کے بعد جہاز کی سمت جنوب مشرق ہو گئی۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ جہاز یکساں رفتار سے ایک خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو جہاز کی سمتِ طریق اور نصف النہار کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے اُسے دریافت کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو جہاز کو اول مشاہدہ کے مقام سے اُس مقام تک طے کرنے میں صرف ہوا جب وہ مشاہدہ کرنے والے کے قریب ترین تھا۔

۱۰۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر جا رہا تھا جو سمت شمال سے مشرق کی طرف کو ۶۰° کا زاویہ بناتی تھی، اس نے ایک مقام پر دیکھا کہ وہ ایک گھر کے ٹھیک جنوب کی طرف ہے ایک میل آگے جانے پر اس نے مشاہدہ کیا کہ گھر اس کے ٹھیک مغرب کی طرف ہے اور سڑک کے مقابل کی جانب میں اس وقت ایک پون چکی اس کو ٹھیک اپنے شمال مشرق کی طرف دکھائی دی۔ تین میل آگے چل کر اس نے دیکھا کہ وہ چکی کے ٹھیک شمال کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ چکی اور گھر کا خطِ وصل سڑک کے ساتھ ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس

$$\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$$ ہے۔

۱۱۔ ایک سیدھی سڑک پر تین مسلسل میل کے پتھروں ا، ب، ج سے ایک دور کا مینارہ دکھائی دیتا ہے، مینارہ کی سمت ا پر شمال مشرق اور ب پر ٹھیک مشرق ہے اور ج پر سمت جنوب سے مشرق کی طرف کو ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک سے مینارہ کا کم سے کم فاصلہ $\frac{7+5\sqrt{3}}{12}$ میل ہے۔

۱۲۔ ایک برج شمال کی طرف جھکا ہوا ہے اور پائین برج سے ا اور ب فٹ کے فاصلوں پر دو مقامات برج کے عین جنوب میں واقع ہیں۔ اگر ان مقامات سے

برج کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے عہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ برج کا میلان افق سے

$$\text{ﻡ}^{-1}\ \frac{\text{ب مم عہ ۔ ا مم بہ}}{\text{ب ۔ ا}}\ \text{ہے۔}$$

۱۳۔ سطح ہموار کے ایک نقطہ ا پر ایک غبارہ کا زاویۂ ارتفاع عہ دکھائی دیا، غبارہ اس وقت ا کے ٹھیک جنوب کی طرف تھا۔ نقطہ ب سے جو ا کے جنوب میں فاصلہ ج پر واقع ہے غبارہ کا زاویۂ ارتفاع شمال کی طرف بہ مشاہدہ ہوا، نقطۂ ا سے غبارہ کا فاصلہ، نیز غبارہ کی بلندی زمین سے دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک ستون کی چوٹی پر ایک بُت ہے اور اس کے محاذی ستون سے ۹ اور ۱۱ گز کے فاصلہ پر ایک ہی زاویہ عہ بنتا ہے، اگر مس عہ = $\frac{1}{2}$ تو ستون اور بت کی بلندیاں دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک برج کی چوٹی پر ایک علم قائم ہے، سطح مستوی پر قاعدۂ برج کے مرکز میں سے ایک خط گزرتا ہے اس پر دو ایسے نقاط ہیں جن کا باہمی فاصلہ ۲ ا ہے اور جن میں سے ہر ایک پر علم کے محاذی زاویہ عہ بنتا ہے، اگر ان نقطوں کو ملانے والے خط کے نقطۂ تنصیف پر علم کے محاذی زاویہ بہ بنے تو ثابت کرو کہ علم کی بلندی

$$\text{ا جب عہ}\ \sqrt{\frac{\text{۲ جب بہ}}{\text{جم عہ جب (بہ ۔ عہ)}}}\ \text{ہے۔}$$

۱۶۔ کسی ٹیلے پر ایک ستون ہے، ستون سے ا فٹ کے فاصلے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے دیکھا کہ اس کی آنکھ پر جو زاویہ ستون کے محاذی بنتا ہے اس کا مماس $\frac{1}{2}$ ہے، ستون کی سیدھ میں فاصلہ $\frac{1}{2}$ ا فٹ جانے پر اس نے دیکھا کہ ستون کے محاذی اس کی آنکھ پر وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے تھا۔ ٹیلے اور ستون کی بلندیاں دریافت کرو۔ اس مثال میں ہم مشاہدہ کرنے والے کی آنکھ کو ٹیلے کے قاعدہ میں سے گزرنے والی سطح مستوی پر منطبق خیال کرتے ہیں

۱۷۔ ایک دریا کا عرض ۱۵۰ فٹ ہے، اس کے کنارے پر ایک گرجے کا برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک مینار ہے جس کی بلندی ۳۰ فٹ ہے، دریا کے دوسرے کنارہ پر ایک شخص نے دیکھا کہ اگر ایک ۶ فٹ اونچی لکڑی پائین برج میں سے گزرنے والی

سطح مستوی پر برج کے قریب سیدھی کھڑی کی جائے تو اس لکڑی اور مینار دونوں کے محاذی اس کی آنکھ پر ایک ہی زاویہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی تقریباً ۲۸۵ فٹ ہے۔

۱۸- ایک شخص ایک برج کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے، اس نے پائین برج میں سے گزرنے والی سطح مستوی کے ایک مقام پر کھڑے ہو کر چوٹی کا ارتفاع ۳۰° دیکھا کسی خاص سمت میں ایک فاصلہ ا جانے پر اس نے دیکھا کہ چوٹی کا ارتفاع وہی ہے جو پہلے تھا اور سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں فاصلہ ۵/۳ ا جانے پر اس نے چوٹی کا ارتفاع ۶۰° دیکھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی یا ۵/۶ ا ہے یا ۸۵/۴۸ ا

۱۹- سطح افقی پر ایک برج ہے، برج کے قاعدہ سے ا اور ب فٹ کے فاصلہ پر برج کی سیدھ میں دو نقاط ہیں اور ان پر جو ارتفاعی زاویے برج کی چوٹی کے محاذی بنتے ہیں وہ ایک دوسرے کے متمم ہیں، ثابت کرو کہ برج کا ارتفاع √اب فٹ ہے۔ اگر دو نقطوں کے ملانے والے خط کے محاذی برج کی چوٹی پر زاویہ طہ بنے تو ثابت کرو کہ جب طہ = (ا - ب)/(ا + ب)

۲۰- ایک ۸۰ فٹ اونچے ٹیلے کی چوٹی پر ایک ۱۵۰ فٹ بلند برج ہے، معلوم کرو کہ ٹیلے کے پائیں سے جو سطح گزرتی ہے اس کے کس مقام پر ایک شخص کھڑا ہو کہ برج اور ٹیلہ کے محاذی اس کی آنکھ پر برابر زاویے بنیں، آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ہے۔

۲۱- سطح ہموار پر ایک ستون ہے اور ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے، اگر ایک شخص کی آنکھ پر بت کے محاذی بڑے سے بڑا زاویہ عہ ہے جبکہ وہ ستون سے ج فٹ کے فاصلہ پر ہو تو ثابت کرو کہ بت کی بلندی ۲ ج مس عہ فٹ ہے ستون کی بلندی بھی دریافت کرو۔

۲۲- ایک سطح مائل اور سطح ہموار کے خطِ فصل پر ایک برج ہے اور سطح مائل افق سے زاویہ ۹° بناتی ہے، اگر پائین برج سے سطح مائل کے اوپر کی طرف ۱۰۰ فٹ لمبا مستقیم خط ناپا جائے اور اس خط کے سرے پر برج کے محاذی زاویہ ۵۴° بنے تو برج کی بلندی دریافت کرو۔ معلوم ہے لوگ ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوگ ۳ = ۴۷۷۱۲ء، ۱۱۴ء۱۱ = ۷۴۲۶ء۲۰۵۸

اور ل جب ۴۲° = ۱ ـ ۰ ؛ ۷ ۰ ۹۵۹

۲۳ - ایک ڈھلان اُفق سے ۱۵° کا زاویہ بناتی ہے، اس پر ایک انتصابی برج قائم ہے، ایک شخص پائین برج سے ڈھلان کے اوپر کی طرف ۸۰ فٹ چڑھ کر دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر برج کے محاذی زاویہ ۳۰° بنتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی ۴۰ (√۶ - √۲) فٹ ہے۔

۲۴ - ایک چٹان کا ارتفاع ۴۷° ہے، ایک شخص ایک سطح مائل پر جو اُفق سے ۳۲° کا زاویہ بناتی ہے ۱۰۰۰ فٹ چٹان کی طرف چڑھ کر دیکھتا ہے کہ اس کا ارتفاع ۷۷° ہے اگر تب ۴۷° = ۱ءº۰۷۲۳۶۹ تو اس مقام سے چٹان کی انتصابی بلندی دریافت کرو جہاں سے پہلے زاویہ ارتفاع مشاہدہ کیا گیا ہے۔

۲۵ - ایک شخص نے ایک سطح مائل پر ج فٹ اوپر جا کر دیکھا کہ اس کے پائین سے جو سطح مستوی گزرتی ہے اس پر ایک چیز کا زاویہ انخفاض عہ ہے، ج فٹ اور اوپر جا کر اس نے دیکھا کہ اس چیز کا زاویۂ انخفاض بہ ہے ثابت کرو کہ سطح مائل اُفق سے ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا ماس التمام (۲ مم بہ - مم عہ) ہے۔

۲۶ - ایک منتظم مینار مربع قاعدہ پر قائم ہے، اس کا ایک کنارہ ۱۵۰ فٹ اور اس کے قاعدہ کا ایک ضلع ۲۰۰ فٹ ہے، اس کے ایک رخ کا میلان قاعدہ سے دریافت کرو۔

۲۷ - ایک مینار کے مربع قاعدہ کا ضلع ۲ و ہے اور اس کا راس ایک ایسے خط مستقیم پر واقع ہے جو قاعدہ کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس پر عمود ہے مینار کی بلندی ح فٹ ہے، ثابت کرو کہ مینار کے متصل رخوں کا درمیانی زاویہ عہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے:-

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{۲ ح} \sqrt{\text{۲ و}^{2} + \text{۴ ح}^{2}}}{\text{و}^{2} + \text{۲ ح}^{2}}$$

۲۸ - ایک مساوی الاضلاع مثلث کے مرکز پر ایک ۱۰۰ فٹ اونچا علم قائم ہے، مثلث متوازی الافق ہے، علم کی چوٹی پر ہر ایک ضلع کے محاذی زاویہ ۶۰° بنتا ہے،

ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع کا طول ۵۰$\sqrt{۶}$ فٹ ہے۔

۲۹ ۔مربع قاعدہ پر ایک مینار ہے اور اس کی چوٹی پر ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، اگر علم کا سایہ عین قاعدہ کے ایک ضلع تک پہنچے اور اس ضلع کے سروں سے ۵۶ اور ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو سورج کا زاویۂ ارتفاع دریافت کرو، مینار کی بلندی ۳۴ فٹ ہے۔

۳۰ ۔مربع قاعدہ پر ایک مینار قائم ہے، اس کی چوٹی پر ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، علم کا سایہ عین قاعدہ کے ضلع تک پہنچتا ہے اور اس ضلع کے سروں سے لا اور ما فٹ کے فاصلہ پر ہے، ثابت کرو کہ مینار کی بلندی $\sqrt{\frac{لا^2 + ما^2}{۲}}$ مس عہ ۔ ۶ ہے جہاں عہ سورج کا زاویۂ ارتفاع ہے۔

۳۱ ۔ایک نقطہ ایک جھیل کی سطح سے ھ فٹ اونچا ہے اور اس نقطہ سے ایک بادل کا زاویۂ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور جھیل میں بادل کے عکس کا زاویۂ انخفاض دیکھا گیا ہے جو بہ ہے، ثابت کرو کہ بادل کی بلندی

$$ھ \frac{جب\,(بہ + عہ)}{جب\,(بہ - عہ)} \text{ ہے}$$

۳۲ ۔ایک برج کا سایہ کسی خاص وقت اس کی بلندی کا نصف تھا کچھ عرصہ بعد سایہ بلندی کے برابر تھا۔ معلوم کرو کہ اس عرصہ میں سورج کا زاویۂ ارتفاع کتنا کم ہوا ہے، معلوم ہے۔

لک ۲ = ۳۰۱۰۳.۰، ل مس ۶۳° ۲۶′ = ۱۰٫۳۰۰۹۹۹۴

اور فرق ۱′ کے لیے = ۲۱۵۱

۳۳ ۔ایک تختی کی شکل مثلث متساوی الساقین ہے اور وہ سورج کے مقابل سطح انتصابی میں رکھی گئی ہے، اگر تختی کا قاعدہ ۲ل، اونچائی ھ اور سورج کا ارتفاع °۳۰ ہو تو ثابت کرو کہ تختی کے سایہ کے راس پر جو زاویہ بنتا ہے

اُس کا مماس $\frac{۲ ل ھ \sqrt{۳}}{۳ھ^2 - ل^2}$ ہے۔

۳۴ ۔سطح افقی پر نشانہ لگانے کا چاند سیدھا کھڑا کیا گیا ہے، اس کا رُخ جنوب

کی طرف ہے اور وہ شکل میں مستطیل ہے اس کی سطح کے رقبہ کا مقابلہ اس کے سایہ کے رقبہ سے کرو جبکہ سورج کا ارتفاع عہ ہو اور سورج جنوب سے زاویہ بہ بنائے۔

۳۵- ایک کرہ کا قطر ق ہے اور جب اس کے مرکز کا ارتفاع بہ ہو تو اس کے محاذی ایک شخص کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ کرہ کے مرکز کی بلندی

$\frac{1}{2}$ ق جب بہ قم $\frac{عہ}{2}$ ہے

۳۶- ایک شخص سطح افقی پر کھڑا ہو کر ایک مساوی اور مساوی الفصل ستونوں کی قطار کو دیکھ کر یہ نتیجہ نکالتا ہے کہ جو زاویے دسویں اور سترہویں ستون کے محاذی اس کی آنکھ پر بنتے ہیں وہ اس صورت میں بھی وہی رہیں گے جبکہ ان کو پہلے ستون کی جگہ لاکر کھڑا کر دیا جائے اور ان کی بلندیوں کو بالترتیب بقدر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے کم کر دیا جائے اگر آنکھ کی بلندی کو نظر انداز کر سکیں تو ثابت کرو کہ ستونوں کی قطار اس خط سے جو اس کی آنکھ کو پہلے ستون کے ساتھ ملانے سے پیدا ہو ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا قاطع ۶ء۲ ہے۔

امثلۂ ذیل کے حل کرنے میں لوگارتمی جدولوں کی ضرورت ہوگی۔

۳۷- ایک دریا کے مقابل کے کناروں پر دو نقاط ا اور ب ایک دوسرے کے سامنے واقع ہیں اور ان کے درمیان ایک جہاز کا مستول م ن ہے، دریا کا عرض ۱۰۰۰ فٹ ہے اور نقطہ ا پر م کا زاویۂ ارتفاع ۵۱° ۲۰′ ہے اور نقطۂ ب پر ارتفاع ۵° ۱۰′ ہے۔ خط ا ب پر م کی بلندی دریافت کرو۔

۳۸- خط ا ب کا طول ۱۰۰۰ گز ہے، ب نقطۂ ا کے ٹھیک شمال کی طرف واقع ہے اور ب سے ایک دور کے نقطہ ط کی سمت، شمال سے مشرق کی جانب میں زاویہ ۲۰° کا بناتی ہے اور نقطہ ا پر یہ سمتِ شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۵۱° ۲۲′ بناتی ہے؛ ا اور ط کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

۳۹- ب کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلہ پر ایک مقام ا ہے، نقطۂ ا سے ایک چٹان کی سمت، شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۵° ۱۹′ بناتی ہے

اور نقطہ ب سے یہ سمت، شمال سے مغرب کی جانب میں زاویہ ۲۶° ۱۵' بناتی ہے، خط ا ب سے چٹان کا فاصلہ شمال کی جانب میں دریافت کرو۔

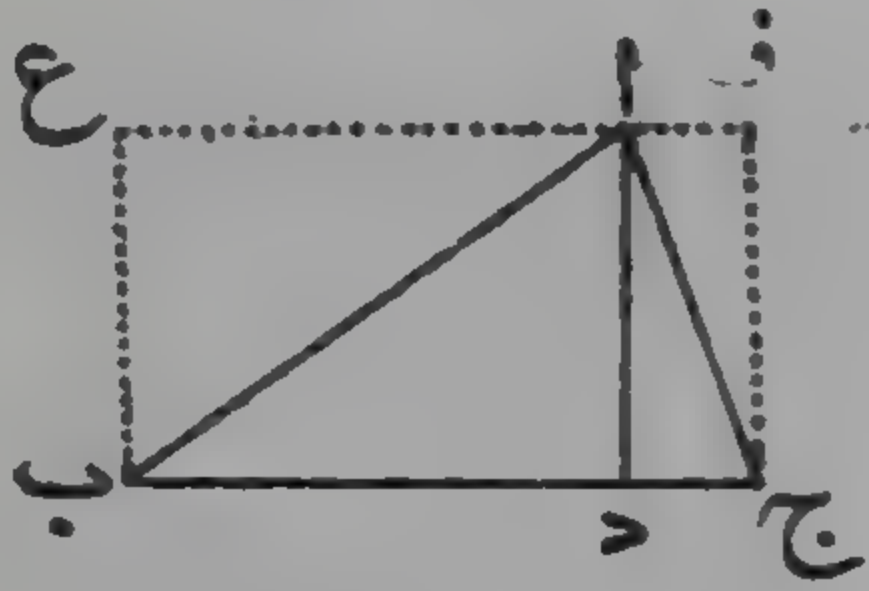
۴۰ - ایک اُفقی مربع احاطہ کے ایک ضلع کا طول ا ہے اور عین اس کے نقطۂ وسط کے اوپر سمت راس میں ایک مینار کی چوٹی ہے، مربع کی سطح سے چوٹی کی بلندی ب ہے اگر سورج کا ارتفاع طہ ہو اور مینار کا سایہ مربع کے ٹھیک ایک کونے تک پہنچے تو ثابت کرو کہ

ب $\sqrt{۲}$ = ا مس طہ

اگر ا = ۱۰۰۰ فٹ اور طہ = ۲۵° ۱۵' تو ب کی قیمت دریافت کرو۔

پندرہواں باب

مثلث کے خواص

۱۹۸- **مثلث کا رقبہ** — فرض کرو کہ کوئی مثلث اب ج ہے اور زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود ا د نکالا گیا ہے۔
نقطہ ا میں سے ب ج کے متوازی خط ع ا ف کھینچو اور اس پر عمود ب ع اور ج ف نکالو۔
بموجب اقلیدس م ۱ ش ۴۱
مثلث ا ب ج کا رقبہ

= $\frac{1}{2}$ مستطیل ب ف = $\frac{1}{2}$ ب ج × ج ف

= $\frac{1}{2}$ لا × ا د

لیکن ا د = اب جب ب = ج جب ب

اس لیے مثلث ا ب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ ج لا جب ب اس رقبہ کو بالعموم ∆ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اس لیے ∆ = $\frac{1}{2}$ ج لا جب ب = $\frac{1}{2}$ لا ب جب ج

= $\frac{1}{2}$ ب ج جب ا .... (۱)

بموجب دفعہ ۱۶۹ جب ا = $\frac{۲}{ب ج}\sqrt{س (س-ا)(س-ب)(س-ج)}$

یعنی Δ = $\frac{۱}{۲}$ ب ج جب ا

$= \sqrt{س (س-ا)(س-ب)(س-ج)}$ .... (۲)

اس مقدار کو اکثر س سے تعبیر کرتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۳۵

مثلث ا ب ج کا رقبہ دریافت کرو جبکہ

۱۔ ا = ۱۳، ب = ۱۴ اور ج = ۱۵

۲۔ ا = ۱۸، ب = ۲۴ اور ج = ۳۰

۳۔ ا = ۲۵، ب = ۵۲ اور ج = ۶۳

۴۔ ا = ۱۲۵، ب = ۱۲۳ اور ج = ۶۲

۵۔ ا = ۱۵، ب = ۳۶ اور ج = ۳۹

۶۔ ا = ۲۸۷، ب = ۸۱۶ اور ج = ۸۶۵

۷۔ ا = ۳۵، ب = ۹۴ اور ج = ۹۱

۸۔ ا = $\sqrt{۳}$، ب = $\sqrt{۲}$ اور ج = $\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۲}$

۹۔ اگر ب = ۴۵°، ج = ۶۰° اور ا = ۲ $(\sqrt{۳}+۱)$ انچ تو ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ $(۶ + ۲\sqrt{۳})$ مربع انچ ہے

۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۱۹، ۱۱۱، ۹۲ گز ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ایک ایکڑ سے دس مربع گز کم ہے۔

۱۱۔ ایک مثلثی کھیت کے اضلاع ۲۴۲، ۱۲۱۲ اور ۰۵۴۱ گز ہیں ثابت کرو کہ کھیت کا رقبہ ۶ ایکڑ ہے۔

۱۲۔ ایک شخص کو ایک ایسا مثلثی احاطہ بنانے کے لیے کہا گیا جس کے

اضلاع بالترتیب ۵۰، ۴۱، ۲۱ گز ہوں غلطی سے اُس نے پہلے ضلع کو ایک گز بڑا بنالیا، اگر احاطہ کا رقبہ اور مجموعۂ اضلاع وہی رکھنا منظور ہو جو اوپر تجویز ہوا تو باقی دو اضلاع کے طول دریافت کرو۔

۱۳- ایک متساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ۱۴ انچ ہے اور اس کا رقبہ ایک اور مثلث کے رقبہ کے برابر ہے جس کے اضلاع ۶، ۱۳، ۱۵، ۴، ۱۵ انچ ہیں، مثلث اول الذکر کے مساوی ضلعوں میں سے ایک کی قیمت ۰۰۱، انچ تک صحیح طور پر دریافت کرو۔

۱۴- ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ل^2 $\frac{\text{جب ب جب ج}}{\text{جب ا}}$ کے برابر ہے۔

اگر مثلث کا ایک زاویہ °۶۰ ہو، رقبہ ۱۰ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ مربع فٹ اور مجموعۂ اضلاع ۲۰ فٹ تو اضلاع کے طول دریافت کرو۔

۱۵- ایک مثلث کے اضلاع سلسلۂ حسابیہ میں ہیں اور اس کا رقبہ ایک ایسے مثلث مساوی الاضلاع کے رقبہ کا $\frac{3}{5}$ ہے جس کا محیط مثلث اول الذکر کے محیط کے برابر ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے اضلاع کی باہمی نسبتیں ۳ : ۵ : ۷ ہے، نیز مثلث کا سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۱۶- ایک مثلث میں سب سے چھوٹا زاویہ °۴۵ ہے اور زاویوں کے ماس سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اگر اس کا رقبہ ۳ مربع گز ہو تو ثابت کرو کہ اضلاع کے طول $3\sqrt{5}$، $6\sqrt{2}$ اور ۹ فٹ ہیں اور باقی زاویوں کے ماس بالترتیب ۲ اور ۳ ہیں۔

۱۷- کسی مثلث کے دو اضلاع کے طول بالترتیب ۱ فٹ اور $\sqrt{2}$ ہیں اور چھوٹے زاویے کے مقابل کا زاویہ °۳۰ ہے، ثابت کرو کہ دو مثلث شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں، ان کے زاویے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $\sqrt{3}+1 : \sqrt{3}-1$ ہے۔

۱۸- مفروضات ذیل سے دو مثلث حاصل ہوتے ہیں، جدولوں کی مدد سے بڑے مثلث کا رقبہ دریافت کرو۔

ا = °۱۲ ۱۵′، ل = ۵ انچ اور ب = ۷ انچ

۱۹۹۔ مثلث کے متعلقہ دائرے

جو دائرہ مثلث کے نقاط راس میں سے گزرتا ہے اس کو مثلث کے گرد بنا ہوا دائرہ یا اختصاراً مثلث کا حائط دائرہ کہلاتا ہے۔

اس دائرہ کا مرکز دفعہ ۲۰۰ کے عمل سے حاصل ہو سکتا ہے، اس کے نصف قطر کو ہم r سے تعبیر کرینگے۔

جو دائرہ مثلث کے اندر اس طرح سے کھینچ سکے کہ وہ مثلث کے ہر ایک ضلع کو مس کرے اس کو اختصاراً مثلث کا اندرونی دائرہ کہتے ہیں اس کا مرکز دفعہ ۲۰۲ کے عمل سے حاصل ہوتا ہے اس کے نصف قطر کو ہم آئندہ ر سے تعبیر کرینگے۔

جو دائرہ ضلع ب ج اور باقی دو اضلاع ا ب اور ا ج ممدودہ میں سے ہر ایک کو مس کرے اس کو زاویہ ا کے مقابل مثلث کا جانبی دائرہ کہتے ہیں، اس کے نصف قطر کو ہم ر سے تعبیر کرینگے۔

اسی طرح سے حرف ر سے ہم اس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کرینگے جو ضلع ج ا اور باقی دو اضلاع ب ج اور ب ا ممدودہ کو مس کرے۔

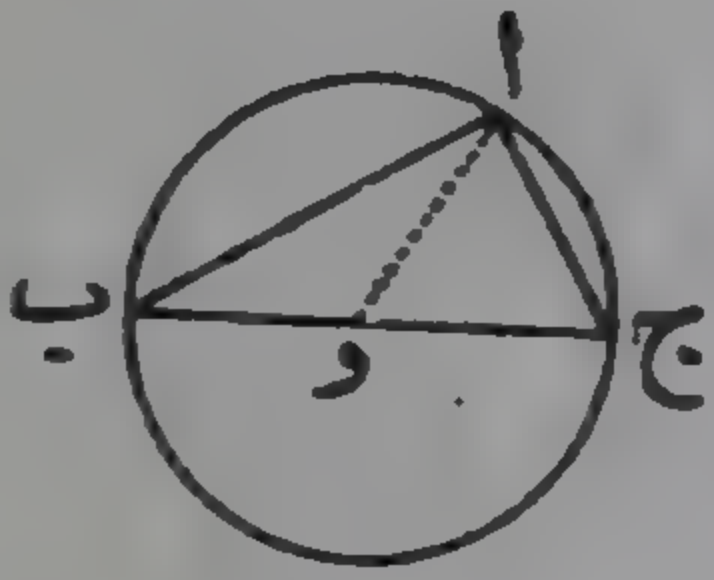
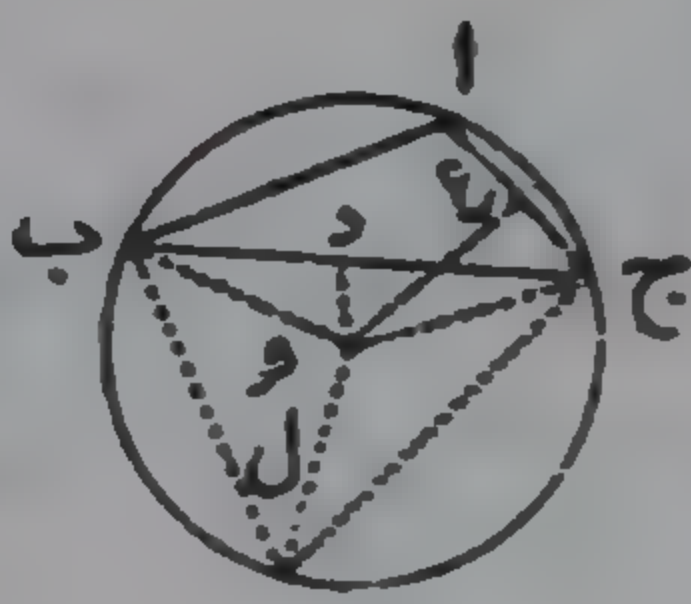
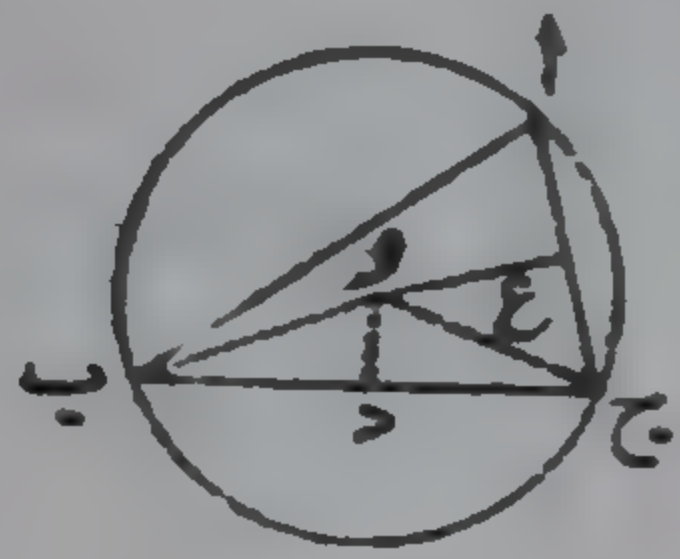
نیز ر سے ہم اس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کرینگے جو ضلع ا ب اور باقی دو اضلاع ج ا اور ج ب ممدودہ کو مس کرے۔

۲۰۰۔ مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا نصف قطر r دریافت کرو۔

اضلاع ب ج اور ج ا کی تنصیف نقاط د اور ع پر کرو اور ب ج اور ج ا پر عمود د و اور ع و قائم کرو۔

بموجب اقلیدس م ۴ ش ۵، نقطہ و مثلث کے حائط دائرہ کا مرکز ہے و ب اور و ج کو ملاؤ۔

نقطہ و مثلث کے اندر واقع ہو سکتا ہے (شکل ۱۰۱) یا باہر (شکل ۱۰۲)

یا مثلث کے ایک ضلع پر (شکل ۳)

شکل ۱　　شکل ۲　　شکل ۳

پہلی شکل میں مثلث ب و د اور ج و د آپس میں ہر طرح سے برابر ہیں

اس لیے

∠ ب و د = ∠ ج و د

∴ ∠ ب و د = ½ ∠ ب و ج

= ∠ ب ا ج (اقلیدس م ۳ ش ۲۰)

= ا

نیز ب د = ب و جب ب و د

∴ ل/۲ = ر جب ا　　یعنی ر = ل/(۲ جب ا)

اگر ا منفرجہ ہو جیسا کہ شکل ۲ میں تو

∴ ∠ ب و د = ½ ∠ ب و ج ∴ ∠ ب ل ج

= ۱۸۰° − ا (اقلیدس م ۳ ش ۲۲)

یعنی بموجب سابق، جب ب و د = جب ا

اور　　ر = ل/(۲ جب ا)

اگر ا زاویہ قائمہ ہو جیسا کہ شکل ۳ میں تو

ر = و ا = و ج = ل/۲

= ل/(۲ جب ا) چونکہ اس صورت میں جب ا = ۱

اس سے معلوم ہوا کہ مندرجۂ بالا روابط سب مثلثوں کے لیے درست ہیں۔

اس لیے تینوں صورتوں میں

$$\text{ہ} = \frac{\text{ا}}{\text{۲ جب ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{۲ جب ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{۲ جب ج}} \quad \text{دفعہ ۱۶۳}$$

۲۰۱۔ دفعہ ۱۶۹ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{جب ا} = \frac{\text{۲}}{\text{ب ج}} \sqrt{\text{س (س - ا) (س - ب) (س - ج)}}$$

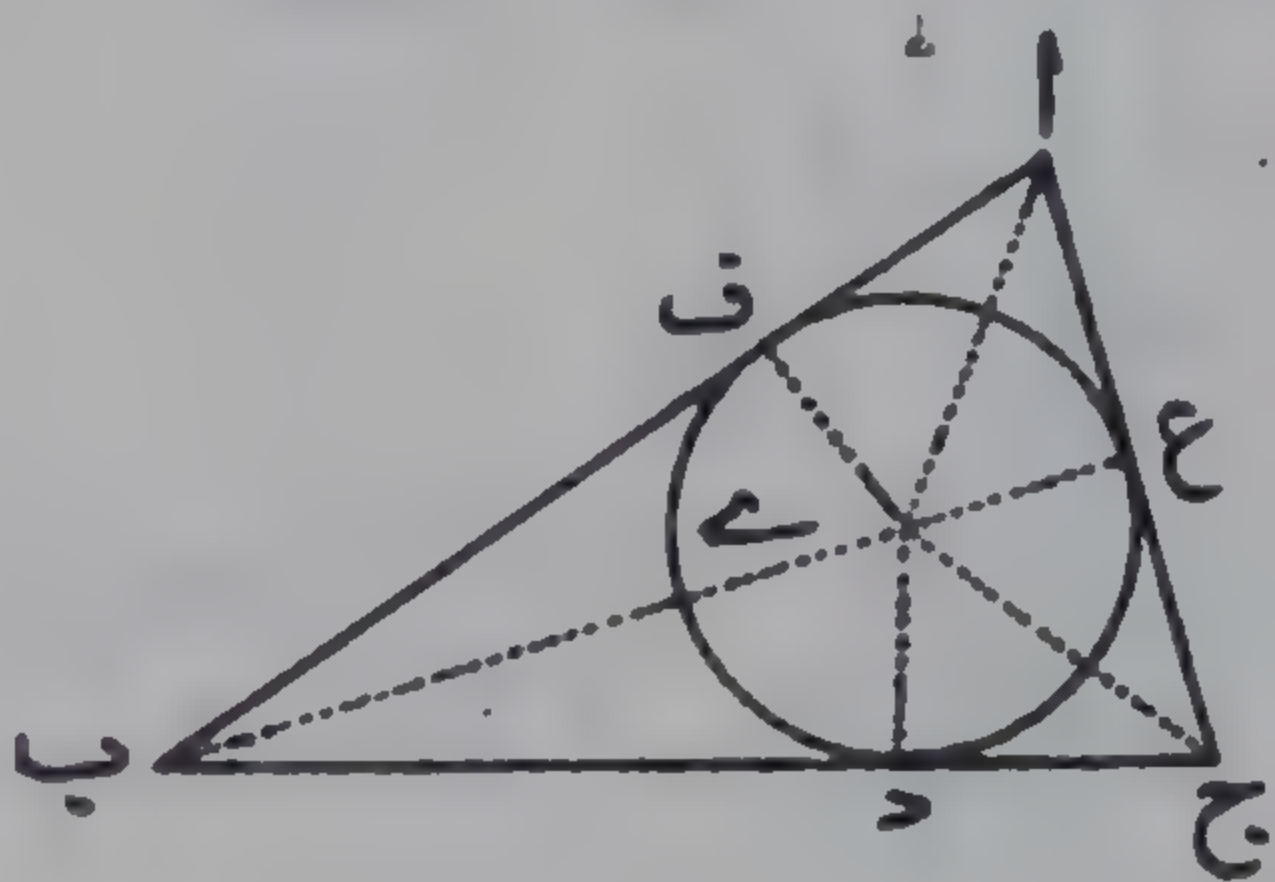
$$= \frac{\text{۲ س}}{\text{ب ج}}$$ اس میں س مثلث کے رقبہ کو تعبیر کرتا ہے۔

جب ا کی قیمت ربط (۱) دفعہ (۲۰۰) میں مندرج کرنے سے

$$\text{ہ} = \frac{\text{ا ب ج}}{\text{۴ س}}$$

اور اس سے بیرونی دائرہ کا نصف قطر اضلاع کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے۔

۲۰۲۔ مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کے نصف قطر ر کی قیمت دریافت کرو۔

زاویہ ب اور ج کی تنصیف بالترتیب دو خطوط ب ے اور ج ے سے کرو اور فرض کرو کہ یہ خط نقطہ ے پر ملتے ہیں۔

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۴ نقطہ ے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے، ے ا کو ملاؤ اور تینوں اضلاع پر عمود ے د، ے ع، ے ف نکالو۔

تب ے د = ے ع = ے ف = ر

اب　رقبہ △ ے ب ج = $\frac{1}{2}$ ے د × ب ج = $\frac{1}{2}$ ر × ا

رقبہ △ ے ج ا = $\frac{1}{2}$ ے ع × ج ا = $\frac{1}{2}$ ر × ب

اور　رقبہ △ ے ا ب = $\frac{1}{2}$ ے ف × ا ب = $\frac{1}{2}$ ر × ج

اس لیے جمع کرنے سے

$\frac{1}{2}$ ر × ا + $\frac{1}{2}$ ر × ب + $\frac{1}{2}$ ر × ج = مثلثات ے ب ج، ے ج ا اور ے ا ب کے رقبوں کا مجموعہ
= △ ا ب ج کا رقبہ

یعنی　ر $\frac{ا + ب + ج}{۲}$ = س

یعنی　ر × س = س

∴　ر = $\frac{س}{س}$

۲۰۳۔ چونکہ زاویے ے ب د اور ے د ب بالترتیب زاویوں ے ب ف اور ے ف ب کے برابر ہیں اس لیے مثلث ے د ب اور ے ف ب ہر طرح سے برابر ہیں۔

اس لیے　ب د = ب ف یعنی ۲ ب د = ب د + ب ف

نیز　ا ع = ا ف یعنی ۲ ا ع = ا ع + ا ف

اور　ج ع = ج د یعنی ۲ ج ع = ج ع + ج د

اس لیے جمع کرنے سے

۲ ب د + ۲ ا ع + ۲ ج ع = (ب د + ج د) + (ج ع + ا ع)
+ (ا ف + ف ب)

یعنی　۲ ب د + ۲ ا ج = ب ج + ج ا + ا ب

∴　۲ ب د + ۲ ب = ا + ب + ج = ۲ س

اس لیے　ب د = س - ب = ب ف

اسی طرح سے　ج ع = س - ج = ج د

اور اف = س - ا = اع

اب ےد/بد = مس ےبد = مس ب/۲

∴ ر = ےد = بد مس ب/۲ = (س - ب) مس ب/۲

پس ر = ےع = جع مس ےجع = (س - ج) مس ج/۲

اور نیز ر = ےف = ف ا مس ےاف = (س - ا) مس ا/۲

اس لیے ر = (س - ا) مس ا/۲ = (س - ب) مس ب/۲

= (س - ج) مس ج/۲

۲۰۴- ر کی ایک تیسری قیمت اس طرح سے حاصل ہو سکتی ہے:-

ا = بد + دج = ےد مم ےبد + ےد مم ےجد

= ر مم ب/۲ + ر مم ج/۲

= ر (جم ب/۲ ÷ جب ب/۲ + جم ج/۲ ÷ جب ج/۲)

∴ ا جب ب/۲ جب ج/۲ = ر [جب ج/۲ جم ب/۲ + جم ج/۲ جب ب/۲]

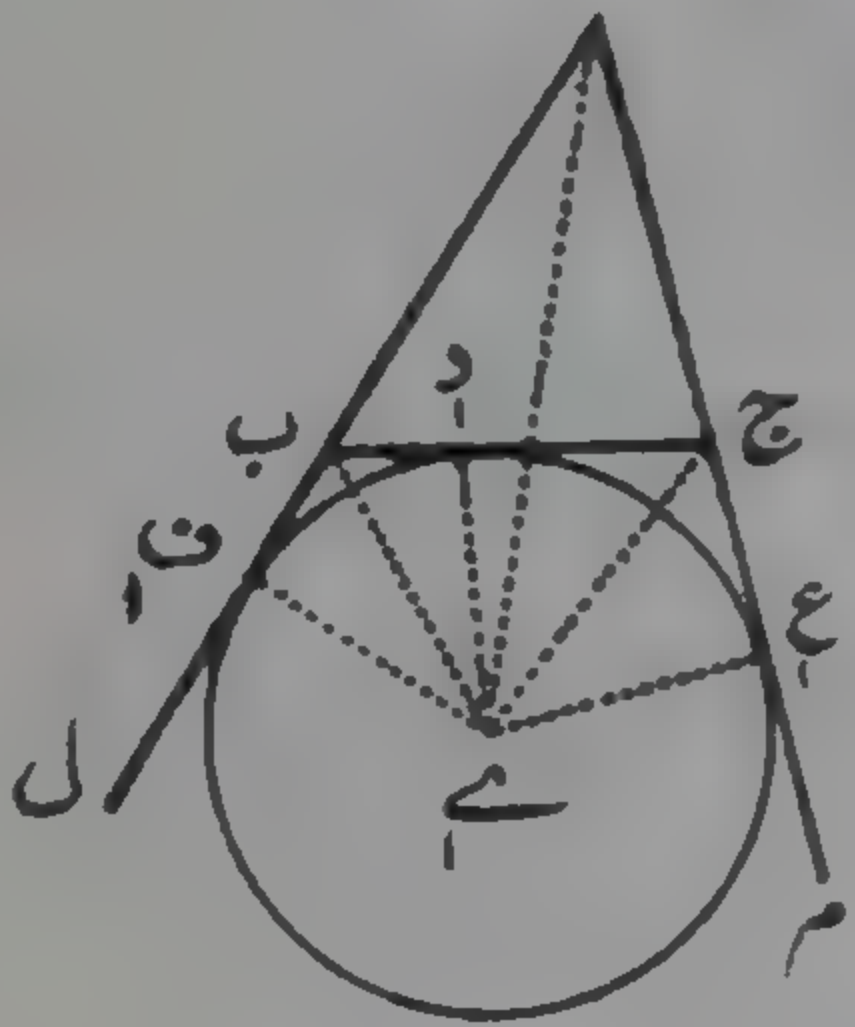
= ر جب (ب/۲ + ج/۲) = ر جب [۹۰° - ا/۲] = ر جم ا/۲

∴ ر = ا جب ب/۲ جب ج/۲ ÷ جم ا/۲

نتیجۂ صریح - چونکہ ا = ۲ ر جب ا = ۴ ر جب ا/۲ جم ا/۲

اس لیے ر = ۴ ر جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۲۰۵۔ مثلث اب ج کے زاویہ ا کے مقابل جو جانبی دائرہ بن سکتا ہے اُس کا نصف قطر ر۱ دریافت کرو۔

اب اور اج کو ل اور م تک خارج کرو۔

زاویوں ج ب ل اور ب ج م کی تنصیف خطوط ب ے۱ اور ج ے۱ سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ ے۱ پر ملتے ہیں۔

تینوں اضلاع پر عمود ے۱ د۱، ے۱ ع۱ اور ے۱ ف۱ نکالو۔

مثلث ے۱ د۱ ب اور ے۱ ف۱ ب ہر طرح سے برابر ہیں۔

اس لیے ے۱ف۱ = ے۱د۱

اسی طرح سے ے۱ع۱ = ے۱د۱

چونکہ تینوں عمود ے۱د۱، ے۱ع۱، ے۱ف۱ آپس میں برابر ہیں، اس لیے نقطہ ے۱ دائرہ مجوزہ کا مرکز ہے۔

اب رقبہ اب ے۱ ج مثلثات اب ج اور ے۱ ب ج کے مجموعہ کے برابر ہے۔

نیز یہ رقبہ مثلثات ے۱ ب ا اور ے۱ ج ا کے مجموعہ کے بھی برابر ہے۔

اس لیے

△ اب ج + △ ے۱ب ج = △ ے۱ج ا + △ ے۱ ا ب

∴ س + ۱/۲ ے۱د۱ × ب ج = ۱/۲ ے۱ع۱ × ج ا + ۱/۲ ے۱ف۱ × اب

یعنی س + ۱/۲ ر۱ × ا = ۱/۲ ر۱ × ب + ۱/۲ ر۱ × ج

∴ س = ر۱ [(ب + ج − ا)/۲] = ر۱ [(ب + ج + ا)/۲ − ا] = ر۱(س − ا)

$$\therefore\ ر_1 = \frac{س}{س - ا}$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$ر_2 = \frac{س}{س - ب} \quad \text{اور} \quad ر_3 = \frac{س}{س - ج}$$

۲۰۶۔ چونکہ ا$ع_1$ اور ا$ف_1$ میں سے ہر ایک دائرہ کا مماس ہے
اس لیے بموجب دفعہ ۲۰۲ ا$ع_1$ = ا$ف_1$
اسی طرح سے ب$ف_1$ = ب$د_1$ اور ج$ع_1$ = ج$د_1$

∴ ۲ ا$ع_1$ = ا$ع_1$ + ا$ف_1$ = اب + ب$ف_1$ + اج + ج$ع_1$
= اب + ب$د_1$ + اج + ج$د_1$
= اب + ب ج + ج ا = ۲ س
∴ ا$ع_1$ = س = ا$ف_1$

نیز ب$د_1$ = ب$ف_1$ = ا$ف_1$ - اب = س - ج
اور ج$د_1$ = ج$ع_1$ = ا$ع_1$ - اج = س - ب
∴ $ے_1ع_1$ = ا$ع_1$ مس $ے_1$ا$ع_1$

یعنی
$$ر_1 = س\ مس\ \frac{ا}{۲}$$

۲۰۷۔ $ر_1$ کی ایک تیسری قیمت ا اور زاویوں ب اور ج کی رقوم میں اس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔
چونکہ $ے_1$ج زاویہ ب ج ع کی تنصیف کرتا ہے، اس لیے

$$\angle\ ے_1 ج د_1 = \frac{1}{۲}(۱۸۰° - ج) = ۹۰° - \frac{ج}{۲}$$

اس لیے
$$\angle\ ے_1 ب د_1 = ۹۰° - \frac{ب}{۲}$$

∴ ا = ب ج = ب$د_1$ + $د_1$ج

= م₁ د₁ مس ∠ م₁ ب د₁ + م₁ د₁ مس ∠ م₁ ج د₁

= ر₁ (مس ب/۲ + مس ج/۲)

= ر₁ (جب ب/۲ ÷ جم ب/۲ + جب ج/۲ ÷ جم ج/۲)

∴ ل جم ب/۲ جم ج/۲ = ر₁ (جب ب/۲ جم ج/۲ + جم ب/۲ جب ج/۲)

= ر₁ جب (ب/۲ + ج/۲) = ر₁ جب (۹۰° − ا/۲) = ر₁ جم ا/۲

∴ ر₁ = ل جم ب/۲ جم ج/۲ ÷ جم ا/۲

نتیجہ صریح۔ چونکہ ل = ۲ ر جب ا = ۴ ر جب ا/۲ جم ا/۲

اس لیے ر₁ = ۴ ر جب ا/۲ جم ب/۲ جم ج/۲

امثلہ نمبری ۳۶

۱۔ ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب ۱۸، ۲۴، ۳۰ انچ ہیں، ثابت کرو کہ حائط دائرہ، اندرونی دائرہ اور تین جانبی دائروں کے نصف قطر بالترتیب ۱۵، ۶، ۱۲، ۱۸ اور ۳۶ انچ ہیں۔

۲۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵ فٹ ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) ر = ⅛ ۸ فٹ (۲) ر = ۴ فٹ (۳) ر₁ = ½ ۱۰ فٹ

(۴) ر₂ = ۱۲ فٹ اور (۵) ر₃ = ۱۴ فٹ

۳۔ اگر مثلث ا ب ج میں ل = ۱۳، ب = ۴ اور جم ج = −۵/۱۳

تو ر، $ر_۱$، $ر_۲$ اور $ر_۳$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۴ - مثلثوں کے حل کی مشتبہ صورت میں ثابت کرو کہ دونوں مثلثوں کے حائط دائرے برابر ہوتے ہیں۔

ثابت کرو کہ

۵ - $ر_۱ (س - ا) = ر_۲ (س - ب) = ر_۳ (س - ج) = رس = س$

۶ - $\frac{ر ر_۱}{ر_۲ ر_۳} = مس^۲ \frac{ا}{۲}$ ۷ - $ر ر_۱ ر_۲ ر_۳ = س^۲$

۸ - $ر_۱ ر_۲ ر_۳ = ر \, مم^۲ \frac{ا}{۲} \, مم^۲ \frac{ب}{۲} \, \frac{ج}{۲}$

۹ - $ر ر_۱ \, مم \frac{ا}{۲} = س$

۱۰ - $ر_۲ ر_۳ + ر_۳ ر_۱ + ر_۱ ر_۲ = س^۲$ ۱۱ - $\frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر_۲} + \frac{۱}{ر_۳} - \frac{۱}{ر} = ۰$

۱۲ - $ا (ر ر_۱ + ر_۲ ر_۳) = ب (ر ر_۲ + ر_۳ ر_۱) = ج (ر ر_۳ + ر_۱ ر_۲)$

۱۳ - $(ر_۱ + ر_۲) \, مس \frac{ج}{۲} = (ر_۳ - ر) \, مم \frac{ج}{۲} = ج$

۱۴ - $س = ۲ \, سا^۲ \, جب \, ا \, جب \, ب \, جب \, ج$

۱۵ - $۴ \, سا \, جب \, ا \, جب \, ب \, جب \, ج = ا \, جم \, ا + ب \, جم \, ب + ج \, جم \, ج$

۱۶ - $س = ۴ \, سا \, ر \, جم \frac{ا}{۲} \, جم \frac{ب}{۲} \, جم \frac{ج}{۲}$

۱۷ - $\frac{۱}{ر^۲} + \frac{۱}{ر_۱^۲} + \frac{۱}{ر_۲^۲} + \frac{۱}{ر_۳^۲} = \frac{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲}{س^۲}$

۱۸ - $ر_۱ + ر_۲ + ر_۳ - ر = ۴ \, سا$

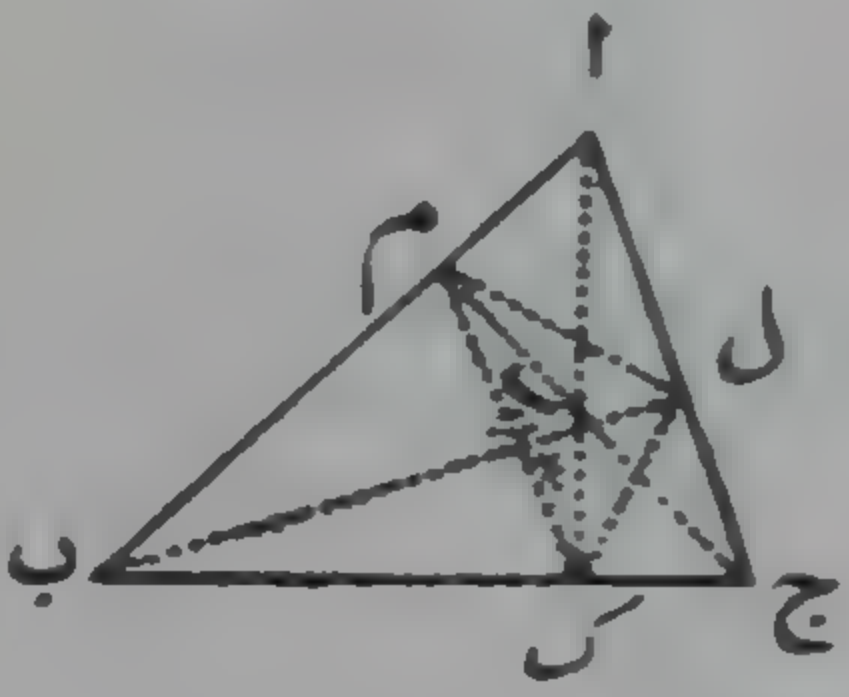
۱۹ - $(ر_۱ - ر)(ر_۲ - ر)(ر_۳ - ر) = ۴ \, سا \, ر^۲$

۲۰ - $\frac{۱}{ب ج} + \frac{۱}{ج ا} + \frac{۱}{ا ب} = \frac{۱}{۲ \, سا \, ر}$

۲۱ - $\frac{ر_۱}{ب ج} + \frac{ر_۲}{ج ا} + \frac{ر_۳}{ا ب} = \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{۲ \, سا}$

۲۲۔ $ر^{2} + ر_{1}^{2} + ر_{2}^{2} + ر_{3}^{2} = ۱۶ ر^{2} - ا^{2} - ب^{2} - ج^{2}$

۲۰۸۔ مثلث پائین اور مرکز عمودی

فرض کرو کہ ا ب ج کوئی مثلث ہے اور زاویوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود بالترتیب اک، ب ل اور ج م نکالے گئے ہیں۔ علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ یہ تینوں عمود ایک مشترک نقطہ پ پر ملتے ہیں، اس نقطہ کو مثلث کا **مرکز عمودی** کہتے ہیں۔ مثلث ک ل م جو ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے بنتا ہے ا ب ج کا **مثلث پائین** کہلاتا ہے۔

۲۰۹۔ مرکز عمودی سے مثلث کے راسوں کے فاصلے دریافت کرو۔

پ ک = ک ب مس پ ب ک = ک ب مس (۹۰ - ج)

= اب جم ب مم ج = $\frac{ج}{جب\ ج}$ جم ب جم ج

= ۲ر جم ب جم ج .... (دفعہ ۲۰۰)

نیز اپ = ال × قطک ا ج

= ج جم ا × قم ج

= $\frac{ج}{جب\ ج}$ × جم ا

= ۲ر جم ا .... (دفعہ ۲۰۰)

پس ب پ = ۲ر جم ب اور ج پ = ۲ر جم ج

لہٰذا مرکز عمودی کے فاصلے زاویوں کے رأسوں سے ۲ سا جم ا، ۲ سا جم ب، ۲ سا جم ج ہیں۔ اور اضلاع سے اُس کے فاصلے ۲ سا جم ب جم ج، ۲ سا جم ج جم ا اور ۲ سا جم ا جم ب ہیں۔

۲۱۰۔ مثلث پائین کے اضلاع اور زاویے دریافت کرو۔

چونکہ زاویے پ ک ج اور پ ل ج دونوں قائمے ہیں، اس لیے نقاط پ، ل، ج اور ک سب ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہیں۔

∴ ∠ پ ک ل = ∠ پ ج ل (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)

= °۹۰ - ا

اسی طرح سے پ، ب، ک اور م ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہیں، اس لیے

∠ پ ک م = ∠ پ ب م

= °۹۰ - ا

اس لیے ∠ م ک ل = °۱۸۰ - ۲ا

= تکملہ زاویہ ۲ا

پس ∠ ک ل م = °۱۸۰ - ۲ ب

اور ∠ ل م ک = °۱۸۰ - ۲ ج

نیز مثلث ا ل م سے

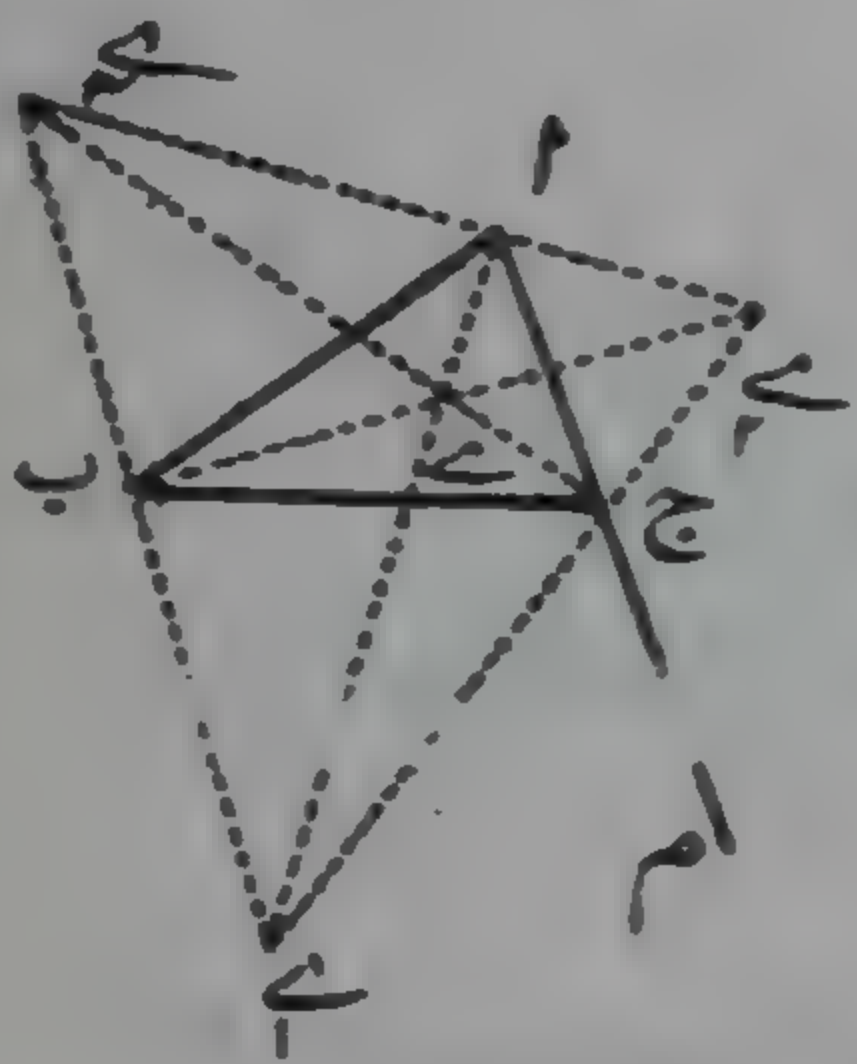
$$\frac{\text{ل م}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{جب ا م ل}} = \frac{\text{اب جم ا}}{\text{جم پ م ل}}$$

$$= \frac{\text{ج جم ا}}{\text{جم پ ا ل}} = \frac{\text{ج جم ا}}{\text{جب ج}}$$

$$\therefore \text{ل م} = \frac{\text{ج}}{\text{جب ج}} \text{جب ا جم ا}$$

= لا جم ا (دفعہ ۱۶۳)

پس　　م ک = ب جم ب اور ک ل = ج جم ج

اس لیے معلوم ہوا کہ مثلث پائین کے اضلاع ا جم ا، ب جم ب، ج جم ج ہیں ۔ اور اس کے زاویے ۲ ا، ۲ ب اور ۲ ج کے تکملے ہیں۔

۲۱۱ ـ فرض کرو کہ ے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ے۱، ے۲، ے۳ ان جانبی دائروں کے مرکز ہیں ۔ جو بالترتیب ا، ب، ج کے محاذی ہیں ۔ جیسا دفعات ۲۰۲ اور ۲۰۵ میں ہم نے دیکھا ہے کہ ے ج زاویہ ا ج ب کی تنصیف کرتا ہے اور ے۱ ج زاویہ ب ج م کی تنصیف کرتا ہے۔

∴ ∠ ے ج ے۱ = ∠ ے ج ب + ∠ ے۱ ج ب

= ½ ∠ ا ج ب + ½ ∠ م ج ب

= ½ [∠ ا ج ب + ∠ م ج ب]

= ½ × ۱۸۰° = ایک زاویہ قائمہ

اسی طرح سے ∠ ے ج ے۲ بھی قائمہ ہے۔

لہٰذا ے۱ ج ے۲ ایک خطِ مستقیم ہے اور ے ج اس پر عمود ہے۔

اسی طرح سے ے۲ ا ے۳ ایک خطِ مستقیم ہے اور اس پر ے ا عمود ہے اور ے۳ ب ے۱ خطِ مستقیم ہے اور ے ب اس پر عمود ہے۔

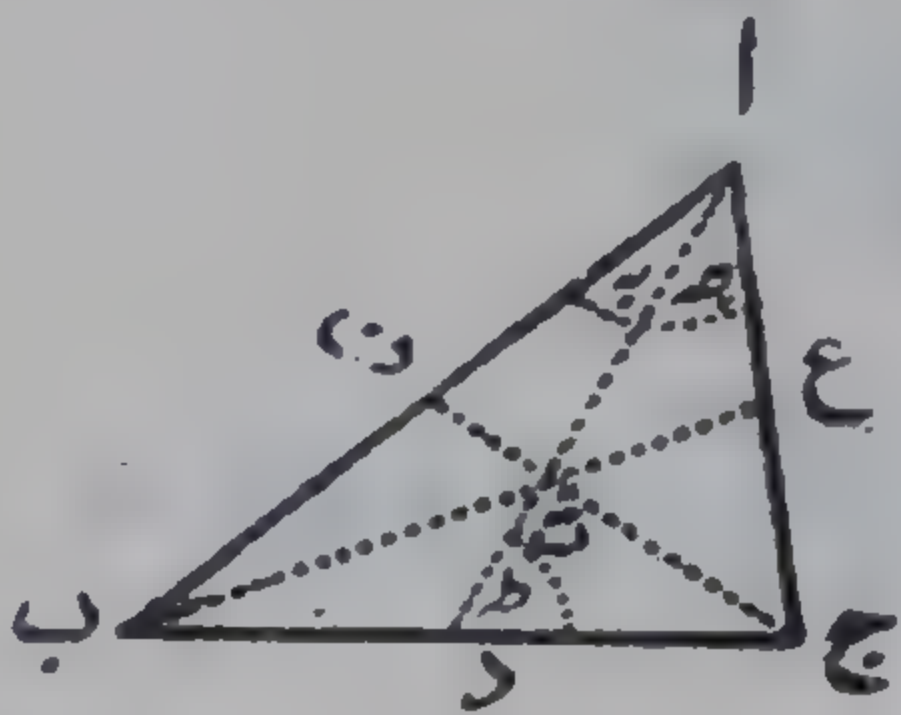
نیز چونکہ ے ا اور ے۱ ا دونوں زاویہ ب ا ج کی تنصیف کرتے ہیں اس لیے معلوم ہوا کہ تینوں نقطے ا، ے، ے۱ ایک خطِ مستقیم پر واقع ہیں،

اسی طرح سے ب ے ے۲ اور ج ے ے۳ مستقیم خط ہیں۔

لہٰذا ثابت ہوا کہ ے۱ ے۲ ے۳ ایک مثلث ہے جس میں ا، ب، ج ان عمودوں کے پائین ہیں جو نقاطِ راس سے مقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں اور ے ان عمودوں کا نقطۂ تقاطع ہے، یا دوسرے الفاظ میں ہم اس کو

یوں بیان کر سکتے ہیں کہ مثلث ے ے۱ ے۲ کا مثلث پائین ا ب ج ہے اور اس کا مرکزِ عمودی نقطہ ے ہے۔
مثلث ے۱ ے۲ ے۳ کو اکثر جانبی مرکزوں کا مثلث کہتے ہیں۔

۲۱۲۔ مثلث کا مرکزِ ہندسی اور خطوطِ وسطی۔

اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو اور د، ع ف اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے نقاطِ تنصیف ہوں تو خطوط ا د، ب ع، ج ف میں سے ہر ایک کو مثلث کا خطِ وسطی یا وسطانی کہتے ہیں۔

علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث کے خطوطِ وسطی ایک مشترک نقطہ ث پر ملتے ہیں اور

$$ا ث = \frac{2}{3} ا د، ب ث = \frac{2}{3} ب ع$$

اور $$ج ث = \frac{2}{3} ج ف$$

نقطہ ث کو مثلث کا مرکزِ ہندسی کہتے ہیں۔

۲۱۳۔ خطوطِ وسطی کے طول۔ بموجب دفعہ ۱۶۴،

$$ا د^2 = ا ج^2 + ج د^2 - 2 ا ج \times ج د جم ج$$

$$= ب^2 + \frac{ا^2}{4} - ا ب جم ج$$

اور $$ج^2 = ب^2 + ا^2 - 2 ا ب جم ج$$

اس لیے $$2 ا د^2 - ج^2 = ب^2 - \frac{ا^2}{2}$$

پس $$ا د = \frac{1}{2} \sqrt{2 ب^2 + 2 ج^2 - ا^2}$$

نیز $$ا د = \frac{1}{2} \sqrt{ب^2 + ج^2 + 2 ب ج جم ا}$$ .... دفعہ ۱۶۴

نیز $$\text{ب ع} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{۲ ج}^2 + \text{۲ ا}^2 - \text{ب}^2}$$

اور $$\text{ج ف} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{۲ ا}^2 + \text{۲ ب}^2 - \text{ج}^2}$$

۲۱۴۔ کوئی خط وسطی اضلاع کے ساتھ جو زاویے بناتا ہے ان کو دریافت کرو۔

اگر $\angle$ ب ا د = بہ اور $\angle$ ج ا د = جہ

تو $$\frac{\text{جب جہ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{د ج}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ا}}{\text{۲ لا}}$$

$$\therefore \text{جب جہ} = \frac{\text{ا جب ج}}{\text{۲ لا}} = \frac{\text{ا جب ج}}{\sqrt{\text{۲ب}^2 + \text{۲ ج}^2 - \text{ا}^2}}$$

اسی طرح سے $$\text{جب بہ} = \frac{\text{ا جب ب}}{\sqrt{\text{۲ ب}^2 + \text{۲ ج}^2 - \text{ا}^2}}$$

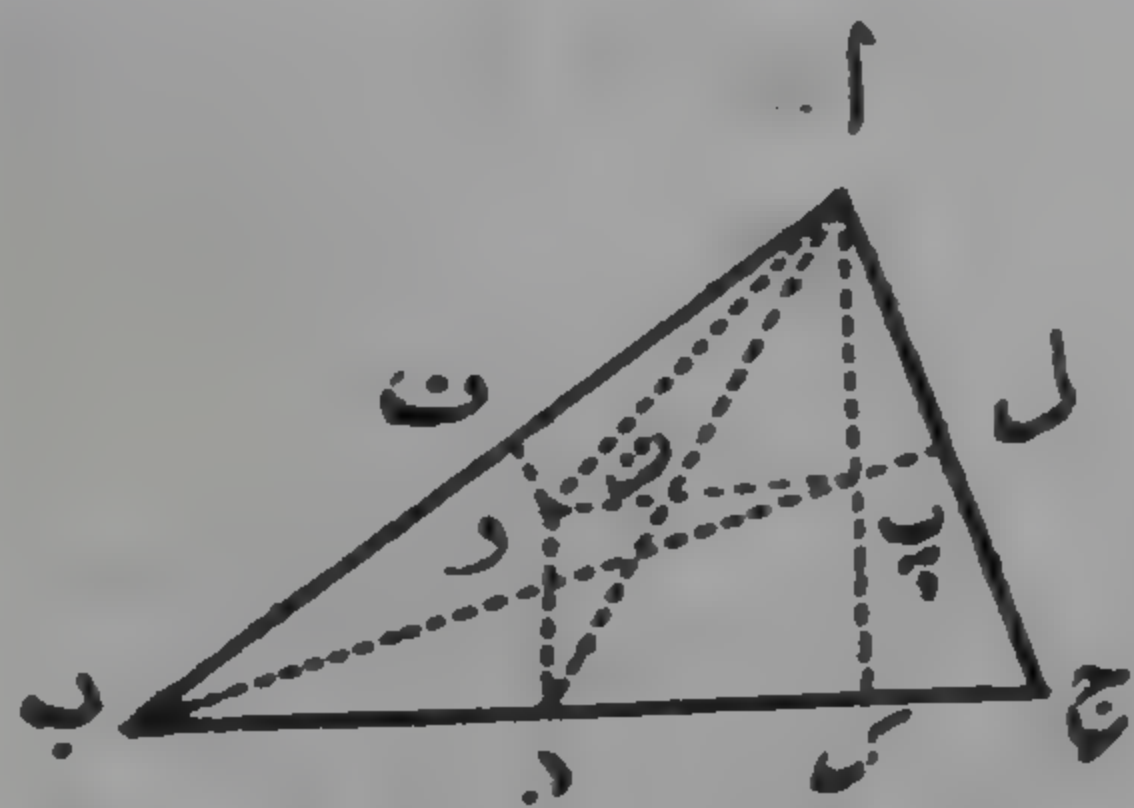
نیز اگر $\angle$ ا د ج = طہ تو

$$\frac{\text{جب طہ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$$

$$\therefore \text{جب طہ} = \frac{\text{ب جب ج}}{\text{لا}} = \frac{\text{۲ب جب ج}}{\sqrt{\text{۲ب}^2 + \text{۲ ج}^2 - \text{ا}^2}}$$

پس جو زاویے ا د اضلاع سے بناتا ہے وہ معلوم ہوئے۔

۲۱۵۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ھندسی ہمیشہ اس خط پہ واقع ہوتا ہے جو حائط مرکز اور مرکز عمودی کو ملانے سے بنتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ د حائط دائرہ کا مرکز ہے اور پ مرکز عمودی ہے۔ ضلع ب ج

اور فرض کرو کہ ا د اور و پ نقطہ ث پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مثلث و ث د اور پ ث ا کے زاویے باہم برابر ہیں۔

نیز بموجب دفعہ ۲۰۰

و د = س جم ا

اور بموجب دفعہ ۲۰۹

ا پ = ۲ س جم ا

اس لیے بحکم اقلیدس م ۶، ش ۴

$$\frac{\text{ا ث}}{\text{ث د}} = \frac{\text{ا پ}}{\text{و د}} = ۲$$

لہٰذا نقطہ ث مثلث کا مرکز ہندسی ہے۔

نیز مسئلہ مذکورہ بالا کی مدد سے

$$\frac{\text{د ث}}{\text{ث پ}} = \frac{\text{و د}}{\text{ا پ}} = \frac{1}{2}$$

اس لیے معلوم ہوا کہ مثلث کا مرکز ہندسی اُسی خط پر واقع ہے جو حائط دائرے کے مرکز کو مرکز عمودی کے ساتھ ملاتا ہے اور اس خط کو ۱ : ۲ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

نیز علم ہندسی سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مثلث کے نو نقطی دائرہ کا مرکز (یعنی ایسے دائرہ کا مرکز جو عمودوں کے پایوں اور ضلعوں کے نقاطِ تنصیف اور اُن خطوط کے وسطی نقاط میں سے ہو کر گزرتا ہے جو مثلث کے نقاطِ راس کو مرکز عمودی سے ملاتے ہیں) ہمیشہ خط و پ پر واقع ہوگا اور اس کی تنصیف کریگا۔

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ حائط دائرہ کا مرکز، مرکز ہندسی، نو نقطی دائرہ کا مرکز اور مرکز عمودی چاروں نقطے ایک خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔

۲۱۶۔ حائط دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی فاصلہ

دریافت کرو۔

اگر اب پر عمود و ف نکالا جائے تو

$\angle$ واف = ۹۰° - $\angle$ اوف = ۹۰° - ج

نیز $\angle$ پ ال = ۹۰° - ج

$\therefore$ $\angle$ واپ = ا - $\angle$ واف - $\angle$ پ ال

= ا - ۲ (۹۰° - ج) = ا + ۲ ج - ۱۸۰°

= ا + ۲ ج - (ا + ب + ج) = ج - ب

نیز وا = ر اور بموجب دفعہ ۲۰۹،

پ ا = ۲ ر جم ا

$\therefore$ وپ² = وا² + پ ا² - ۲ وا × پ ا جم واپ

= ر² + ۴ ر² جم² ا - ۴ ر² جم ا جم (ج - ب)

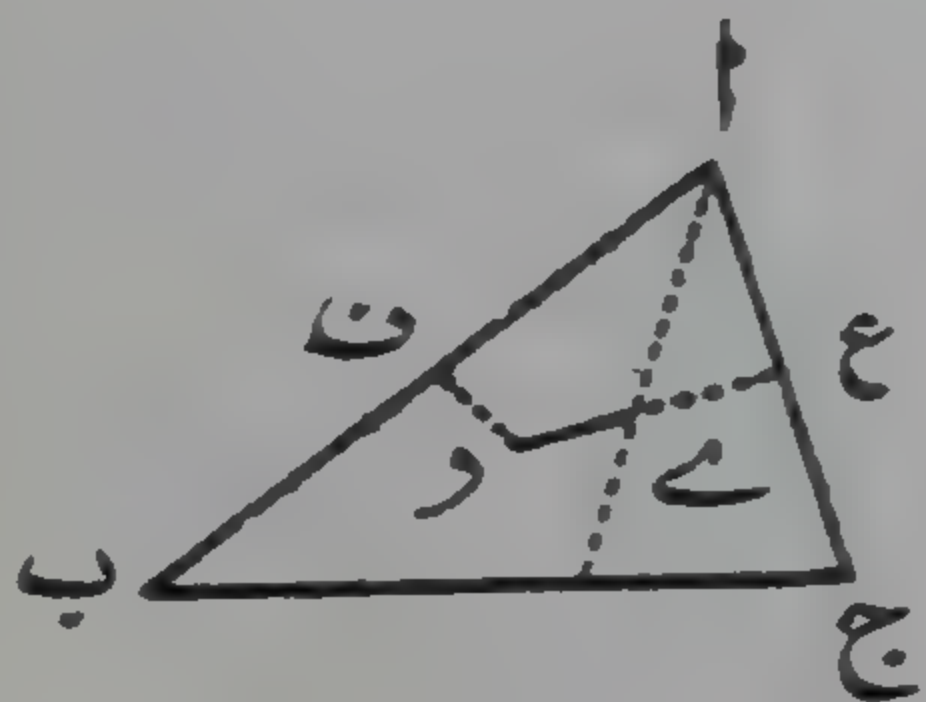
= ر² + ۴ ر² جم ا [جم ا - جم (ج - ب)]

= ر² - ۴ ر² جم ا [جم (ب + ج) + جم (ج - ب)] دفعہ ۲،

= ر² - ۸ ر² جم ا جم ب جم ج

$\therefore$ وپ = ر $\sqrt{\text{۱ - ۸ جم ا جم ب جم ج}}$

۲۱۷۔ مثلث کے حائط اور اندرونی دائروں کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ و حائط دائرہ کا مرکز ہے اور و ف ضلع اب پر عمود ہے۔

نیز فرض کرو کہ ے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ضلع اج پر ے ع عمود ہے۔

تب بموجب دفعہ سابق

∴ ∠ و ا ے = ∠ ے ا ف − ∠ و ا ف

= (ا/۲) − (۹۰° − ج) = (ا/۲) + ج − (ا + ب + ج)/۲

= (ج − ب)/۲

نیز ا ے = ے ع / جب (ا/۲) = ر / جب (ا/۲) = ۴ ر جب (ب/۲) جب (ج/۲)

.... (دفعہ ۲۰۴ نتیجہ تصریح)

∴ و ے² = و ا² + ا ے² − ۲ و ا × ا ے جم و ا ے

= ر² + ۱۶ ر² جب² (ب/۲) جب² (ج/۲)

− ۸ ر² جب (ب/۲) جب (ج/۲) جم (ج − ب)/۲

∴ و ے²/ر² = ۱ + ۱۶ جب² (ب/۲) جب² (ج/۲)

− ۸ جب (ب/۲) جب (ج/۲) [جم (ب/۲) جم (ج/۲) + جب (ب/۲) جب (ج/۲)]

= ۱ − ۸ جب (ب/۲) جب (ج/۲) (جم (ب/۲) جم (ج/۲) − جب (ب/۲) جب (ج/۲))

= ۱ − ۸ جب (ب/۲) جب (ج/۲) جم (ب + ج)/۲

= ۱ − ۸ جب (ب/۲) جب (ج/۲) جب (ا/۲) (دفعہ ۶۹) .... (۱)

∴ و ے = ر √(۱ − ۸ جب (ب/۲) جب (ج/۲) جب (ا/۲))

نیز ربط (۱) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

و ے² = ر² − ۲ ر × ۴ ر جب (ا/۲) جب (ب/۲) جب (ج/۲)

= ر² − ۲ ر ر (دفعہ ۲۰۴ نتیجہ تصریح)

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ے ۱ زاویہ ۱ کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز ے ۱ ہو تو

$$\text{د ے}_1 = \text{ر} \sqrt{1 + 8 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{2} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{2}}$$

اور اس لیے $\text{د ے}_1^2 = \text{ر}^2 + 2 \text{ ر ر}_1$　　(دفعہ ۲۰۷ نتیجہ صریح)

یا بطرز دیگر۔ فرض کرو کہ اگر د ے کو دونوں طرف خارج کیا جائے تو وہ مثلث کے حائط دائرہ کو نقاط س اور ط پر قطع کرتا ہے اور خط ۱ ے ے دائرہ کو نقطہ ھ پر ملتا ہے۔

بحکم اقلیدس م ۳ ش ۳۵

س ے × ے ط = ۱ ے × ے ھ ..... (۲)

لیکن　س ے × ے ط = (ر + د ے) (ر - د ے)

$= \text{ر}^2 - \text{د ے}^2$

نیز　∠ ھ ے ج = ∠ ے ج ۱ + ∠ ے ۱ ج

= ∠ ے ج ب + ∠ ھ ۱ ب

= ∠ ے ج ب + ∠ ھ ج ب

= ∠ ھ ج ے

∴ ھ ے = ھ ج = ۲ ر جب $\frac{1}{2}$　(دفعہ ۲۰۰)

نیز　$\text{۱ ے} = \frac{\text{ے ع}}{\text{جب } \frac{1}{2}} = \frac{\text{ر}}{\text{جب } \frac{1}{2}}$

(۲) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

$\text{ر}^2 - \text{د ے}^2 = 2 \text{ ر ر}$

یعنی　$\text{د ے}^2 = \text{ر}^2 - 2 \text{ ر ر}$

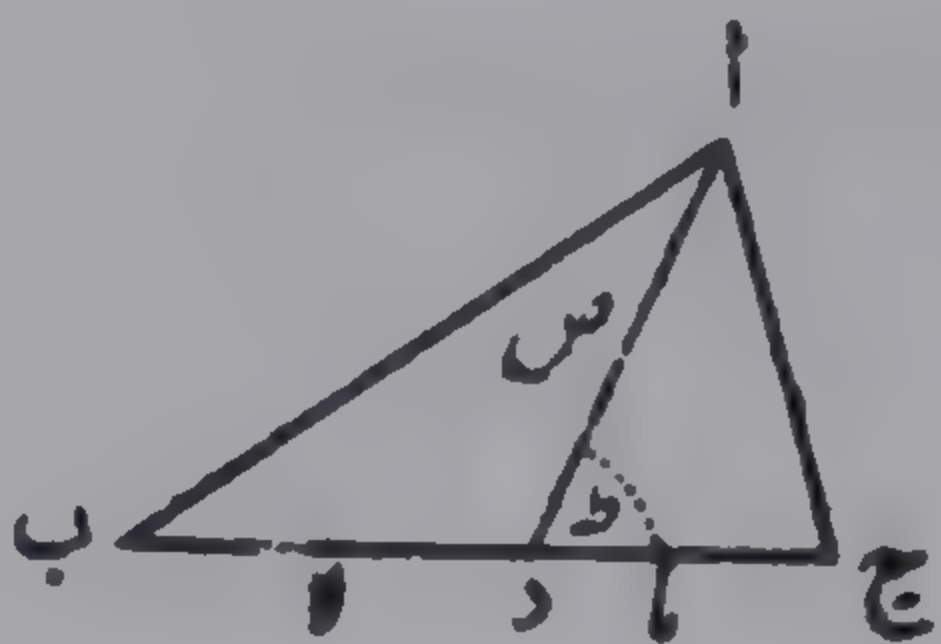
اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ے ۱ ھ = ے ۱ ج

یعنی $\text{مے } د^{2} = \text{ما}^{2} + ۲\,\text{ما}\,ر$

۲۱۸ - زاویوں کے منصِّف

اگر ا د زاویہ ا کی تنصیف کرے اور قاعدہ کو دو ایسے حصّوں میں تقسیم کرے جن کے طول لا اور ما ہوں تو بموجب اقلیدس م ۶ ش ۳

$$\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{اب}}{\text{اج}} = \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{ج}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{ب} + \text{ج}} = \frac{\text{و}}{\text{ب} + \text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

جس سے لا اور ما کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نیز اگر ا د ضلع ب ج سے زاویہ ط بنائے اور اس کا طول ص ہو تو

$$\triangle\,\text{ابد} + \triangle\,\text{اجد} = \triangle\,\text{ابج}$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\,\text{ج ص جب}\,\tfrac{\text{ا}}{۲} + \tfrac{1}{2}\,\text{ب ص جب}\,\tfrac{\text{ا}}{۲} = \tfrac{1}{2}\,\text{ب ج جب ا}$$

یعنی
$$\text{ص} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب} + \text{ج}} \times \frac{\text{جب ا}}{\text{جب}\,\tfrac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{۲\,\text{ب ج}}{\text{ب} + \text{ج}}\;\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

نیز $\text{ط} = \angle\,\text{د اب} + \angle\,\text{ب} = \frac{\text{ا}}{۲} + \text{ب} \quad \ldots\ldots (۳)$

اس طرح سے ہمیں منصّف کا طول اور ب ج سے اس کا میلان حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۷

اگر ایک مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز مے ہو اور تین جانبی دائروں کے مرکز مے_1 ، مے_2 ، مے_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

۱۔ $\text{ا مے} = \text{ر قم}\frac{\text{ا}}{2}$

۲۔ $\text{مے ا} \times \text{مے ب} \times \text{مے ج} = \text{ا ب ج مس}\frac{\text{ا}}{2}\text{مس}\frac{\text{ب}}{2}\text{مس}\frac{\text{ج}}{2}$

۳۔ $\text{ا مے}_1 = \text{ر}_1\text{قم}\frac{\text{ا}}{2}$　　۴۔ $\text{مے مے}_1 = \text{ا قط}\frac{\text{ا}}{2}$

۵۔ $\text{مے}_2\text{مے}_3 = \text{ا قم}\frac{\text{ا}}{2}$

۶۔ $\text{مے مے}_1 \times \text{مے مے}_2 \times \text{مے مے}_3 = 16\,\text{ں}^2\,\text{ر}$

۷۔ $\text{مے}_2\text{مے}_3^2 = 4\,\text{ں}\,(\text{ر}_2 + \text{ر}_3)$

۸۔ $\angle\,\text{مے}_3\text{مے}_1\text{مے}_2 = \frac{\text{ب} + \text{ج}}{2}$

۹۔ $\text{مے مے}_1^2 + \text{مے}_2\text{مے}_3^2 = \text{مے مے}_2^2 + \text{مے}_3\text{مے}_1^2 = \text{مے مے}_3^2 + \text{مے}_1\text{مے}_2^2$

۱۰۔ مثلث $\text{مے}_1\text{مے}_2\text{مے}_3$ کا رقبہ $= 8\,\text{ں}^2\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{ج}}{2} = \frac{\text{ا ب ج}}{2\,\text{ر}}$

۱۱۔ $\frac{\text{مے مے}_1 \times \text{مے}_2\text{مے}_3}{\text{جب ا}} = \frac{\text{مے مے}_2 \times \text{مے}_3\text{مے}_1}{\text{جب ب}} = \frac{\text{مے مے}_3 \times \text{مے}_1\text{مے}_2}{\text{جب ج}}$

اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز مے ہو اور حائط دائرہ کا مرکز د ، نیز عمودی مرکز پ ہو اور ہندسی مرکز ث تو ثابت کرو کہ

۱۲۔ $\text{مے د}^2 = \text{ں}^2\,(3 - 2\,\text{جم ا} - 2\,\text{جم ب} - 2\,\text{جم ج})$

۱۳۔ $\text{مے پ}^2 = 2\,\text{ر}^2 - 4\,\text{ں}^2\,\text{جم ا جم ب جم ج}$

۱۴۔ $\text{د ث}^2 = \text{ں}^2 - \frac{1}{9}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2)$

۱۶۔ ۵۔ ے پ ث کا رقبہ = $\frac{\text{ہ}^2}{2}$ ر² جب $\frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}$ جب $\frac{\text{ج} - \text{ا}}{2}$ جب $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{2}$

۱۷۔ ثابت کرو کہ نونقطی دائرہ کے مرکز کا فاصلہ زاویہ ا سے

$\frac{\text{ر}}{2}\sqrt{1 + 8\,\text{جم ا جب ب جب ج}}$ ہے

۱۸۔ مثلث ا ب ج کا مثلث پائیں د ع ف ہے۔ ثابت کرو کہ

(۱) اس کا رقبہ ۲ س جم ا جم ب جم ج ہے

(۲) اس کے حائط دائرہ کا نصف قطر $\frac{\text{ر}}{2}$ ہے

اور (۳) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر ۲ ر جم ا جم ب جم ج ہے۔

۱۹۔ اگر مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے مثلث

$\text{د}_1 \text{د}_2 \text{د}_3$ بنے تو ثابت کرو کہ

(۱) اس کے اضلاع ۴ ر جم $\frac{\text{ا}}{2}$، ۴ ر جم $\frac{\text{ب}}{2}$، ۴ ر جم $\frac{\text{ج}}{2}$ ہیں

(۲) اس کے زاویے $\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ا}}{2}$، $\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ب}}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ج}}{2}$ ہیں

اور (۳) اس کا رقبہ ۲ ر س ہے۔

۲۰۔ جن نقطوں پر مثلث ا ب ج کا دائرہ اندرونی اضلاع کو مس کرتا ہے ان کو ملانے سے ایک اور مثلث د ع ف بنتا ہے ثابت کرو کہ

(۱) اس مثلث کے اضلاع ۲ ر جم $\frac{\text{ا}}{2}$، ۲ ر جم $\frac{\text{ب}}{2}$، ۲ ر جم $\frac{\text{ج}}{2}$ ہیں،

(۲) اس کے زاویے $\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ا}}{2}$، $\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ب}}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ج}}{2}$ ہیں

اور (۳) اس کا رقبہ $\frac{2\,\text{س}^3}{\text{ا ب ج س}}$ یعنی $\frac{1}{2}\,\frac{\text{ر}}{\text{ر}}$ س ہے۔

۲۱۔ مثلث ا ب ج کے اضلاع کے نقاط تنصیف د، ع، ف ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف اور مثلث ا ب ج کے ہندسی مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں، نیز ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا مرکز عمودی ا ب ج کے حائط دائرہ کا مرکز ہے۔

کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

۲۲۔ اگر زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو وہ اس ضلع کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو اس کے متصل زاویوں کے مماسات التمام کے متناسب ہوتے ہیں اور زاویہ ا کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کی جیوب التمام اضلاع متصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہیں۔

۲۳۔ زاویہ ا میں سے گزرنے والا خطِ وسطی اس کو دو ایسے زاویوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مماس التمام ۲ مم ا + مم ج اور ۲ مم ا + مم ب ہیں اور مثلث کے قاعدہ سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس التمام $\frac{1}{2}$ (مم ج ـ مم ب) ہے۔

۲۴۔ اگر زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو عمود کے پائیں اور ب ج کے نقطۂ تنصیف کا باہمی فاصلہ $\frac{\text{ب}^2 - \text{ج}^2}{\text{۲ و}}$ ہے۔

۲۵۔ و مثلث ا ب ج کا مرکزِ عمودی ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ب و ج، ج و ا، ا و ب اور ا ب ج کے حائط دائرے سب برابر ہیں۔

۲۶۔ مثلث ا ب ج کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود ا د، ب ع اور ج ف کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثات ا ع ف، ب د ف، ج د ع کے حائط دائروں کے قطر بالترتیب ا مم ا، ب مم ب اور ج مم ج ہیں اور مثلث د ع ف اور ا ب ج کے اضلاع کے مجموعوں کی باہمی نسبت ر : س ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز سے راسوں کے فاصلوں کا حاصل ضرب $۴\,\text{س}\,\text{ر}^2$ ہوتا ہے۔

۲۸۔ مثلث ا ب ج کے تین جانبی دائروں کے گرد ایک مثلث د ع ف بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ع ف}}{\text{ا جم ا}} = \frac{\text{ف د}}{\text{ب جم ب}} = \frac{\text{د ع}}{\text{ج جم ج}}$$

دائروں کو مس کرے، نیز ضلع ب ج کو خارجاً مس کرے تو ثابت کرو کہ اس کا نصف قطر $= \frac{\Delta}{\text{ا}}\,\text{مس}^{2}\,\frac{\text{ا}}{۲}$

۴۰۔ اگر تین ایسے دائروں کے نصف قطر جو ایک دوسرے کو خارجاً مس کریں ا، ب، ج ہوں اور اگر ان تینوں کو مس کرتے ہوئے دو اور دائرے کھینچے جائیں جن کے نصف قطر $\text{ر}_{۱}$ اور $\text{ر}_{۲}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{\text{ر}_{۱}} - \frac{۱}{\text{ر}_{۲}} = \frac{۲}{\text{ا}} + \frac{۲}{\text{ب}} + \frac{۲}{\text{ج}}$$

۴۱۔ ایک مثلث معلوم کا رقبہ Δ سے تعبیر ہوتا ہے، اس کے اندرونی دائرے کے نقاطِ تماس کو ملانے سے ایک اور مثلث بنتا ہے جس کا رقبہ $\Delta_{\text{ب}}$ ہے، اگر اسی طرح سے جانبی دائروں کے متعلقہ مثلثوں کے رقبے بالترتیب $\Delta_{۱}$، $\Delta_{۲}$، $\Delta_{۳}$ ہوں تو ثابت کرو کہ $\Delta_{۱} + \Delta_{۲} + \Delta_{۳} - \Delta_{\text{ب}} = ۲\Delta$

۴۲۔ اگر مثلث ا ب ج کے زاویوں کے منصف مقابل کے اضلاع کو نقاط $\text{ا}_{۱}$، $\text{ب}_{۱}$، $\text{ج}_{۱}$ پر ملیں تو ثابت کرو کہ مثلثات $\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱}\text{ج}_{۱}$ اور ا ب ج کے رقبوں کی باہمی نسبت

$$۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{۲} : \text{جم}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج}-\text{ا}}{۲}\ \text{ہے۔}$$

۴۳۔ ایک مثلث کے زاویوں کے راسوں میں سے ایسے خط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع کے ساتھ ایک ہی زاویہ عہ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع سے جو مثلث بنتا ہے اس کے رقبہ کو اصلی مثلث کے رقبہ کے ساتھ نسبت $۴\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ} : ۱$ ہے۔

۴۴۔ دو دائروں کا زاویۂ تقاطع طہ ہے اور ان کے نصف قطر ا اور ب ہیں، ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتر کا طول

$$\frac{۲\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{جب}\,\text{طہ}}{\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + ۲\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{طہ}}}\ \text{ہے۔}$$

۴۵۔ تین مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، اُس دائرہ کا

نصف قطر دریافت کرو جوان تینوں کو مس کرے۔

۳۶۔ تین دائروں کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں اور وہ ایک دوسرے کو بیرون مس کرتے ہیں، اگران کے نقاطِ تماس پر مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اس نقطۂ تقاطع کا فاصلہ کسی نقطۂ تماس سے $\left(\frac{ا ب ج}{ا + ب + ج}\right)^{\frac{1}{2}}$ ہے۔

۳۷۔ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب میں تین نقطے $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$ ایسے لیے گئے ہیں کہ

ب $ا_1$: $ا_1$ ج = ج $ب_1$: $ب_1$ ا = ا $ج_1$: $ج_1$ ب = م : ن، ثابت کرو کہ خطوط ا$ا_1$، ب$ب_1$، ج$ج_1$ کے باہمی تقاطع سے ایک ایسا مثلث پیدا ہوگا جس کے رقبہ کی نسبت مثلث ا ب ج کے ساتھ $(م - ن)^2 : م^2 + م ن + ن^2$ ہوگی۔

۳۸۔ ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو نقاط $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$ پر بالترتیب مس کرتا ہے، اسی طرح سے مثلث $ا_1$ $ب_1$ $ج_1$ کا دائرہ اندرونی اضلاع کو نقاط $ا_2$، $ب_2$، $ج_2$ پر مس کرتا ہے اور علیٰ ہذالقیاس اگر ن واں مثلث $ا_ن$ $ب_ن$ $ج_ن$ اس طرح سے پیدا ہو تو ثابت کرو کہ اس کے زاویے

$$\frac{\pi}{3} + (-2)^{-ن} \left(ا - \frac{\pi}{3}\right)، \frac{\pi}{3} + (-2)^{-ن} \left(ب - \frac{\pi}{3}\right)$$

اور $\frac{\pi}{3} + (-2)^{-ن} \left(ج - \frac{\pi}{3}\right)$ ہیں۔

اس لیے ثابت کرو کہ آخر الامر اس طرح جو مثلث بنیگا وہ متساوی الاضلاع ہوگا۔

۳۹۔ مثلث ا ب ج کا منتشر پائیں $ا_1$ $ب_1$ $ج_1$ اور $ا_1$ $ب_1$ $ج_1$ کا مثلث پائیں $ا_2$ $ب_2$ $ج_2$ ہے اور علیٰ ہذالقیاس، ن ویں مثلث پائیں کے زاویے $ا_ن$، $ب_ن$، $ج_ن$ دریافت کرو۔

سولھواں باب

اشکال ذوار بعۃ الاضلاع اور منتظم کثیر الاضلاع

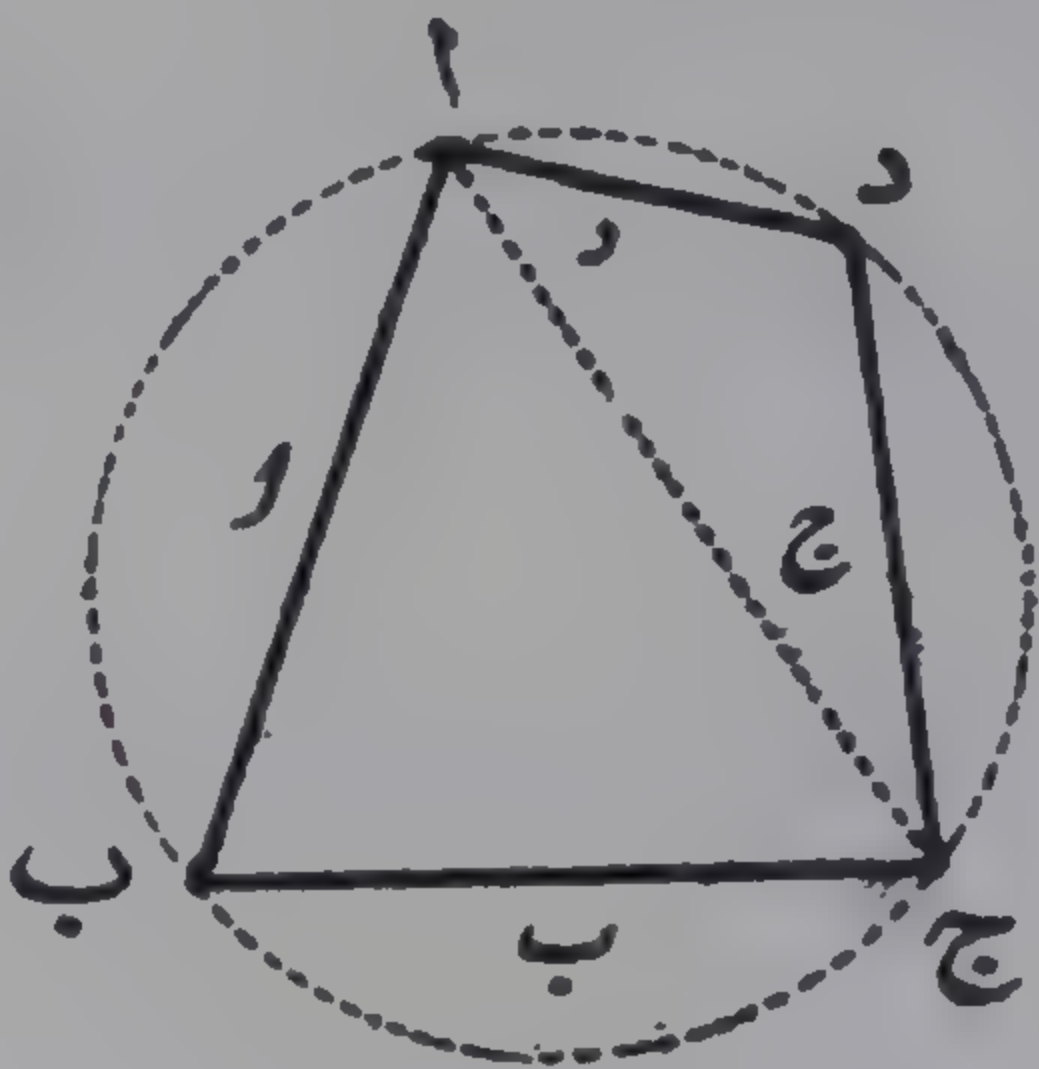
۲۱۹ - ایک ذوار بعۃ الاضلاع دائرہ کے اندر بن سکتا ھے۔ اُس کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د ہے اور اُس کے اضلاع کے طول ا ، ب ، ج ، د شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

ذوار بعۃ الاضلاع کا رقبہ

= رقبہ △ ا ب ج + رقبہ △ ا د ج

= $\frac{1}{2}$ ا ب جب ب + $\frac{1}{2}$ ج د جب د (دفعہ ۱۹۸)

= $\frac{1}{2}$ (ا ب + ج د) جب ب

کیونکہ اقلیدس م ۳ ش ۲۲ کی رُو سے ∠ ب = ۱۸۰° - ∠ د

اور اس لیے جب ب = جب د

اب ہمیں جب ب کو اضلاع کی رقوم میں بیان کرنا ہے۔

ا^2 + ب^2 - ۲ ا ب جم ب = ا ج^2

= ج^2 + د^2 - ۲ ج د جم د

لیکن $\text{جم د} = \text{جم}\,(۱۸۰^\circ - \text{ب}) = -\,\text{جم ب}$

اس لیے $\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - ۲\,\text{اب جم ب} = \text{ج}^۲ + \text{د}^۲ + ۲\,\text{ج د جم ب}$

یعنی $$\text{جم ب} = \frac{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲ - \text{د}^۲}{۲\,(\text{اب} + \text{ج د})}$$

اس لیے $$\text{جب}^۲\,\text{ب} = ۱ - \text{جم}^۲\,\text{ب} = ۱ - \frac{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲ - \text{د}^۲)^۲}{\{۲\,(\text{اب} + \text{ج د})\}^۲}$$

$$= \frac{\{۲\,(\text{اب} + \text{ج د})\}^۲ - \{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲ - \text{د}^۲\}^۲}{۴\,(\text{اب} + \text{ج د})^۲}$$

$$= \frac{\{۲\,(\text{اب} + \text{ج د}) + (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲ - \text{د}^۲)\}\{۲\,(\text{اب} + \text{ج د}) - (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲ - \text{د}^۲)\}}{۴\,(\text{اب} + \text{ج د})^۲}$$

$$= \frac{\{(\text{ا}^۲ + ۲\,\text{اب} + \text{ب}^۲) - (\text{ج}^۲ - ۲\,\text{ج د} + \text{د}^۲)\}\{(\text{ج}^۲ + ۲\,\text{ج د} + \text{د}^۲) - (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - ۲\,\text{اب})\}}{۴\,(\text{اب} + \text{ج د})^۲}$$

$$= \frac{\{(\text{ا} + \text{ب})^۲ - (\text{ج} - \text{د})^۲\}\{(\text{ج} + \text{د})^۲ - (\text{ا} - \text{ب})^۲\}}{۴\,(\text{اب} + \text{ج د})^۲}$$

$$= \frac{\{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} + \text{د})\}\{(\text{ج} + \text{د} + \text{ا} - \text{ب})(\text{ج} + \text{د} - \text{ا} + \text{ب})\}}{۴\,(\text{اب} + \text{ج د})^۲}$$

فرض کرو کہ $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲\,\text{س}$

یعنی $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د} = (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}) - ۲\,\text{د} = ۲\,(\text{س} - \text{د})$

$\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} + \text{د} = ۲\,(\text{س} - \text{ج})$

$\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲\,(\text{س} - \text{ب})$

اور $-\,\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲\,(\text{س} - \text{ا})$

اس لیے $$\text{جب}^۲\,\text{ب} = \frac{۲\,(\text{س} - \text{د}) \times ۲\,(\text{س} - \text{ج}) \times ۲\,(\text{س} - \text{ب}) \times ۲\,(\text{س} - \text{ا})}{\ldots}$$

یعنی (ا ب + ج د) جب ب = ۲ $\sqrt{(س - ا)(س - ب)(س - ج)(س - د)}$

لہٰذا ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ

= $\frac{1}{2}$ (ا ب + ج د) جب ب = $\sqrt{(س - ا)(س - ب)(س - ج)(س - د)}$

۲۲۰۔ چونکہ جم ب = $\frac{ا^2 + ب^2 - ج^2 - د^2}{2(ا ب + ج د)}$

اس لیے اج^2 = ا^2 + ب^2 - ۲ ا ب جم ب

= ا^2 + ب^2 - ا ب $\frac{ا^2 + ب^2 - ج^2 - د^2}{ا ب + ج د}$

= $\frac{(ا^2 + ب^2) ج د + ا ب (ج^2 + د^2)}{ا ب + ج د}$

= $\frac{(ا ج + ب د)(ا د + ب ج)}{ا ب + ج د}$

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

ب د^2 = $\frac{(ا ب + ج د)(ا ج + ب د)}{ا د + ب ج}$

اس سے ہمیں ذو اربعۃ الاضلاع کے قطروں کے طول معلوم ہوتے ہیں۔

ضرب دینے سے اج^2 × ب د^2 = (ا ج + ب د)^2

یعنی اج × ب د = ا ب × ج د + ب ج × ا د

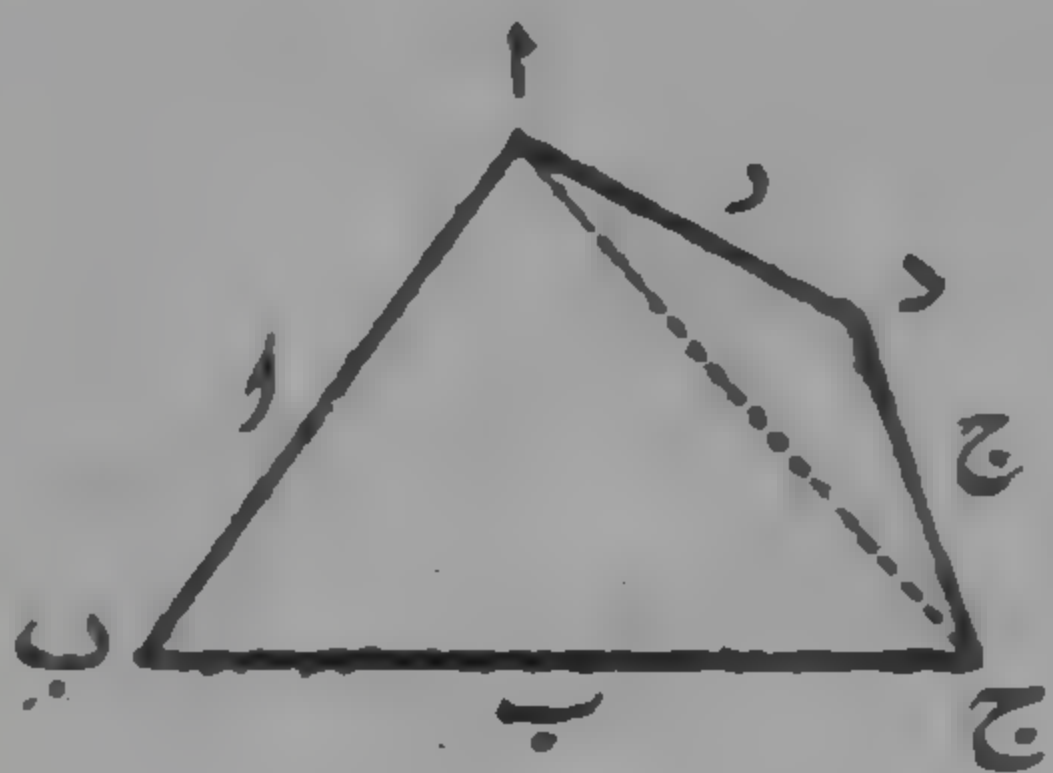
اور یہ علم ہندسہ کا ایک مشہور مسئلہ ہے

نیز ذو اربعۃ الاضلاع کے حائط دائرے کا نصف قطر

$$= \frac{۱}{۲} \; \frac{\text{اج}}{\text{جب ب}}$$

$$= ۴\sqrt{\frac{(\text{اج} + \text{ب د})(\text{اد} + \text{ب ج})}{\text{اب} + \text{ج د}}} \div ۴\sqrt{\frac{(\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})(\text{س} - \text{د})}{(\text{اب} + \text{ج د})^{۲}}}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left\{\frac{(\text{اب} + \text{ج د})(\text{اج} + \text{ب د})(\text{اد} + \text{ب ج})}{(\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})(\text{س} - \text{د})}\right\}^{\frac{۱}{۲}} .$$

۲۲۱ ۔ اگر کوئی ذو اربعۃ الاضلاع دیا ہوا ہو اور یہ ضروری نہیں کہ وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو ہم اس کے رقبہ کو اضلاع اور دو مقابل کے زاویوں کے مجموعے کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ دو زاویوں ب اور د کا مجموعہ ۲عہ ہے، اگر ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کو قـ سے تعبیر کریں تو

$$\text{قـ} = \text{رقبہ مثلث اب ج} + \text{رقبہ مثلث اج د}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{اب جب ب} + \frac{۱}{۲}\,\text{ج د جب د}$$

یعنی $۴\,\text{قـ} = ۲\,\text{اب جب ب} + ۲\,\text{ج د جب د}$ . . . . (۱)

نیز $\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} - ۲\,\text{اب جم ب} = \text{ج}^{۲} + \text{د}^{۲} - ۲\,\text{ج د جم د}$

پس $\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲} - \text{د}^{۲} = ۲\,\text{اب جم ب} - ۲\,\text{ج د جم د}$ . . . . (۲)

(۱) اور (۲) کو مربع کرنے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$۱۶\,\text{قـ}^{۲} + (\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲} - \text{د}^{۲})^{۲}$$

= ۴ ا^۲ ب^۲ + ۴ ج^۲ د^۲ - ۸ ا ب ج د (جم ب جم د - جب ب جب د)

= ۴ ا^۲ ب^۲ + ۴ ج^۲ د^۲ - ۸ ا ب ج د جم (ب + د)

= ۴ ا^۲ ب^۲ + ۴ ج^۲ د^۲ - ۸ ا ب ج د جم ۲ عہ

= ۴ ا^۲ ب^۲ + ۴ ج^۲ د^۲ - ۸ ا ب ج د (۲ جم^۲ عہ - ۱)

= ۴ (ا ب + ج د)^۲ - ۱۶ ا ب ج د جم^۲ عہ

یعنی ۱۶ قہ^۲ = ۴ (ا ب + ج د)^۲ - (ا^۲ + ب^۲ - ج^۲ - د^۲)^۲

- ۱۶ ا ب ج د جم^۲ عہ .... (۳)

لیکن بموجب دفعہ ۲۱۹

۴ (ا ب + ج د)^۲ - (ا^۲ + ب^۲ - ج^۲ - د^۲)^۲

= ۲ (س - ا) × ۲ (س - ب) × ۲ (س - ج) × ۲ (س - د)

= ۱۶ (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د)

لہذا مساوات (۳) سے

قہ^۲ = (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د) - ا ب ج د جم^۲ عہ جس سے رقبہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر د صفر ہو تو ذو اربعۃ الاضلاع مثلث بن جائیگا اور ضابطہ مندرجہ بالا سے ضابطہ دفعہ ۱۹۸ حاصل ہوگا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ذو اربعۃ الاضلاع کے چاروں اضلاع

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ ایک ایسے ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک

دائرہ اور باہر ایک دائرہ بن سکے = ہا ا ب ج د

امثلہ نمبری ۳۸

۱ ۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکتا ہے جو اضلاع کو مس کرے، اگر اس کے اضلاع مفصلہ ذیل ہوں تو ہر ایک صورت میں اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) ۱۳، ۵، ۷، اور ۹ فٹ

(۲) ۷، ۱۰، ۵، اور ۲ فٹ

۲ ۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶ فٹ ہیں اور اس کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ ۲۰۰° ہے، ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ ۳ ہا۳۰ مربع فٹ ہے۔

۳ ۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع ۳، ۳، ۴ اور ۴ فٹ ہیں اور اس کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے، اس کے اندرونی اور حائط دائروں کے نصف قطر دریافت کرو۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ کسی ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ اس کے دو قطروں اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کے نصف حاصل ضرب کے برابر ہے۔

۵ ۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے نیز وہ ایک اور دائرہ کے گرد بھی بن سکتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ہا ا ب ج د ہے اور آخر الذکر دائرہ کا قطر (ہا ا ب ج د) / (ا + ب + ج + د) ہے۔

۶ ۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د ایک دائرہ کے گرد بنایا گیا ہے۔

معلوم ہوں تو ا، ب، ج، د کی قیمتیں اور اس لیے س کی قیمت معلوم ہو جائیگی، رقبہ قہ کی بڑی سے بڑی قیمت اُس وقت ہو گی جب کہ ا ب ج د جم۲ عہ کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو یعنی جب کہ جم۲ عہ صفر کے برابر ہو اور اُس وقت عہ = ۹۰°، اس صورت میں شکل کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہوگا اور شکل ایک دائرہ کے اندر بن سکیگی۔ (اقلیدس م ۳، ش ۲۲)

اس سے معلوم ہوا کہ جس ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع دیے ہوئے ہوں اس کے رقبہ کی بڑی سے بڑی قیمت اُس وقت ہو گی جب وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے۔

۲۲۲۔ مثال ۔ ایک ایسے ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ دریافت کرو جس کے اندر ایک دائرہ بن سکے۔

فرض کرو کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اندر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور وہ اضلاع اب، ب ج، ج د، اور د ا کو ف، ق، ر، س پر مس کرتا ہے۔ تب

ا ف = ا س، ب ف = ب ق، ج ق = ج ر اور د ر = د س

∴ ا ف + ب ف + ج ر + د ر = ا س + ب ق + ج ق + د س

یعنی اب + ج د = ب ج + د ا

یعنی ا + ج = ب + د

اس لیے س = (ا + ب + ج + د)/۲ = ا + ج = ب + د

∴ س - ا = ج، س - ب = د، س - ج = ا اور س - د = ب

اس لیے ضابطہ دفعہ آخر سے اس صورت میں ہوگا

قہ۲ = ا ب ج د - ا ب ج د جم۲ عہ = ا ب ج د جب۲ عہ

یعنی رقبہ مطلوبہ = √(ا ب ج د) جب عہ

ثابت کرو کہ

ا ب جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ = ج د جب $\frac{ج}{۲}$ جب $\frac{د}{۲}$

۷۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ا، ب، ج، د ہیں، اور قطروں کا درمیانی زاویہ جو ضلع ب یا د کے مقابل ہے وہ ع ہے، ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ

$\frac{۱}{۴}$ (ا^۲ - ب^۲ + ج^۲ - د^۲) مس ع ہے۔

۸۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے قطر لا اور ما ہیں اور اس کے اضلاع ا، ب، ج اور د ہیں، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ

$\frac{۱}{۴}$ [۴ لا^۲ ما^۲ - (ب^۲ + د^۲ - ا^۲ - ج^۲)^۲]$^{\frac{۱}{۲}}$ ہے۔

۹۔ اگر کسی ذو اربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت کرو کہ اس کے قطروں کا درمیانی زاویہ

جب$^{-۱}$ [۲ $\sqrt{(س - ا)(س - ب)(س - ج)(س - د)}$ ÷ (ا ج + ب د)] ہوگا۔

اگر اس ذو اربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکے جو اس کے اضلاع کو مس کرے تو ثابت کرو کہ زاویہ مذکورہ

جم$^{-۱}$ $\frac{ا ج - ب د}{ا ج + ب د}$ ہوگا۔

۱۰۔ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع کو بالترتیب نسبت م : ن میں تقسیم کیا جائے اور نقاط فصل کو وصل کرنے سے ایک نیا ذو اربعۃ الاضلاع بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے رقبہ کی نسبت اصلی ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ م^۲ + ن^۲ : (م + ن)^۲ ہوگی۔

۱۱۔ اگر ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے گرد دائرہ بن سکے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ب})}{(\text{س} - \text{ج})(\text{س} - \text{د})}}$$

اور جن دو حصوں میں ایک قطر دوسرے قطر کو تقسیم کرتا ہے اُن کا حاصل ضرب

$$\frac{\text{ا ب ج د}\,(\text{ا ج} + \text{ب د})}{(\text{ا ب} + \text{ج د})(\text{ا د} + \text{ب ج})}\ \text{ہے۔}$$

۱۲۔ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ا، ب، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{د}^۲ = \text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - ۲\,\text{ا ب جم عہ} - ۲\,\text{ب ج جم بہ} - ۲\,\text{ج ا جم جہ}$$

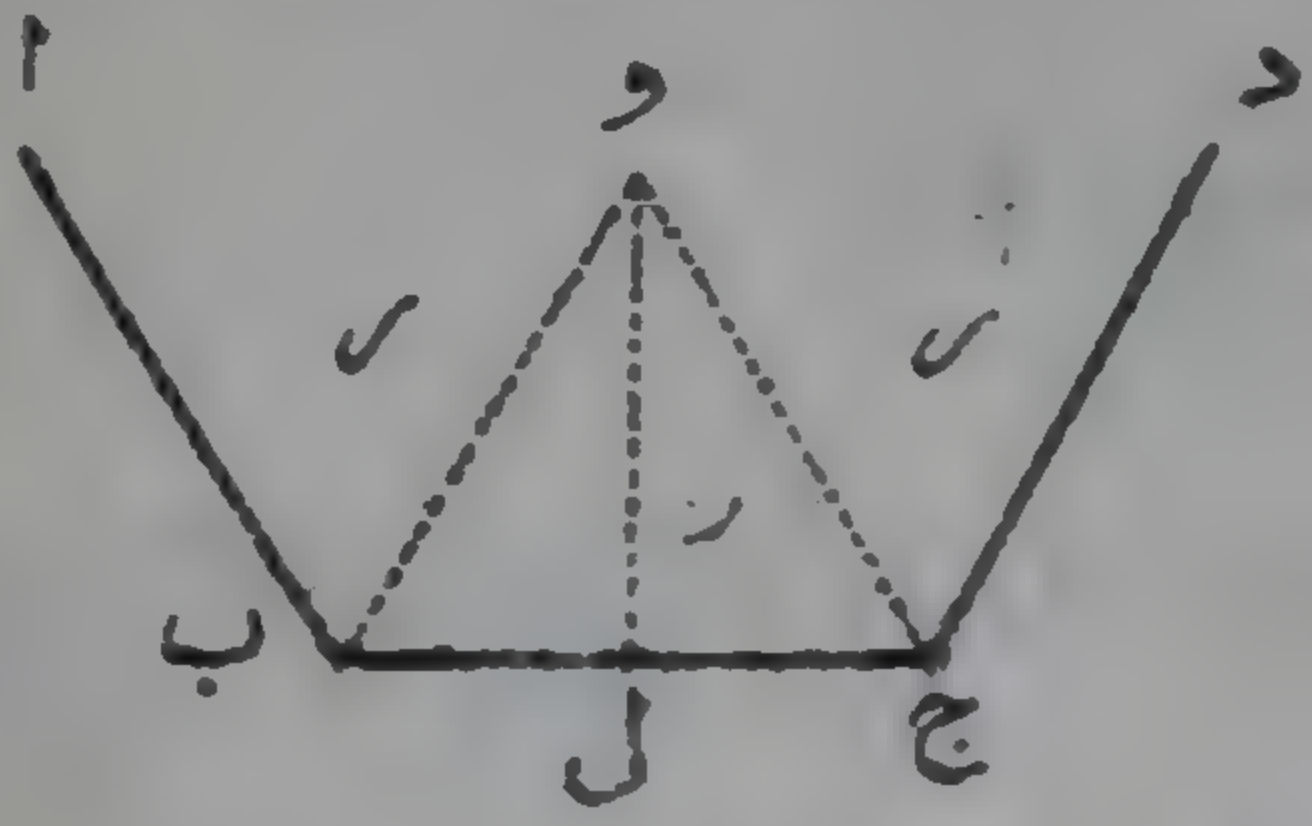
جہاں عہ، بہ، جہ اضلاع ا، ب اور ب، ج اور ج، ا کے درمیانی زاویوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

۲۲۳۔ **منتظم کثیر الاضلاع۔** منتظم کثیر الاضلاع ایک ایسا کثیر الاضلاع ہے جس کے سب اضلاع برابر ہوں اور سب زاویے برابر ہوں۔

اگر ایک کثیر الاضلاع کے ن زاویے ہوں تو بموجب اقلیدس م اُش ۳۲، نتیجہ صریح اس کے ایک زاویے کا ن گنا + ۴ قائمے = اُن قائموں کی تعداد جو شکل کی تعدادِ اضلاع کے دوچند ہوں = ۲ ن قائمے

$$\text{اس لیے ہر ایک زاویہ} = \frac{۲\text{ن} - ۴}{\text{ن}}\ \text{قائمے}$$

$$= \frac{۲\text{ن} - ۴}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{۲}\ \text{نیم قطری زاویے}$$

۲۲۴۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور محائط

دائروں کے نصف قطر ر، ر یافت کرو۔

فرض کرو کہ ا ب، ب ج، ج د ایک کثیر الاضلاع کے تین متصل اضلاع ہیں، اور کل تعداد اضلاع ن ہے۔

زاویوں ا ب ج اور ب ج د کی تنصیف خطوط ب و اور ج و سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ و پر ملتے ہیں، ضلع ب ج پر عمود و ل نکالو۔

ظاہر ہے کہ نقطہ و کثیر الاضلاع کے اندرونی اور حائط دائروں کا مرکز ہے اور ب ل = ل ج

اس لیے و ب = و ج = ر یعنی حائط دائرہ کا نصف قطر

اور و ل = ر یعنی اندرونی دائرہ کا نصف قطر۔

زاویہ ب و ج اُن تمام زاویوں کے مجموعہ کا ۱/ن واں حصہ ہے جو اضلاع کے محاذی نقطہ و پر بنتے ہیں۔

یعنی ∠ ب و ج = ۴ قائمے/ن = ۲π/ن نیم قطری

اس لیے ∠ ب و ل = ۱/۲ ∠ ب و ج = π/ن

اگر کثیر الاضلاع کے ضلع کو ا سے تعبیر کریں تو

ا = ب ج = ۲ ب ل = ۲ ر جب ب و ل = ۲ ر جب π/ن

∴ ر = ا/(۲ جب π/ن) = ا/۲ قم π/ن .... (۱)

نیز ا = ۲ ب ل = ۲ و ل مس ب و ل = ۲ ر مس π/ن

∴ ر = ل ÷ (۲ مس π/ن) = ½ ل مم π/ن .... (۲)

۲۲۵ ۔ منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ۔

کثیر الاضلاع کا رقبہ مثلث ب و ج کے رقبہ کا ن گنا ہے، اس لیے کثیر الاضلاع کا رقبہ

= ن × ½ ول × ب ج = ن × ول × ب ل

= ن × ب ل مم ل و ب × ب ل

= ن × ل²/۴ مم π/ن .... (۱)

جس سے اضلاع کی رقوم میں کثیر الاضلاع کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

نیز رقبہ

= ن × ول × ب ل = ن × ول × ول مس ب و ل

= ن ر² مس π/ن .... (۲)

نیز رقبہ

= ن × ول × ب ل = ن × وب جم ل وب × وب جب ل و ب

= ن ر² جم π/ن جب π/ن = ن/۲ ر² جب ۲π/ن .... (۳)

ضوابط (۱)، (۲)، (۳) سے کثیر الاضلاع کا رقبہ اندرونی اور حائط دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے

۲۲۶ ۔ مثال ۔ ایک منتظم معشر کے ضلع کا طول ۲۰ فٹ ہے، دریافت کرو (۱) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر (۲) اس کے حائط دائرہ کا نصف قطر (۳) اس کا رقبہ۔

کثیر الاضلاع کے مرکز پر ایک ضلع کے محاذی زاویہ = ۳۶۰°/۱۲ = ۳۰°

اس لیے ۱۰ = ر مس ۱۵° = م جب ۱۵°

∴ ر = ۱۰ مم ۱۵°

= ۱۰ / (۲ − √۳) (دفعہ ۱۰۱)

= ۱۰ (۲ + √۳) = ۳۷٫۳۲..... فٹ

نیز م = ۱۰ / جب ۱۵° = ۱۰ × ۲√۲ / (√۳ − ۱) (دفعہ ۱۰۶)

= ۱۰ × √۲ (√۳ + ۱) = ۱۰ (√۶ + √۲)

= ۱۰ (۲٫۴۴۹۵..... + ۱٫۴۱۴۲.....) = ۳۸٫۶۳۷..... فٹ

نیز رقبہ = ۱۲ × ر × ۱۰ مربع فٹ

= ۱۲۰۰ (۲ + √۳) = ۴۴۷۸٫۴۶....... مربع فٹ

امثلہ نمبری ۳۹

۱۔ ایک منتظم معشر ایک ایسے دائرہ کے گرد بنا ہوا ہے جس کا نصف قطر ۱ فٹ ہے، اس کے مجموعہ اضلاع کو ۰٫۱ انچ تک صحیح طور پر دریافت کرو۔
[مس ۱۸° = ۳۲۴۹۲٫]۔

۲۔ ایک ۱۲ اضلاع کا منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنا ہوا ہے جس کا نصف قطر ۱ فٹ ہے اس کے ایک ضلع کا طول اعشاریہ کے تین مقامات تک دریافت کرو۔

۳۔ اشکال ذیل کا رقبہ دریافت کرو (۱) مخمس (۲) مسدس (۳) مثمن (۴) معشر (۵) اثنا عشری، ان میں سے ہر ایک شکل منتظم ہے اور ہر ایک کا ضلع ۱ فٹ ہے،
[مم ۱۸° = ۳٫۰۷۷۶۸..... ، مم ۳۶° = ۱٫۳۷۶۳۸.......]

۴۔ ایک مثمن منتظم اور مسدس منتظم کے رقبوں کا فرق معلوم کرو، ہر ایک شکل کا مجموعۂ اضلاع ۲۴ فٹ ہے۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۲ فٹ ہے، اس کے کونوں کو کاٹ کر ایک منتظم مثمن بنایا گیا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۶۔ ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر اور باہر دو مثمن شکلیں بنائی گئی ہیں، اُن کے اضلاع کے مجموعوں اور اُن کے رقبوں کا مقابلہ کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر بنی ہوئی مسدس اور مثمن شکلوں کے رقبوں کی باہمی نسبت $\sqrt{۲۷} : \sqrt{۳۲}$ ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ ایک ایسے دائرہ کا نصف قطر جو ایک منتظم مخمس کے گرد بن سکتا ہے مخمس کے ایک ضلع کا $\frac{۱۷}{۲۰}$ ہے۔

۸۔ اگر ایک مثلث مساوی الاضلاع اور منتظم مسدس کے اضلاع کے مجموعے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۲ : ۳ ہے۔

۹۔ اگر ایک منتظم مخمس اور ایک منتظم مسدس کے اضلاع کے مجموعے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $۲ : \sqrt{۵}$ ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ن اضلاع کے منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ $\frac{ل}{۲}$ مم $\frac{\pi}{۲ن}$ ہے جہاں ل کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۱۔ ن اضلاع کے دو منتظم کثیر الاضلاع ہیں، ان میں سے ایک تو ایک دیے ہوئے دائرہ کے گرد بنا ہوا ہے اور دوسرا دائرہ کے اندر، ثابت کرو کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے مجموعۂ اضلاع اور دائرہ کے محیط اور اندرونی کثیر الاضلاع کے مجموعۂ اضلاع کی باہمی نسبتیں

$$\text{قط}\,\frac{\pi}{ن} : \frac{\pi}{ن}\ \text{قم}\,\frac{\pi}{ن} : ۱$$

ہیں اور کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کی باہمی نسبت جتم^{۲} $\frac{\pi}{ن}$: ۱ ہے۔

۱۲۔ ایک ن اضلاع کا کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنا ہوا ہے، اگر

اس کے رقبے کی نسبت ایک ۲ ن اضلاع کے کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اُسی دائرہ کے گرد بنایا جائے ۳ : ۲ ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ ۲ ن اضلاع کے منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بنا ہوا ہو اُن ن اضلاع کے منتظم کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کا وسطِ تناسب ہے جو بالترتیب دائرہ کے اندر اور گرد بنے ہوئے ہوں۔

۱۴۔ ن اضلاع کے دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع ہیں سے ایک، دائرہ کے اندر اور دوسرا دائرہ کے گرد بنا ہوا ہے، ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۳ : ۴ ہے ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں، سب سے چھوٹا زاویہ ۱۲۰° ہے اور فرق مشترک ۵° ہے، اضلاع کی تعداد دریافت کرو۔

۱۶۔ دو منتظم کثیر الاضلاعوں میں سے ایک کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دو چند ہے، اور ایک کے زاویے کو دوسری کے زاویے کے ساتھ نسبت ۹ : ۸ ہے، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعدادِ اضلاع دریافت کرو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ منتظم کثیر الاضلاع کے کل ۱۱ زوج ایسے ہو سکتے ہیں کہ ہر ایک زوج میں ایک کثیر الاضلاع کے زاویے کے درجوں کی تعداد کو دوسرے کثیر الاضلاع کے زاویہ کے درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۱۰ اور ۹ کی ہو، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعدادِ اضلاع دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک مربع مینار کے قاعدہ کا ضلع ا فٹ ہے اور اس کے راس کی انتصابی بلندی قاعدہ کے مرکز سے ف فٹ ہے، اگر مینار کے کسی رُخ کا میلان قاعدہ کے ساتھ ط ہو اور دو رُخوں کا میلان آپس میں فہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{\text{۲ف}}{\text{ا}} \quad \text{اور} \quad \text{مس } \frac{\text{فہ}}{۲} = \sqrt{۱ + \frac{\text{ا}^۲}{\text{۲ف}^۲}}$$

۱۹۔ ایک مینار کا قاعدہ منتظم مسدس ہے، اگر مینار کے راس سے قاعدہ پر عمود نکالا جائے تو وہ مسدس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کا طول قاعدہ کے ایک ضلع کے برابر ہے، قاعدہ اور مینار کے کسی رُخ کے درمیان جو زاویہ

ہے۔ اس کا مماس دریافت کرو۔ نیز دو بیرونی رخوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کا مماس معلوم کرو۔

۲۰۔ ایک منتظم مضلع مخروطا کا قاعدہ ایک ن اضلاع کا کثیر الاضلاع ہے جس کا ہر ایک ضلع ا ہے، نیز مخروطا کے ہر ایک مائل ضلع کا طول ل ہے، ثابت کرو کہ مخروطا کے دو متصل بیرونی رخوں کا درمیانی زاویہ

$$\frac{۴ل^{۲}\,\text{جم}\,\frac{۲ط}{ن} + ا^{۲}}{۴ل^{۲} - ا^{۲}} \quad \text{ہے۔}$$

سترھواں باب

چھوٹے زاویوں کی مثلثی نسبتیں۔ دائرہ کا رقبہ۔ اُفق کا میلان

۲۲۷۔ ایک زاویہ، قائمہ سے کم ہے، اُس میں نیم قطریوں کی تعداد طہ ہے، ثابت کرو کہ جب طہ، طہ، مس طہ بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہیں۔

فرض کرو کہ م و ع کوئی زاویہ ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے،

مرکز و اور کسی نصف قطر و ع پر دائرہ کی قوس ع ا عَ کھینچو جو و م کو نقطہ ا پر ملے۔

و ا پر عمود ع ن کھینچو اور اس کو اس قدر خارج کرو کہ وہ قوس دائرہ کو عَ پر ملے۔

نقطہ ع پر مماس ع م کھینچو اور فرض کرو کہ وہ و ا کو نقطہ م پر ملتا ہے، م عَ کو ملاؤ۔

مثلث ع و ن اور عَ و ن آپس میں ہر طرح سے برابر ہیں اس لیے

ع ن = ن عَ اور قوس ع ا = قوس ا عَ

نیز مثلث م و ع اور م و عَ ہر طرح سے برابر ہیں

اس لیے $م ع = م عَ$

خطِ مستقیم ع عَ طول میں قوس ع ا عَ سے کم ہے

یعنی ن ع < قوس ع ا

نیز ہم یہ تسلیم کر لیتے ہیں کہ قوس ع ا عَ طول میں ع م اور م عَ کے مجموعہ سے کم ہے یعنی قوس ع ا < ع م

پس معلوم ہوا کہ ن ع ، قوس ا ع اور ع م بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہیں۔

اس لیے $\frac{ن ع}{و ع}$ ، $\frac{قوس ا ع}{و ع}$ اور $\frac{ع م}{و ع}$ بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہیں

$$لیکن \frac{ن ع}{و ع} = جب ا و ع = جب ط$$

$$\frac{قوس ا ع}{و ع} = ∠ ا و ع \text{ میں نیم قطریوں کی تعداد } = ط \text{ (دفعہ ۲۱)}$$

$$اور \quad \frac{ع م}{و ع} = مس ع و م = مس ا و ع = مس ط$$

لہذا ثابت ہوا کہ جب ط ، ط اور مس ط بلحاظ مقدار کے ترتیب صعودی میں ہیں بشرطیکہ $ط < \frac{\pi}{۲}$ ۔

۲۲۸۔ چونکہ جب ط < ط < مس ط اس لیے اگر ان میں سے ہر ایک کو مثبت مقدار جب ط پر تقسیم کر دیا جائے تو

$$۱ < \frac{ط}{جب ط} < \frac{۱}{جم ط}$$

اس لیے $\frac{\text{طہ}}{\text{جب طہ}}$ ہمیشہ ۱ اور $\frac{1}{\text{جم طہ}}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور یہ نتیجہ درست ہے خواہ زاویہ طہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو۔

لیکن جب زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو تو جم طہ تقریباً ایک کے برابر ہوتا ہے اور طہ جتنا چھوٹا ہوتا جائے گا جم طہ کی قیمت اتنی ہی ۱ کے زیادہ قریب آتی جائیگی یعنی $\frac{1}{\text{جم طہ}}$ کی قیمت اتنی ہی ۱ کے زیادہ قریب آتی جائیگی۔

اس لیے جب زاویہ طہ نہایت ہی قلیل ہوگا تو مقدار $\frac{\text{طہ}}{\text{جب طہ}}$ عدد ۱ اور ایک ایسی مقدار کے درمیان واقع ہوگی جس کا تفاوت عدد ۱ سے ایک لا انتہا قلیل مقدار کے برابر ہوگا۔

دوسرے الفاظ میں جب زاویہ طہ لا انتہا چھوٹا ہوگا تو مقدار $\frac{\text{طہ}}{\text{جب طہ}}$

اور اس لیے $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ آخرالامر ۱ کے برابر ہوگی، یعنی جتنا چھوٹا ایک زاویہ ہوتا جائیگا اتنی ہی اس کی جیب ان نیم قطریوں کی تعداد کے برابر ہوتی جائیگی جو زاویہ مجوزہ میں شامل ہیں اختصاراً اس کو یوں بیان کرتے ہیں۔

جب طہ = طہ اگر زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو

اسی طرح سے مس طہ اگر زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو

نتیجہ صریح۔ فرض کرو کہ طہ = $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب زاویہ طہ، لا انتہا چھوٹا ہو تو ن لا انتہا بڑا ہوتا ہے۔

اس لیے $\frac{\text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}$ = ۱ ہے اگر ن، لا انتہا بڑا ہو۔

پس ن جب $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ = عہ اگر ن، لا انتہا بڑا ہو۔

اسی طرح سے ن مس $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ = عہ اگر ن، لا انتہا بڑا ہو۔

۲۲۹۔ دفعہ گزشتہ میں یہ خاص طور پر یاد رکھنا چاہیے کہ زاویہ مجوزہ میں طہ نیم قطریوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے۔

جب عہ° کی قیمت اگر عہ نہایت ہی چھوٹا ہو اس طرح معلوم ہوسکتی ہے

اس لیے $^{\text{نق}}\pi = ۱۸۰^\circ$

$\text{عہ}^\circ = \left(\frac{\text{عہ}}{۱۸۰}\pi\right)^{\text{نق}}$

$\therefore$ جب عہ° = جب $\left(\frac{\pi\,\text{عہ}}{۱۸۰}\right)^{\text{نق}} = \frac{\pi\,\text{عہ}}{۱۸۰}$

بموجب نتیجہ دفعہ ماقبل۔

۲۳۰۔ جدولوں سے معلوم ہوگا کہ کسی زاویہ کی جیب اور اس کا قوسی ناپ ۷ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہوتے ہیں جب تک کہ زاویہ کی مقدار ۱۸ً سے کم رہتی ہے اور وہ ۵ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہوتے ہیں جب تک کہ زاویہ تقریباً ۲° سے کم رہتا ہے۔

۲۳۱۔ اگر کوئی زاویہ، قائمہ سے کم ہو اور اس میں نیم قطریوں کی تعداد طہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب طہ > طہ ـ $\frac{\text{طہ}^۳}{۴}$ اور جم طہ > ۱ ـ $\frac{\text{طہ}^۲}{۲}$

بموجب دفعہ ۲۲۷

مس $\frac{ط}{۲}$ > $\frac{ط}{۲}$

∴ جب $\frac{ط}{۲}$ > $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$

اور چونکہ جب ط = ۲ جب $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$

اس لیے جب ط > ط جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ یعنی > ط (۱ ـ جب^{۲} $\frac{ط}{۲}$)

لیکن چونکہ بموجب دفعہ ۲۲۷

جب $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$

اس لیے ۱ ـ جب^{۲} $\frac{ط}{۲}$ > ۱ ـ ($\frac{ط}{۲}$)^{۲} یعنی > ۱ ـ $\frac{ط^{۲}}{۴}$

∴ جب ط > ط (۱ ـ $\frac{ط^{۲}}{۴}$) یعنی > ط ـ $\frac{ط^{۳}}{۴}$

نیز جم ط = ۱ ـ ۲ جب^{۲} $\frac{ط}{۲}$

اور چونکہ جب^{۲} $\frac{ط}{۲}$ < ($\frac{ط}{۲}$)^{۲}

اس لیے ۱ ـ ۲ جب^{۲} $\frac{ط}{۲}$ > ۱ ـ ۲ ($\frac{ط}{۲}$)^{۲} یعنی > ۱ ـ $\frac{ط^{۲}}{۲}$

علم مثلث کے حصہ دوم میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ

جب ط > ط ـ $\frac{ط^{۳}}{۶}$ اور جم ط < ۱ ـ $\frac{ط^{۲}}{۲}$ + $\frac{ط^{۴}}{۲۴}$

۲۳۲ ـ مثال ۱ ـ جب ۱۰′ اور جم ۱۰′ کی قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ $۱۰' = \frac{۱^\circ}{۶} = \frac{\pi}{۶ \times ۱۸۰}$ نق

اس لیے   جب $۱۰'$ = جب $\left(\frac{\pi}{۶ \times ۱۸۰}\right.$ نق $\left.\right) = \frac{\pi}{۶ \times ۱۸۰}$

$= \frac{۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵\ldots\ldots}{۶ \times ۱۸۰} = ۰٫۰۰۲۹۰۸۹$ تقریباً

نیز   جم $۱۰' = \sqrt{۱ -}$ جب^{۲} $۱۰'$

$= \left[۱ - ۰٫۰۰۰۰۰۸۴۶۸\ldots\ldots\ldots\right]^{\frac{۱}{۲}}$

$= ۱ - \frac{۱}{۲}\left[۰٫۰۰۰۰۰۸۴۶۸\ldots\ldots\right]$

تقریباً بذریعہ مسئلۂ ثنائی

$= ۱ - ۰٫۰۰۰۰۰۴۲۳۴\ldots\ldots\ldots$

$= ۰٫۹۹۹۹۹۵۸\ldots\ldots\ldots\ldots$

مثال ۲۔ مساوات جب طہ = ۰٫۵۲ میں طہ کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ جب طہ تقریباً $\frac{۱}{۲}$ کے برابر ہے اس لیے طہ تقریباً $\frac{\pi}{۶}$ کے برابر ہے۔

اب فرض کرو کہ طہ = $\frac{\pi}{۶}$ + لا جہاں لا مقدار میں قلیل ہے۔

∴ ۰٫۵۲ = جب $\left(\frac{\pi}{۶}\right.$ + لا$\left.\right)$ = جب $\frac{\pi}{۶}$ جم لا + جم $\frac{\pi}{۶}$ جب لا

= $\frac{۱}{۲}$ جم لا + $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جب لا

چونکہ لا بہت چھوٹا ہے اس لیے

جم لا = ۱ اور جب لا = لا تقریباً

∴ ۰٫۵۲ = $\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ لا

∴ لا = ۲۰۰ء۲ × $\frac{۱}{۴۴}$ نیم قطری = $\frac{ٹ}{۷۵}$ = ۰۳۲ء۱ تقریباً

اس لیے　　　　ط = ۳۱° ۱۹′ تقریباً

امثلہ نمبری ۴۰

[ٹ = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵، $\frac{۱}{ٹ}$ = ...۰٫۳۱۸۳۱]

مفصلہ ذیل کی قیمتیں اعشاریہ کے پانچ مقامات تک دریافت کرو

۱۔ جب ۷′　　　　۲۔ جب ۵″　　　　۳۔ جب ۱′

۴۔ جم ۱۵′　　　　۵۔ قم ۸″　　　　۶۔ قط ۵′

ذیل کی مساواتوں کی تقریبی اصلیں دریافت کرو۔

۷۔ جب ط = ۰۱ء　　　　۸۔ جب ط = ۰۸۴ء

۹۔ جم ($\frac{ٹ}{۲}$ + ط) = ۰۴۹ء　　　　۱۰۔ جم ط = ۹۹۹ء

۱۱۔ ایک پیسے کا قطر ایک انچ ہے، یہ معلوم کرو کہ آنکھ سے کتنے فاصلے پر چاند کے سامنے اس کو رکھا جائے کہ چاند نہ دکھائی دے، چاند کے قطر کے محاذی جو زاویہ دیکھنے والے کی آنکھ پر بنتا ہے وہ ۳۰′ ہے۔

۱۲۔ ایک شخص خطِ مستقیم پر ایک دُور کی شے کی سیدھ میں جاتا ہے اور دیکھتا ہے کہ تین نقاط ا، ب، ج پر اس کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے بالترتیب ع، ۲ع، ۳ع ہیں، ثابت کرو کہ اب = ۳ ب ج تقریباً۔

۱۳۔ اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اُس میں نیم قطریوں کی تعداد ط ہو

تو ثابت کرو کہ جم ط > ۱ - $\frac{ط^۲}{۲}$ + $\frac{ط^۴}{۱۲}$

۱۴۔ آئیلر کا مسئلہ ثابت کرو یعنی ثابت کرو کہ

جب ط = ط × جم $\frac{ط}{۲}$ × جم $\frac{ط}{۲^۲}$ × جم $\frac{ط}{۲^۳}$ .... ∞ تک

[جب ط = ۲ جب $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$ = ۲^۲ جب $\frac{ط}{۲^۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$

= ۲^۳ جب $\frac{ط}{۲^۳}$ جم $\frac{ط}{۲^۳}$ جم $\frac{ط}{۲^۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$ = ...

= ۲^ن جب $\frac{ط}{۲^ن}$ × جم $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۳}$ .... جم $\frac{ط}{۲^ن}$

ن کو لا انتہا بڑا فرض کرنے سے بموجب دفعہ ۲۲۸ **نتیجہ صریح**

۲^ن جب $\frac{ط}{۲^ن}$ = ط

اس لیے جب ط = ط جم $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۳}$ .... ∞ تک]

۱۵۔ ثابت کرو کہ

(۱ ـ مس^۲ $\frac{ط}{۲}$) (۱ ـ مس^۲ $\frac{ط}{۲^۲}$) (۱ ـ مس^۲ $\frac{ط}{۲^۳}$) .... ∞ تک

= ط × مم ط

۲۳۳۔ ایک دائرہ کا رقبہ

بموجب دفعہ ۲۲۵ ن اضلاع کے منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ جو ایک ایسے دائرہ کے اندر بنا ہوا ہو جس کا نصف قطر ر ہو

= $\frac{ن}{۲}$ ر^۲ جب $\frac{۲\pi}{ن}$

اب فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ہمیشہ منتظم رہتا ہے اور اس کی تعداد اضلاع لا انتہا بڑھتی ہے، ظاہر ہے کہ کثیر الاضلاع کا مجموعۂ اضلاع دائرہ کے محیط کے قریب قریب آتا جائیگا۔

اس لیے جب کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع لا انتہا بڑھیگی تو دائرہ کا رقبہ کثیر الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہوگا۔

$$\text{اب}\ \frac{\text{ن}}{۲}\ \text{ر}^{۲}\ \text{جب}\ \frac{۲\pi}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{۲}\ \text{ر}^{۲} \times \frac{۲\pi}{\text{ن}} \times \frac{\text{جب}\ \frac{۲\pi}{\text{ن}}}{\frac{۲\pi}{\text{ن}}}$$

$$= \pi\ \text{ر}^{۲}\ \frac{\text{جب}\ \frac{۲\pi}{\text{ن}}}{\frac{۲\pi}{\text{ن}}} = \pi\ \text{ر}^{۲}\ \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\ \text{جہاں طہ} = \frac{۲\pi}{\text{ن}}$$

جب ن، لا انتہا بڑا ہوگا تو طہ کی قیمت لا انتہا چھوٹی ہوگی اور اُس وقت بموجب دفعہ ۲۲۸ نسبت $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ ، ۱ کے برابر ہوگی۔

اس لیے دائرہ کا رقبہ = π ر^{۲} = اس کے نصف قطر کے مربع کا π گنا۔

۲۳۴ - قطاع دائرہ کا رقبہ

فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز و ہے اور قطاع دائرہ کی احاطہ کرنے والی قوس اب ہے، فرض کرو کہ ∠ اوب = عہ نیم قطری۔

بحکم اقلیدس م ۶، ش ۳۳، دائروں کے قطاع آپس میں وہی نسبت رکھتے ہیں جو اُن کی قوسوں کو آپس میں ہے جن پر کہ وہ قائم ہیں۔

اس لیے
$$\frac{\text{قطاع اوب کا رقبہ}}{\text{کل دائرہ کا رقبہ}} = \frac{\text{قوس اب}}{\text{محیط دائرہ}}$$

$$= \frac{\text{ر عہ}}{۲\pi\ \text{ر}} = \frac{\text{عہ}}{۲\pi}$$

$$\therefore \text{قطاع اوب کا رقبہ} = \frac{\text{عہ}}{۲\pi} \times \text{دائرہ کا رقبہ}$$

$$= \frac{\text{عہ}}{۲\pi} \times \pi\ \text{ر}^{۲} = \frac{۱}{۲}\ \text{ر}^{۲}\ \text{عہ}$$

امثلہ نمبری ۴۱

[فرض کرو کہ π = ۳٫۱۴۱۵۹........ ، $\frac{1}{\pi}$ = ۰٫۳۱۸۳۱ اور لوگ π = ۰٫۴۹۷۱۵]

۱۔ ایک دائرہ کا محیط ۴۰ فٹ ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۲۔ ایک دائرہ کا قطر ۱۰ فٹ ہے، اس کے ایسے قطاع کا رقبہ دریافت کرو جس کا زاویہ °۲۲ $\frac{1}{2}$ ہو۔

۳۔ ایک دائرہ کے قطاع کا رقبہ ۱۰ مربع فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطاع کا زاویہ دریافت کرو۔

۴۔ ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا کل طول ۱۰ فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطرہ ۳ فٹ ہو تو قطاع کا رقبہ دریافت کرو۔

۵۔ ایک کاغذ کا تختہ ۲ میل لمبا اور ۰۰۳ء انچ موٹا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں لپٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کے نصف قطر کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۶۔ ایک کاغذ کا تختہ ایک میل لمبا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں لپٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کا قطر ۶ انچ ہے، کاغذ کی موٹائی دریافت کرو۔

۷۔ دو ہم مرکز دائروں کے نصف قطر ر اور ۲ ر ہیں، اندرونی دائرہ کے دو متوازی مماس بیرونی دائرہ سے ایک قوس قطع کرتے ہیں، قوس کا طول دریافت کرو۔

۸۔ ایک نصف دائرہ کا محیط دو ایسی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ایک کا وتر دوسرے کے وتر کا دو چند ہے، ثابت کرو کہ جو قطعات دائرہ ان وتروں کے کھینچنے سے پیدا ہوتے ہیں اُن کے رقبوں کو آپس میں نسبت ۲۷ اور ۵۵ کی ہے [$\pi = \frac{22}{7}$]

۹۔ تین مساوی دائرے ہیں، اگر ان میں سے ہر ایک باقی دو کو

مس کرے اور ہر ایک کا نصف قطر ا ہو تو ثابت کرو کہ ان تینوں کے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ $\frac{۴}{۲۵}$ ا^{۲} ہے۔

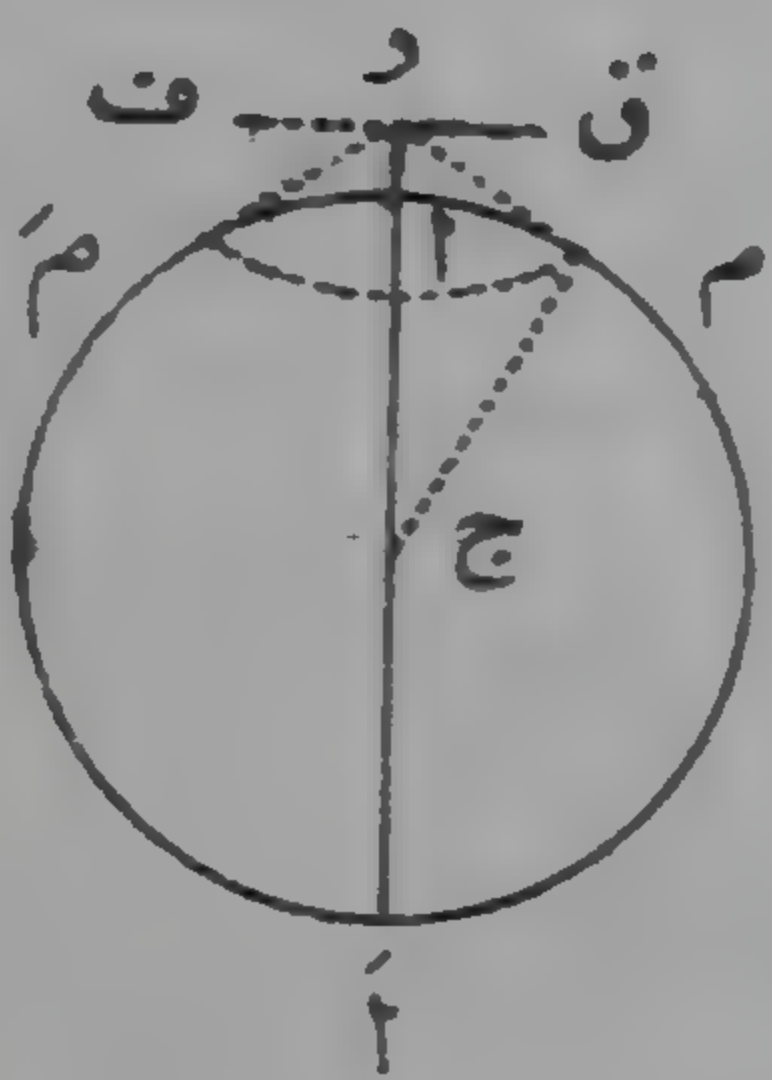
۱۰۔ چھ مساوی دائرے ایک سطح مستوی پر اس طرح ترتیب دیے گئے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دو اور دائروں کو مس کرتا ہے، اگر ان کے مرکز ایک اور دائرہ کے محیط پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ ۲ و^{۲} (۳ م۳ - π) ہے جہاں ا ہر ایک مساوی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۱۔ ایک مثلث کے راس ا سے ایک خطِ مستقیم ا د کھینچا گیا ہے جو قاعدہ سے زاویہ ط بناتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ا ب د اور ا ج د کے بیرونی دائروں کا مشترک رقبہ

$$= \frac{۱}{۴} \text{ (ب}^{۲}\text{جہ + ج}^{۲}\text{ بہ - ب ج جب ا) قم}^{۲}\text{ ط}$$

جہاں زاویوں ب اور ج میں نیم قطریوں کی تعداد بالترتیب بہ اور جہ ہے۔

۲۳۵۔ افق کا میلان

فرض کرو کہ ایک نقطہ و کی بلندی سطح زمین سے ب ہے، نقطہ و سے زمین پر کے مماس کھینچو جیسے و م اور و مَ، ان مماسوں کے سرے ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہونگے۔ اس دائرہ کو افق مرئی کہتے ہیں اور جو زاویہ ہر ایک مماس (مثلاً و م) سطح اُفقی ف و ق سے بناتا ہے اس کو اُفق کا **میلان** کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ر ہے اور زمین کا جو قطر نقطہ
ا میں سے گذرتا ہے اس کا دوسرا سرا اَ ہے تب
بموجب اقلیدس م ۳، ش ۳۶

$$\text{دم}^2 = \text{دا} \times \text{دَا} = \text{ب} (\text{۲ر} + \text{ب})$$

یعنی $\text{دم} = \sqrt{\text{ب} (\text{۲ر} + \text{ب})}$

اس سے دم کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے۔
مگر تمام عملی صورتوں میں ب بمقابلہ ر کے بہت چھوٹا ہوتا ہے
[ر = ...۴ میل تقریباً اور ب پانچ میل سے کبھی زیادہ نہیں
ہوتا اور بالعموم اس سے بہت کم ہوتا ہے]
اس لیے ب^2 بمقابلہ ب ر کے بہت چھوٹا ہے۔
دم کی قیمت کا ایک اچھا تقرب یہ ہے

$$\text{دم} = \sqrt{\text{۲ ب ر}}$$

میلان $= \angle \text{دم دق}$

$$= 90^\circ - \angle \text{ج دم} = \angle \text{دجم}$$

نیز $\text{مس دجم} = \frac{\text{دم}}{\text{جم}} = \frac{\sqrt{\text{۲ب ر}}}{\text{ر}} = \sqrt{\frac{\text{۲ب}}{\text{ر}}}$

یعنی زاویۂ میلان کا ایک اچھا تقرب یہ ہوا

$$\angle \text{دجم} = \sqrt{\frac{\text{۲ب}}{\text{ر}}} \text{ نیم قطری}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\text{۲ب}}{\text{ر}}} \times \frac{180}{\pi} \right)^\circ = \left[\frac{60 \times 60 \times 180}{\pi} \sqrt{\frac{\text{۲ب}}{\text{ر}}} \right]''$$

۲۳۶ - مثال - ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر

سے ۲۶۴ فٹ ہے، اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو روشنی گھر کی چوٹی سے اُفق کا میلان اور اُفق مرئی کا فاصلہ دریافت کرو۔

یہاں ر = ۴۰۰۰ میل اور ب = ۲۶۴ فٹ = $\frac{1}{20}$ میل

اس لیے معلوم ہوا کہ ب بمقابلہ ر کے بہت چھوٹا ہے

یعنی وم = $\sqrt{\frac{1}{10} \times 4000} = \sqrt{400} = 20$ میل

نیز زاویہ میلان = $\sqrt{\frac{2ب}{ر}}$ نیم قطری = $\frac{1}{200}$ نیم قطری

$= (\frac{1}{200} \times \frac{180 \times 60}{\pi})'$

$= (\frac{54}{\pi})' = 17' \; 11''$ تقریباً

امثلہ نمبری ۴۲

[اگر اس کے خلاف ذکر نہ ہو تو زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل فرض کیا جائے]

۱۔ ایک پہاڑ کی بلندی ۴۰۰۲ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے اُفق کا میلان انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں دریافت کرو، زمین کا نصف قطر 21×10^6 فٹ ہے۔

۲۔ ایک روشنی گھر کا چراغ سطح سمندر سے ۱۹۶ فٹ بلند ہے، بتاؤ کہ یہ زیادہ سے زیادہ کتنے فاصلہ سے دکھائی دے سکتا ہے۔

۳۔ اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو ایک غبارہ کی بلندی دریافت کرو جب کہ اُفق کا میلان 1° ہو۔ نیز اگر غبارہ کی بلندی ۲ میل ہو تو اُفق کا میلان دریافت کرو۔

۴۔ ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر سے ۱۳۲ فٹ ہے، اُس کی روشنی ایک جہاز کے مستول کی چوٹی سے جو سطح سمندر سے ۶۶ فٹ بلند ہے عین اُس وقت دکھائی دینے لگی جب کہ جہاز روشنی گھر سے ایک خاص فاصلہ پر تھا، ثابت کرو کہ یہ فاصلہ تقریباً ۲۴ میل ہے۔

۵۔ ایک جہاز کے مستول کی بلندی سطح سمندر سے ۶۶ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے ایک اور جہاز کے مستول کی چوٹی عین ۲۰ میل کے فاصلہ سے دکھائی دینے لگی، ثابت کرو کہ مستولوں کی بلندیاں برابر ہیں۔

۶۔ ایک جہاز کا مستول سطح سمندر سے ۴۴ فٹ اونچا ہے، ایک روشنی گھر کی روشنی عین اس کی چوٹی سے دکھائی دیتی ہے؛ اس کے بعد جہاز ۱۵ منٹ کے لیے کسی خاص سمت میں جاتا ہے اور یہی روشنی تختہ جہاز کی بلندی سے جو سطح سمندر سے ۱۱ فٹ اُوپر ہے دکھائی دینے لگتی ہے، ثابت کرو کہ جہاز کی رفتار تقریباً ۱۶،۳۳ میل فی گھنٹہ ہے۔

۷۔ اگر کسی مشاہدہ کرنے کے مقام کی بلندی ن فٹ ہو تو ثابت کرو کہ وہاں کھڑے ہوکر ایک شخص کی نگاہ دور سے دور تقریباً $\sqrt{\frac{3n}{2}}$ میل دیکھ سکتی ہے۔

۸۔ زمین کے ایک رُبع محیط میں ایک کروڑ میٹر شامل ہیں۔ اگر ایفل برج کی چوٹی ۳۰۰ میٹر اونچی ہو تو معلوم کرو کہ زیادہ سے زیادہ کتنے فاصلہ سے وہ نظر آسکتی ہے۔

۹۔ ایک سیدھی نہر کے کنارے ایک ایک میل کے فاصلہ پر تین انتصابی کھمبے ہیں اور پانی کی سطح سے تینوں کی بلندیاں برابر ہیں، طرفین کے کھمبوں کی چوٹیوں کا خطِ نظری درمیانی کھمبے کو اس کی چوٹی سے ۸ انچ نیچے قطع کرتا ہے، زمین کا نصف قطر قریب ترین میل تک دریافت کرو۔

اٹھارہواں باب

مقلوب مستدیر جملے

۲۳۷۔ اگر جب طہ = ا، جہاں ا مقدار معلوم ہے تو ہم دفعہ ۸۲ سے جانتے ہیں کہ طہ کی ایک معین قیمت نہیں ہو سکتی، اس مساوات سے صرف یہی معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی قیمت زاویوں کے ایک غیر متناہی سلسلہ میں سے کسی ایک زاویہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

علامت "جب$^{-1}$ ا" سے وہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت یا منفی زاویہ تعبیر ہوتا ہے جس کی جیب ا ہو۔

علامت "جب$^{-1}$ ا" کو اس طرح پڑھتے ہیں کہ "جیب منفی ایک ا" اور اس کو بڑی احتیاط سے $\frac{1}{\text{جب ا}}$ سے تمیز کرنا چاہیے، اگر ضرورت ہو تو $\frac{1}{\text{جب ا}}$ کو (جب ا)$^{-1}$ لکھنا چاہیے۔

اس لیے بخوبی یاد رہے کہ "جب$^{-1}$ ا" ایک زاویہ ہے اور یہ علامت تعداداً ایک ایسے چھوٹے سے چھوٹے زاویے کو تعبیر کرتی ہے جس کی جیب ا ہے۔

اور "جم$^{-1}$ ا" سے بھی تعداداً وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ تعبیر ہوگا جس کی جیب التمام ا ہے اور اسی طرح سے "مس$^{-1}$ ا" و "ظم$^{-1}$ ا" و "قم$^{-1}$ ا" و "قط$^{-1}$ ا" و "سہ$^{-1}$ ا" و "سم$^{-1}$ ا" کی

تعریفیں ہوسکتی ہیں۔

لہٰذا زاویے جب$^{-1}$ ؤ اور مس$^{-1}$ ؤ (اور اس لیے قم$^{-1}$ ؤ اور ممم$^{-1}$ ؤ) ہمیشہ -90° اور $+90^\circ$ کے درمیان واقع ہونگے لیکن جم$^{-1}$ ؤ (اور اس لیے قط$^{-1}$ ؤ) ہمیشہ 0° اور 180° کے درمیان واقع ہونگے۔

۲۳۸۔ مقادیر جب$^{-1}$ ؤ، جم$^{-1}$ ؤ، مس$^{-1}$ ؤ، .... کو مقلوب مستدیر جملے کہتے ہیں۔

علامت جب$^{-1}$ ؤ کو اکثر مصنفین نے "توس جب ؤ" لکھا ہے اسی طرح سے "جم$^{-1}$ ؤ" کو "توس جم ؤ" لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح باقی مقلوب نسبتیں بھی لکھی جاسکتی ہیں۔

۲۳۹۔ اگر ؤ مثبت ہو تو زاویہ جب$^{-1}$ ؤ صریحاً صفر اور 90° کے درمیان واقع ہوگا۔ اور اگر ؤ منفی ہو تو یہ -90° اور 0° کے درمیان واقع ہوگا۔

مثال۔ جب$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ $= 30^\circ$، جب$^{-1}$ $\frac{-\sqrt{3}}{2} = -60^\circ$

اگر ؤ مثبت ہو تو دو زاویے ایسے ہونگے (ان میں سے ایک 0° اور 90° کے درمیان واقع ہوگا اور دوسرا -90° اور 0° کے درمیان) جن میں سے ہر ایک کی جیب التمام ؤ ہوگی۔

[مثلاً 30° اور -30° دونوں کی جیوب التمام $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہیں] اس صورت میں ہم چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ لینگے۔ پس اگر ؤ مثبت ہو تو زاویہ جم$^{-1}$ ؤ بھی 0° اور 90° کے درمیان واقع ہوگا۔

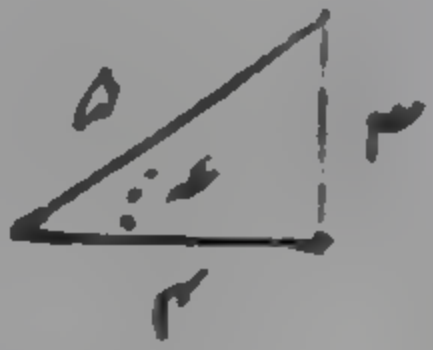
اسی طرح سے اگر ؤ منفی ہو تو جم$^{-1}$ ؤ زاویا 90° اور 180° کے درمیان واقع ہوگا۔

مثال۔ جم$^{-1}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$، جم$^{-1}$ $(-\frac{1}{2}) = 120^\circ$

اگر ا مثبت ہو تو زاویہ مس^{-1} ا ہمیشہ ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگا اور اگر ا منفی ہو تو یہ −۹۰° اور ۰° کے درمیان واقع ہوگا۔

مثال۔ $\text{مس}^{-1}\sqrt{۳} = ۶۰^\circ$ ، $\text{مس}^{-1}(-۱) = -۴۵^\circ$

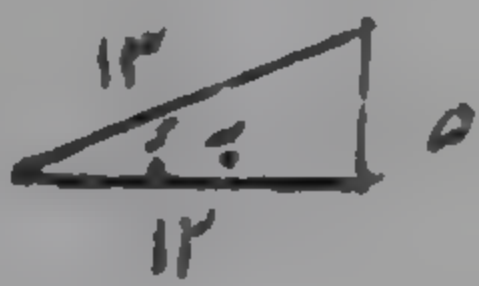
۲۴۰۔ مثال ۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^{-1}\frac{۳}{۵} - \text{جم}^{-1}\frac{۱۲}{۱۳} = \text{جب}^{-1}\frac{۱۶}{۶۵}$$

فرض کرو کہ $\text{جب}^{-1}\frac{۳}{۵} = \text{ع}$ یعنی $\text{جب ع} = \frac{۳}{۵}$

اور اس لیے $\text{جم ع} = \sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$

فرض کرو کہ $\text{جم}^{-1}\frac{۱۲}{۱۳} = \text{ب}$ یعنی $\text{جم ب} = \frac{۱۲}{۱۳}$

اور اس لیے $\text{جب ب} = \sqrt{۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = \frac{۵}{۱۳}$

فرض کرو کہ $\text{جب}^{-1}\frac{۱۶}{۶۵} = \text{ج}$ یعنی $\text{جب ج} = \frac{۱۶}{۶۵}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{ع} - \text{ب} = \text{ج}$$

یعنی ثابت کرنا ہے کہ $\text{جب}(\text{ع} - \text{ب}) = \text{جب ج}$

اب $\text{جب}(\text{ع} - \text{ب}) = \text{جب ع جم ب} - \text{جم ع جب ب}$

$$= \frac{۳}{۵} \times \frac{۱۲}{۱۳} - \frac{۴}{۵} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۳۶ - ۲۰}{۶۵} = \frac{۱۶}{۶۵} = \text{جب ج}$$

اس لیے ربط ثابت ہوا۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۳} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷} = \frac{\pi}{۴}$

فرض کرو کہ مس$^{-۱}\frac{۱}{۳}$ = عہ یعنی مس عہ = $\frac{۱}{۳}$

اور فرض کرو کہ مس$^{-۱}\frac{۱}{۷}$ = بہ یعنی مس بہ = $\frac{۱}{۷}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

۲ عہ + بہ = $\frac{\pi}{۴}$

اب مس ۲ عہ = $\frac{\text{۲ مس عہ}}{\text{۱ - مس}^{۲}\text{ عہ}}$

$= \frac{\frac{۲}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۹}} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$

نیز مس (۲ عہ + بہ) = $\frac{\text{مس ۲ عہ + مس بہ}}{\text{۱ - مس ۲ عہ مس بہ}}$

$= \frac{\frac{۱}{۷} + \frac{۳}{۴}}{۱ - \frac{۱}{۷} \times \frac{۳}{۴}} = \frac{۴ + ۲۱}{۲۸ - ۳} = \frac{۲۵}{۲۵} = ۱ =$ مس $\frac{\pi}{۴}$

$\therefore$ ۲ عہ + بہ = $\frac{\pi}{۴}$

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ

۴ مس$^{-۱}\frac{۱}{۵}$ - مس$^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹}$ = $\frac{\pi}{۴}$

فرض کرو کہ مس$^{-۱}\frac{۱}{۵}$ = عہ یعنی مس عہ = $\frac{۱}{۵}$

تب مس ۲ عہ = $\frac{\text{۲ مس عہ}}{\text{۱ - مس}^{۲}\text{ عہ}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{۱ - \frac{۱}{۲۵}} = \frac{۵}{۱۲}$

اور مس ۴ عہ = $\frac{\frac{۱۰}{۱۲}}{۱ - \frac{۲۵}{۱۴۴}} = \frac{۱۲۰}{۱۱۹}$

یعنی مس ۴ عہ تقریباً ایک کے برابر ہے اور اس لیے ۴ عہ تقریباً $\frac{\pi}{۴}$ ہے۔

فرض کرو کہ $\quad \text{۴ عہ} = \frac{\pi}{\text{۴}} + \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{لا}$

$$\therefore \frac{\text{۱۲۰}}{\text{۱۱۹}} = \text{مس}\left(\frac{\pi}{\text{۴}} + \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{لا}\right) = \frac{\text{۱+لا}}{\text{۱-لا}} \quad (\text{دفعہ ۱۰۰})$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲۳۹}}$$

اس لیے $\quad \text{۴ مس}^{-\text{۱}}\ \frac{\text{۱}}{\text{۵}} - \text{مس}^{-\text{۱}}\ \frac{\text{۱}}{\text{۲۳۹}} = \frac{\pi}{\text{۴}}$

مثال ۴ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{ا} + \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{ب} = \text{مس}^{-\text{۱}}\ \frac{\text{ا+ب}}{\text{۱-اب}}$$

فرض کرو کہ $\text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{ا} = \text{عہ}$ یعنی $\text{مس عہ} = \text{ا}$

فرض کرو کہ $\text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{ب} = \text{بہ}$ یعنی $\text{مس بہ} = \text{ب}$

نیز فرض کرو کہ $\quad \text{مس}^{-\text{۱}}\left(\frac{\text{ا+ب}}{\text{۱-اب}}\right) = \text{جہ}$ یعنی $\text{مس جہ} = \frac{\text{ا+ب}}{\text{۱-اب}}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{عہ} + \text{بہ} = \text{جہ}$$

اب $\quad \text{مس}\ (\text{عہ} + \text{بہ}) = \frac{\text{مس عہ} + \text{مس بہ}}{\text{۱} - \text{مس عہ مس بہ}} = \frac{\text{ا+ب}}{\text{۱-اب}} = \text{مس جہ}$

یعنی ربط ثابت ہوا

تعلق مندرجہ بالا میں صرف ضابطہ

$$\text{مس}\ (\text{لا} + \text{ما}) = \frac{\text{مس لا} + \text{مس ما}}{\text{۱} - \text{مس لا مس لا}} \quad \text{کو}$$

مقلوب طریقِ کتابت کے موافق بیان کیا گیا ہے ۔

کیونکہ فرض کرو کہ $\text{مس لا} = \text{ا}$ یعنی $\text{لا} = \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{ا}$

اور $\quad \text{مس ما} = \text{ب}$ یعنی $\text{ما} = \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{ب}$

تب $$\text{مس}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{۱} - \text{اب}}$$

$$\therefore\ \text{لا} + \text{ما} = \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{۱} - \text{اب}}$$

یعنی $$\text{مس}^{-1}\,\text{ا} + \text{مس}^{-1}\,\text{ب} = \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{۱} - \text{اب}}$$

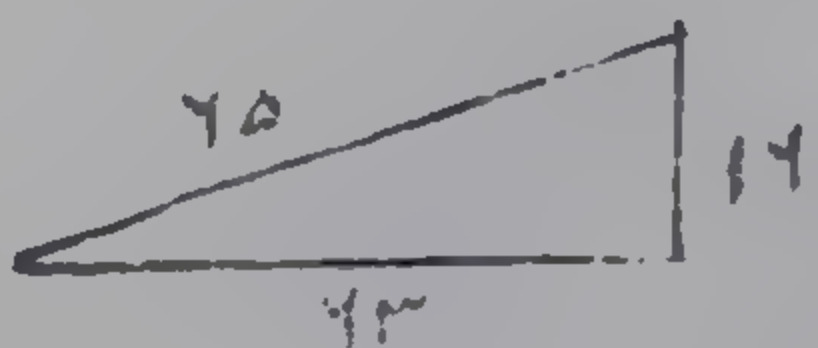
مندرجہ بالا میں ہم نے فرض کرلیا ہے کہ اب < ۱ یعنی $\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{۱}-\text{اب}}$ مثبت ہے اور اس لیے $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{۱}-\text{اب}}$ زوایا ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہے۔

لیکن اگر اب > ۱ تو $\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{۱}-\text{اب}}$ اور اس لیے بموجب ہماری تعریف کے $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{۱}-\text{اب}}$ ایک منفی زاویہ ہے، اس لیے یہاں جہ منفی زاویہ ہے اور چونکہ مس (π + جہ) = مس جہ، اس لیے ضابطہ مطلوبہ یہ ہونا چاہیے

$$\text{مس}^{-1}\,\text{ا} + \text{مس}^{-1}\,\text{ب} = \pi + \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{۱} - \text{اب}}$$

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^{-1}\,\frac{\text{۶۳}}{\text{۶۵}} + \text{۲}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{\text{۱}}{\text{۵}} = \text{جب}^{-1}\,\frac{\text{۳}}{\text{۵}}$$

چونکہ $\text{۶۵}^2 - \text{۶۳}^2 = \text{۱۶}^2$

اس لیے $\text{جم}^{-1}\,\frac{\text{۶۳}}{\text{۶۵}} = \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{۱۶}}{\text{۶۳}}$

نیز بموجب مثال ۱، $\text{جب}^{-1}\,\frac{\text{۳}}{\text{۵}} = \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$

اس لیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{مس}^{-1}\,\frac{\text{۱۶}}{\text{۶۳}} + \text{۲}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{\text{۱}}{\text{۵}} = \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$$

اب $\text{مس}\left[۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵}\right] = \frac{۲\,\text{مس}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵}\right]}{۱-\text{مس}^{۲}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵}\right]} = \frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۲۵}} = \frac{۵}{۱۲}$

یعنی $۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵} = \text{مس}^{-۱}\frac{۵}{۱۲}$

پس $\text{مس}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{۱۶}{۶۳} + ۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵}\right] = \text{مس}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{۱۶}{۶۳} + \text{مس}^{-۱}\frac{۵}{۱۲}\right]$

$$= \frac{\frac{۵}{۱۲}+\frac{۱۶}{۶۳}}{۱-\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱۶}{۶۳}} = \frac{۳۱۵+۱۹۲}{۷۵۶-۸۰} = \frac{۵۰۷}{۶۷۶} = \frac{۳}{۴}$$

یعنی $\text{مس}^{-۱}\frac{۱۶}{۶۳} + ۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵} = \text{مس}^{-۱}\frac{۳}{۴}$

مثال ۶۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱} + \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}} = \text{مس}^{-۱}(-۷)$$

طرفین مساوات کے مماس لینے سے

$$\frac{\text{مس}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right] + \text{مس}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}\right]}{۱-\text{مس}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right]\text{مس}\left[\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}\right]}$$

$$= \text{مس}\left\{\text{مس}^{-۱}(-۷)\right\}$$

$$= -۷$$

یعنی $\frac{\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}}{۱-\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\times\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}} = -۷$

یعنی $\frac{۲\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱}{۱-\text{لا}} = -۷$

یعنی $\text{لا} = ۲$

اگر اس قیمت کو مساوات میں مندرج کریں تو اس کے دائیں طرف کا رکن مثبت ہوتا ہے، اس سے معلوم ہوا کہ درحقیقت لا کی کوئی ایسی قیمت نہیں جو شرائطِ مساوات کو پورا کرے۔

قیمت لا = ۲ مساوات ذیل کو پورا کرتی ہے

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}=\pi+\text{مس}^{-1}(-۷)$$

امثلہ نمبری ۴۳

[طالب علم کو امثلہ ذیل (مثلاً ۱ تا ۴، ۸، ۹، ۱۲، ۱۳) کے نتائج کی تصدیق عمل ترسیمی سے کرنی چاہیے]

ثابت کرو کہ

۱۔ $\text{جب}^{-1}\frac{۳}{۵}+\text{جب}^{-1}\frac{۸}{۱۷}=\text{جب}^{-1}\frac{۷۷}{۸۵}$

۲۔ $\text{جب}^{-1}\frac{۵}{۱۳}+\text{جب}^{-1}\frac{۷}{۲۵}=\text{جم}^{-1}\left(\frac{۲۵۳}{۳۲۵}\right)$

۳۔ $\text{جم}^{-1}\frac{۴}{۵}+\text{مس}^{-1}\frac{۳}{۵}=\text{مس}^{-1}\frac{۲۷}{۱۱}$

۴۔ $\text{جم}^{-1}\frac{۴}{۵}+\text{جم}^{-1}\frac{۱۲}{۱۳}=\text{جم}^{-1}\frac{۳۳}{۶۵}$

۵۔ $\text{جم}^{-1}\text{لا}=۲\,\text{جب}^{-1}\sqrt{\frac{۱-\text{لا}}{۲}}=۲\,\text{جم}^{-1}\sqrt{\frac{۱+\text{لا}}{۲}}$

۶۔ $۲\,\text{جم}^{-1}\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}+\text{مم}^{-1}\frac{۱۶}{۶۳}+\frac{۱}{۲}\text{جم}^{-1}\frac{۷}{۲۵}=\pi$

۷۔ $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲}+\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۳}=\text{جب}^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۵}}+\text{مم}^{-1}۳=۴۵^\circ$

۸۔ $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷}+\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۱۳}=\text{مس}^{-1}\frac{۲}{۹}$

۹۔ $\text{مس}^{-1}\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۲}\text{مس}^{-1}\frac{۱۲}{۵}$

۱۰۔ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{4}+\text{مس}^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\,\text{جم}^{-1}\frac{3}{5}$

۱۱۔ $2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{7}+2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

۱۲۔ $\text{مس}^{-1}\frac{3}{4}+\text{مس}^{-1}\frac{3}{5}-\text{مس}^{-1}\frac{8}{19}=\frac{\pi}{4}$

۱۳۔ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{7}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

۱۴۔ $3\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{4}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{20}=\frac{\pi}{4}-\text{مس}^{-1}\frac{1}{1985}$

۱۵۔ $4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}-\text{مس}^{-1}\frac{1}{70}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$

۱۶۔ $\text{مس}^{-1}\frac{120}{119}=2\,\text{جب}^{-1}\frac{5}{13}$

۱۷۔ $\text{مس}^{-1}\frac{\text{م}}{\text{ن}}-\text{مس}^{-1}\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}=\frac{\pi}{4}$

۱۸۔ $\text{مس}^{-1}\text{ط}+\text{مس}^{-1}\frac{2\text{ط}}{1-\text{ط}^2}=\text{مس}^{-1}\frac{3\text{ط}-\text{ط}^3}{1-3\text{ط}^2}$ (جہاں ط مثبت ہے) اگر $\text{ط}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $>\sqrt{3}$ ، لیکن $=\pi+\text{مس}^{-1}\frac{3\text{ط}-\text{ط}^3}{1-3\text{ط}^2}$ اگر $\text{ط}>\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $<\sqrt{3}$ ۔

۱۹۔ $\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ا}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ب}\,\text{ج}}}+\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ب}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ج}\,\text{ا}}}$

$$+\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ج}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ا}\,\text{ب}}}=\pi$$

۲۰۔ $\text{مم}^{-1}\frac{\text{ا}\,\text{ب}+1}{\text{ا}-\text{ب}}+\text{مم}^{-1}\frac{\text{ب}\,\text{ج}+1}{\text{ب}-\text{ج}}+\text{مم}^{-1}\frac{\text{ج}\,\text{ا}+1}{\text{ج}-\text{ا}}=0$

۲۱۔ $\text{مس}^{-1}\text{ن}+\text{مم}^{-1}(\text{ن}+1)=\text{مس}^{-1}(\text{ن}^2+\text{ن}+1)$

۲۲۔ $\text{جم}\left(۲\,\text{مس}^{-۱}\tfrac{۱}{۷}\right) = \text{جب}\left(۴\,\text{مس}^{-۱}\tfrac{۱}{۳}\right)$

۲۳۔ $۲\,\text{مس}^{-۱}\left[\text{مس}\,(۴۵^\circ - \text{عہ})\,\text{مس}\,\tfrac{\text{ب}}{۲}\right] = \text{جم}^{-۱}\left[\dfrac{\text{جب}\,۲\text{عہ} + \text{جم}\,\text{ب}}{۱ + \text{جب}\,۲\text{عہ}\,.\,\text{جم}\,\text{ب}}\right]$

۲۴۔ $\text{مس}^{-۱}\,\text{لا} = ۲\,\text{مس}^{-۱}\left[\text{قم}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا} - \text{مس}\,\text{مم}^{-۱}\,\text{لا}\right]$

۲۵۔ $۲\,\text{مس}^{-۱}\left[\text{مس}\,\tfrac{\text{عہ}}{۲}\,\text{مس}\left(\tfrac{\pi}{۴} - \tfrac{\text{ب}}{۲}\right)\right] = \text{مس}^{-۱}\,\dfrac{\text{جب}\,\text{عہ}\,.\,\text{جم}\,\text{ب}}{\text{جب}\,\text{ب} + \text{جم}\,\text{عہ}}$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^{-۱}\sqrt{\frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{ا} - \text{ب}}} = \text{جب}^{-۱}\sqrt{\frac{\text{لا} - \text{ب}}{\text{ا} - \text{ب}}} = \text{مم}^{-۱}\sqrt{\frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{ب}}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\,\frac{۲\sqrt{(\text{ا} - \text{لا})(\text{لا} - \text{ب})}}{\text{ا} - \text{ب}}$$

۲۷۔ اگر $\text{جم}^{-۱}\tfrac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{جم}^{-۱}\tfrac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{عہ}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} - \frac{۲\,\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ا}\,\text{ب}}\,\text{جم}\,\text{عہ} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = \text{جب}^۲\,\text{عہ}$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

۲۸۔ $\text{مس}^{-۱}\dfrac{\sqrt{۱ + \text{لا}^۲} - \sqrt{۱ - \text{لا}^۲}}{\sqrt{۱ + \text{لا}^۲} + \sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = \text{ب}$

۲۹۔ $\text{مس}^{-۱}\,۲\text{لا} + \text{مس}^{-۱}\,۳\text{لا} = \dfrac{\pi}{۴}$

۳۰۔ $\text{مس}^{-۱}\dfrac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} - ۲} + \text{مس}^{-۱}\dfrac{\text{لا} + ۱}{\text{لا} + ۲} = \dfrac{\pi}{۴}$

۳۱۔ $\text{مس}^{-۱}(\text{لا} + ۱) + \text{مم}^{-۱}(\text{لا} - ۱) = \text{جب}^{-۱}\dfrac{۴}{۵} + \text{جم}^{-۱}\dfrac{۳}{۵}$

۳۲۔ $\text{مس}^{-۱}(\text{لا} + ۱) + \text{مس}^{-۱}(\text{لا} - ۱) = \text{مس}^{-۱}\dfrac{۸}{۳۱}$

۳۳۔ $۲\,\text{مس}^{-۱}(\text{جم}\,\text{لا}) = \text{مس}^{-۱}(۲\,\text{قم}\,\text{لا})$

۳۴۔ مس$^{-۱}$ لا + ۲ مم$^{-۱}$ لا = $\frac{۲}{۳}$ π

۳۵۔ مس جم$^{-۱}$ لا = جب مم$^{-۱}$ $\frac{۱}{۲}$

۳۶۔ مم$^{-۱}$ لا ۔ مم$^{-۱}$ (لا + ۲) = ۱۵°

۳۷۔ جم$^{-۱}$ $\frac{لا^۲ - ۱}{لا^۲ + ۱}$ + مس$^{-۱}$ $\frac{۲ لا}{لا^۲ - ۱}$ = $\frac{۲π}{۳}$

۳۸۔ مم$^{-۱}$ لا + مم$^{-۱}$ (ن^۲ ۔ لا + ۱) = مم$^{-۱}$ (ن ۔ ۱)

۳۹۔ جب$^{-۱}$ لا + جب$^{-۱}$ ۲ لا = $\frac{π}{۳}$

۴۰۔ جب$^{-۱}$ $\frac{۵}{لا}$ + جب$^{-۱}$ $\frac{۱۲}{لا}$ = $\frac{π}{۲}$

۴۱۔ مس$^{-۱}$ $\frac{ا}{لا}$ + مس$^{-۱}$ $\frac{ب}{لا}$ + مس$^{-۱}$ $\frac{ج}{لا}$ + مس$^{-۱}$ $\frac{د}{لا}$ = $\frac{π}{۲}$

۴۲۔ قط$^{-۱}$ $\frac{لا}{ا}$ ۔ قط$^{-۱}$ $\frac{لا}{ب}$ = قط$^{-۱}$ ب ۔ قط$^{-۱}$ ا

۴۳۔ قم$^{-۱}$ لا = قم$^{-۱}$ ا + قم$^{-۱}$ ب

۴۴۔ ۲ مس$^{-۱}$ لا = جم$^{-۱}$ $\frac{۱ - ا^۲}{۱ + ا^۲}$ ۔ جم$^{-۱}$ $\frac{۱ - ب^۲}{۱ + ب^۲}$

مفصلہ ذیل کی ترسیمات کھینچو :—

۴۵۔ جب$^{-۱}$ لا [انتباہ اگر ما = جب$^{-۱}$ لا تو لا = جب ما اور اس ترسیم کا و ما سے وہی تعلق ہے جو ترسیم دفعہ ۶۲ کا و لا سے ہے]

۴۶۔ جم$^{-۱}$ لا ۔ ۴۷۔ مس$^{-۱}$ لا ۔ ۴۸۔ مم$^{-۱}$ لا

۴۹۔ قم$^{-۱}$ لا ۔ ۵۰۔ قط$^{-۱}$ لا

۵۱۔ مس لا اور ۲ لا کی ترسیمات کھینچو اور ان کے نقاطِ تقاطع دریافت کرنے سے ثابت کرو کہ مساوات مس$^{-۱}$ ۲ لا = لا کے حل کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت تقریباً ۶۷° کے قوسی ناپ کے برابر ہے۔

اُنیسواں باب

چند آسان مثلثی سلسلوں کا بیان

۲۴۱ - اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں ہو تو اُن کی جیبوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویے

عہ، عہ + بہ، عہ + ۲ بہ ...... {عہ + (ن - ۱) بہ} ہیں

نیز فرض کرو کہ

س = جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) ... + جب {عہ + (ن - ۱) بہ}

بموجب دفعہ ۹۷

۲ . جب عہ جب بہ/۲ = جم (عہ - بہ/۲) - جم (عہ + بہ/۲)،

۲ جب (عہ + بہ) جب بہ/۲ = جم (عہ + بہ/۲) - جم (عہ + ۳بہ/۲)،

۲ جب (عہ + ۲ بہ) جب بہ/۲ = جم (عہ + ۳بہ/۲) - جم (عہ + ۵بہ/۲)

. . . .

۲ جب {عہ + (ن - ۲) بہ} جب بہ/۲ = جم {عہ + (ن - ۵/۲) بہ} - جم {عہ + (ن - ۳/۲) بہ}

اور

۲ جب {عہ + (ن - ۱) بہ} جب بہ/۲ = جم {عہ + (ن - ۳/۲) بہ} - جم {عہ + (ن - ۱/۲) بہ}

ان ن سطروں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

$$۲ \text{ جب } \frac{ب}{۲} \times س = \text{جم}\left(ع - \frac{ب}{۲}\right) - \text{جم}\left\{ع + \left(ن - \frac{۱}{۲}\right) ب\right\}$$

بائیں طرف کی باقی رقمیں ایک دوسرے کو ساقط کر دیتی ہیں
اس لیے بموجب دفعہ ۹۴

$$۲ \text{ جب } \frac{ب}{۲} \times س = ۲ \text{ جب}\left\{ع + \left(\frac{ن - ۱}{۲}\right) ب\right\} \text{ جب } \frac{ن ب}{۲}$$

یعنی

$$س = \frac{\text{جب}\left\{ع + \left(\frac{ن - ۱}{۲}\right) ب\right\} \text{ جب } \frac{ن ب}{۲}}{\text{جب } \frac{ب}{۲}}$$

مثال ۔ فرض کرو کہ ب = ۲ ع تب

جب ع + جب ۳ ع + جب ۵ ع + ... + جب (۲ ن - ۱) ع

$$= \frac{\text{جب}\{ع + (ن - ۱) ع\} \text{ جب ن ع}}{\text{جب ع}} = \frac{\text{جب}^{۲} \text{ ن ع}}{\text{جب ع}}$$

۲۴۲ ۔ اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلۂ حسابیہ میں ہو تو اُن کی جیوب التمام کا حاصل جمع دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ زاویے

ع ، ع + ب ، ع + ۲ ب ، .... ع + (ن - ۱) ب ہیں

نیز فرض کرو کہ

$$س = \text{جم } ع + \text{جم}(ع + ب) + \text{جم}(ع + ۲ ب) + ... + \text{جم}\{ع + (ن - ۱) ب\}$$

بموجب دفعہ ۹۷

$$۲ \text{ جم } ع \text{ جب } \frac{ب}{۲} = \text{جب}\left(ع + \frac{ب}{۲}\right) - \text{جب}\left(ع - \frac{ب}{۲}\right)$$

$$۲ \text{ جم}(ع + ب) \text{ جب } \frac{ب}{۲} = \text{جب}\left(ع + \frac{۳ ب}{۲}\right) - \text{جب}\left(ع + \frac{ب}{۲}\right)$$

$$۲ \text{ جم}(ع + ۲ ب) \text{ جب } \frac{ب}{۲} = \text{جب}\left(ع + \frac{۵ ب}{۲}\right) - \text{جب}\left(ع + \frac{۳ ب}{۲}\right)$$

....

۲ جم{عہ + (ن - ۲) بہ} جب بہ/۲ = جب{عہ + (ن - ۳/۲) بہ} - جب{عہ + (ن - ۵/۲) بہ}

اور
۲ جم{عہ + (ن - ۱) بہ} جب بہ/۲ = جب{عہ + (ن - ۱/۲) بہ} - جب{عہ + (ن - ۳/۲) بہ}

ان ن سطروں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا:

۲س × جب بہ/۲ = جب{عہ + (ن - ۱/۲) بہ} - جب{عہ - بہ/۲}

بائیں طرف کی باقی رقمیں ایک دوسرے کو ساقط کر دیتی ہیں

اس لیے بموجب دفعہ ۹۴

۲س × جب بہ/۲ = ۲ جم{عہ + (ن-۱)/۲ بہ} جب ن بہ/۲

یعنی س = جم{عہ + (ن-۱)/۲ بہ} جب (ن بہ/۲) ÷ جب (بہ/۲)

۲۴۳۔ دفعات ۲۴۱ اور ۲۴۲ میں س کی قیمت دریافت کرنے کے دونوں جملے معدوم ہوتے ہیں اگر جب ن بہ/۲ صفر ہو، یعنی اگر زاویہ ن بہ/۲، π کے کسی ضعف کے برابر ہو۔

یعنی جب زاویہ ن بہ/۲ = ع π

جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے۔

یعنی جب زاویہ بہ = ع × ۲π/ن

اس لیے ثابت ہوا کہ اگر ن زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ان کی جیوب (یا جیوب التمام) کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اگر زاویوں کا فرقِ مشترک ۲π/ن کا کوئی ضعف ہو۔

امثلہ۔ جم عہ + جم (عہ + ۲π/ن) + جم (عہ + ۴π/ن) + ... ن رقموں تک =۔

اور جب ع + جب (ع + ۲π/ن) + جب (ع + ۴π/ن) + ... ن رقموں تک = ۰

۳۴۴۔ مثال ۱۔ سلسلہ جب ع ۔ جب (ع + ب) + جب (ع + ۲ب) ۔ .... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۷۳

جب (ع + ب + π) = ۔ جب (ع + ب)

جب (ع + ۲ب + ۲π) = جب (ع + ۲ب)

جب (ع + ۳ب + ۳π) = ۔ جب (ع + ۳ب)

....

اس لیے سلسلہ

= جب ع + جب (ع + ب + π) + جب {ع + ۲ (ب + π)}

+ جب {ع + ۳ (ب + π)} + ...

= [جب {ع + (ن ۔ ۱)/۲ (ب + π)} جب ن (ب + π)/۲] ÷ [جب (ب + π)/۲]　　بموجب دفعہ ۲۴۱

= [جب {ع + (ن ۔ ۱)/۲ (ب + π)} جب ن (ب + π)/۲] ÷ [جم ب/۲]

مثال ۲۔ سلسلہ جم^{۳} ع + جم^{۳} ۲ع + جم^{۳} ۳ع + ... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۱۰۷

جم ۳ع = ۴ جم^{۳} ع ۔ ۳ جم ع

یعنی　۴ جم^{۳} ع = ۳ جم ع + جم ۳ع

اسی طرح سے　۴ جم^{۳} ۲ع = ۳ جم ۲ع + جم ۶ع

۴ جم^{۳} ۳ع = ۳ جم ۳ع + جم ۹ع

....

اس لیے اگر سلسلہ کا حاصل جمع س ہو تو

$$\text{۴س} = (\text{۳ جم ع} + \text{جم ۳ ع}) + (\text{۳ جم ۲ ع} + \text{جم ۶ ع}) + (\text{۳ جم ۳ ع} + \text{جم ۹ ع}) + \cdots$$

$$= \text{۳} (\text{جم ع} + \text{جم ۲ ع} + \text{جم ۳ ع} + \cdots) + (\text{جم ۳ ع} + \text{جم ۶ ع} + \text{جم ۹ ع} + \cdots)$$

$$= \text{۳} \frac{\text{جم} \left\{ \text{ع} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲} \times \text{ع} \right\} \text{جب} \frac{\text{ن ع}}{۲}}{\text{جب} \frac{\text{ع}}{۲}} + \frac{\text{جم} \left\{ \text{۳ ع} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲} \times \text{۳ ع} \right\} \text{جب} \frac{\text{ن} \times \text{۳ ع}}{۲}}{\text{جب} \frac{\text{۳ ع}}{۲}}$$

$$= \text{۳} \frac{\text{جم} \frac{\text{ن} + ۱}{۲} \text{ع جب} \frac{\text{ن ع}}{۲}}{\text{جب} \frac{\text{ع}}{۲}} + \frac{\text{جم} \frac{۳(\text{ن} + ۱)}{۲} \text{ع جب} \frac{\text{۳ ن ع}}{۲}}{\text{جب} \frac{\text{۳ ع}}{۲}}$$

اسی طرح سے اگر زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ان کی جیبوں کے مکعبوں کا مجموعہ معلوم ہوسکتا ہے۔

نتیجۂ صریح ۔ چونکہ

$$\text{۲ جب}^{۲} \text{ع} = ۱ - \text{جم ۲ ع} \quad \text{اور} \quad \text{۲ جم}^{۲} \text{ع} = ۱ + \text{جم ۲ ع}$$

اس لیے جیوب التمام کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت ہوسکتا ہے۔

نیز چونکہ $\text{۸ جب}^{۴} \text{ع} = ۲ \left[۱ - \text{جم ۲ ع} \right]^{۲}$

$$= ۲ - \text{۴ جم ۲ ع} + \text{۲ جم}^{۲} \text{۲ ع} = ۳ - \text{۴ جم ۲ ع} + \text{جم ۴ ع}$$

پس جیبوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ حاصل ہوسکتا ہے۔
اسی طرح سے جیوب التمام کی قوتوں کا مجموعہ بھی حاصل ہوسکتا ہے۔

مثال ۳ ۔ سلسلہ $\text{جم ع جب ب} + \text{جم ۳ ع جب ۲ ب} + \text{جم ۵ ع جب ۳ ب} + \cdots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع س ہے تب

$$\text{۲ س} = \{\text{جب} (\text{ع} + \text{ب}) - \text{جب} (\text{ع} - \text{ب})\} + \{\text{جب} (\text{۳ ع} + \text{۲ ب}) - \text{جب} (\text{۳ ع} - \text{۲ ب})\}$$
$$+ \{\text{جب} (\text{۵ ع} + \text{۳ ب}) - \text{جب} (\text{۵ ع} - \text{۳ ب})\} + \cdots$$

$$= \{\text{جب} (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جب} (\text{۳ ع} + \text{۲ ب}) + \text{جب} (\text{۵ ع} + \text{۳ ب}) + \cdots\cdots \big]$$

$-\{$جب (عہ - بہ) + جب (۳عہ - ۲بہ) + جب (۵عہ - ۳بہ) + ...$\}$

$$= \frac{\text{جب}\left\{(\text{عہ} + \text{بہ}) + \frac{\text{ن} - ۱}{۲}(۲\text{عہ} + \text{بہ})\right\}\text{جب ن}\frac{۲\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}}{\text{جب}\frac{۲\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}}$$

$$- \frac{\text{جب}\left\{(\text{عہ} - \text{بہ}) + \frac{\text{ن} - ۱}{۲}(۲\text{عہ} - \text{بہ})\right\}\text{جب ن}\frac{۲\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}}{\text{جب}\frac{۲\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}}$$ بموجب دفعہ ۲۴۱

$$= \frac{\text{جب}\left\{\text{ن عہ} + \frac{\text{ن} + ۱}{۲}\text{بہ}\right\}\text{جب}\frac{\text{ن}(۲\text{عہ} + \text{بہ})}{۲}}{\text{جب}\frac{۲\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}}$$

$$- \frac{\text{جب}\left\{\text{ن عہ} - \frac{\text{ن} + ۱}{۲}\text{بہ}\right\}\text{جب}\frac{\text{ن}(۲\text{عہ} - \text{بہ})}{۲}}{\text{جب}\frac{۲\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}}$$

مثال ۴۔ ایک ن اضلاع کا منتظم کثیر الاضلاع ا۱ ا۲ .... ان ایک دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے، دائرہ کا مرکز و ہے اگر قوس ان ا۱ پر کوئی نقطہ غ ایسا لیا جائے کہ غ و ا۱ = طہ تو جو خطوط نقطہ غ کو کثیر الاضلاع کے راسوں کے ساتھ وصل کرتے ہیں ان کے طولوں کا مجموعہ دریافت کرو۔

چونکہ زاویوں ا۱ و ا۲، ا۲ و ا۳، ...... ان و ا۱ میں سے ہر ایک $\frac{۲\pi}{\text{ن}}$ کے برابر ہے، اس لیے زاویے غ و ا۱، غ و ا۲ ..... بالترتیب

$$\text{طہ}،\ \text{طہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}،\ \text{طہ} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}، \ldots\ldots \text{ہیں۔}$$

اس لیے اگر ر دائرہ کا نصف قطر ہو تو

$$\text{غ ا}_۱ = ۲\text{ر جب}\frac{\text{غ و ا}_۱}{۲} = ۲\text{ر جب}\frac{\text{طہ}}{۲}$$

ع ا$_1$ = ۲ ر جیب $\frac{ع و ا_1}{۲}$ = ۲ ر جیب ($\frac{ط}{۲}$ + $\frac{π}{ن}$)

ع ا$_2$ = ۲ ر جیب $\frac{ع و ا_2}{۲}$ = ۲ ر جیب ($\frac{ط}{۲}$ + $\frac{۲π}{ن}$)

. . . .

اس لیے مجموعۂ مطلوبہ

= ۲ ر [جیب $\frac{ط}{۲}$ + جیب ($\frac{ط}{۲}$ + $\frac{π}{ن}$) + جیب ($\frac{ط}{۲}$ + $\frac{۲π}{ن}$) + ... ن رقموں تک]

= ۲ ر $\frac{\text{جیب} \left[\frac{ط}{۲} + \frac{ن - ۱}{۲} \frac{π}{ن} \right] \text{جیب} \frac{ن}{۲} \times \frac{π}{ن}}{\text{جیب} \frac{π}{۲ن}}$ (دفعہ ۲۴۱)

= ۲ ر قم $\frac{π}{۲ن}$ × جیب [$\frac{π}{۲}$ + $\frac{ط}{۲}$ − $\frac{π}{۲ن}$]

= ۲ ر قم $\frac{π}{۲ن}$. جم ($\frac{ط}{۲}$ − $\frac{π}{۲ن}$)

امثلہ نمبری ۴۴

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

۱۔ جم ط + جم ۳ ط + جم ۵ ط + ... ن رقموں تک۔

۲۔ جم $\frac{۱}{۲}$ + جم ۲ ا + جم $\frac{۷}{۲}$ ا + ... ن رقموں تک۔

ثابت کرو کہ

۳۔ $\frac{\text{جیب ع + جیب ۲ ع + جیب ۳ ع + . . . + جیب ن ع}}{\text{جم ع + جم ۲ ع + ... + جم ن ع}}$ = مس $\frac{ن + ۱}{۲}$ ع

۴۔ $\frac{\text{جیب ع + جیب ۳ ع + جیب ۵ ع + ... + جیب (۲ن − ۱) ع}}{\text{جم ع + جم ۳ ع + جم ۵ ع + ... + جم (۲ن − ۱) ع}}$ = مس ن ع

۵ ۔ (جب عہ ۔ جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک) / (جم عہ ۔ جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک)

= مس {عہ + (ن ۔ ۱)/۲ (π + بہ)}

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو :۔

۶ ۔ جم π/(۲ن + ۱) + جم ۳π/(۲ن + ۱) + جم ۵π/(۲ن + ۱) + ... ن رقموں تک

۷ ۔ جم عہ ۔ جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) ۔ ..... ۲ن رقموں تک

۸ ۔ جب طہ + جب (ن ۔ ۴)/(ن ۔ ۲) طہ + جب (ن ۔ ۶)/(ن ۔ ۲) طہ + ... ن رقموں تک

۹ ۔ جم لا + جب ۳ لا + جم ۵ لا + جب ۷ لا + ... + جب (۴ ن ۔ ۱) لا

۱۰ ۔ جب عہ جب ۲ عہ + جب ۲ عہ جب ۳ عہ + جب ۳ عہ جب ۴ عہ + ... ن رقموں تک

۱۱ ۔ جم عہ جب ۲ عہ + جب ۲ عہ جم ۳ عہ + جم ۳ عہ جب ۴ عہ
\+ جب ۴ عہ جم ۵ عہ + ... ۲ ن رقموں تک

۱۲ ۔ جب عہ جب ۳ عہ + جب ۲ عہ جب ۴ عہ + جب ۳ عہ جب ۵ عہ + ... ن رقموں تک

۱۳ ۔ جم عہ جم بہ + جم ۳ عہ جم ۲ بہ + جم ۵ عہ جم ۳ بہ + ... ن رقموں تک

۱۴ ۔ جب^{2} عہ + جب^{2} ۲ عہ + جب^{2} ۳ عہ + ... ن رقموں تک

۱۵ ۔ جب^{2} طہ + جب^{2} (طہ + عہ) + جب^{2} (طہ + ۲ عہ) + ... ن رقموں تک

۱۶ ۔ جب^{3} عہ + جب^{3} ۲ عہ + جب^{3} ۳ عہ + ... ن رقموں تک

۱۷ ۔ جب^{4} عہ + جب^{4} ۲ عہ + جب^{4} ۳ عہ + ... ن رقموں تک

۱۸ ۔ جم^{4} عہ + جم^{4} ۲ عہ + جم^{4} ۳ عہ + ... ن رقموں تک

۱۹ ۔ جم طہ جم ۲ طہ جم ۳ طہ + جم ۲ طہ جم ۳ طہ جم ۴ طہ + ... ن رقموں تک

۲۰ ۔ جب عہ جب (عہ + بہ) ۔ جب (عہ + بہ) جب (عہ + ۲ بہ) + .. ۲ ن رقموں تک

۲۱ ۔ سلسلہ جب عہ + جب ۲ عہ + جب ۳ عہ + ... ن رقموں تک
کے مجموعہ سے سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ... + ن کا مجموعہ ہ کو نہایت

قلیل بنانے سے حاصل کرو۔

۲۲۔ سلسلہ ۱ + ۳ + ۵ + ... کے ن رقموں کے مجموعہ کو مثال دفعہ ۱۴۲ کے نتیجہ سے حاصل کرو۔

۲۳۔ اگر عہ = $\frac{۲\pi}{۱۷}$ تو ثابت کرو کہ

۲ (جم عہ + جم ۲ عہ + جم ۴ عہ + جم ۸ عہ)

اور ۲ (جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۶ عہ + جم ۷ عہ)

مساوات $لا^۲$ + لا - ۴ = ۰ کی اصلیں ہیں

۲۴۔ ایک ن اضلاع کا منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ..... ایک دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے، دائرہ کا مرکز د اور نصف قطر ر ہے، اگر کوئی نقطہ ع قوس ا ب پر ایسا لیا جائے کہ ع د ا = ط تو ثابت کرو کہ

ع ا × ع ب + ع ا × ع ج + ع ا × ع د + ... + ع ب × ع ج + ...

$$= ر^۲ \left[۲ جم^۲ \left(\frac{ط}{۲} - \frac{\pi}{۲ن} \right) قم^۲ \frac{\pi}{۲ن} - ن \right]$$

۲۵۔ ن اضلاع کے دو منتظم کثیر الاضلاع ہیں، ان میں سے ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر اور دوسرا باہر بنا ہوا ہے، اگر ایک کثیر الاضلاع کے ایک راس کو دوسرے کثیر الاضلاع کے ہر ایک راس کے ساتھ خطوط کے ذریعہ وصل کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ ان خطوط کے مربعوں کے مجموعہ کو کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے مجموعہ سے نسبت ۲ : جب $\frac{۲\pi}{ن}$ ہوگی۔

۲۶۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے، اس کے زاویوں کے راس $ا_۱$، $ا_۲$ .... $ا_{۲ن+۱}$ ہیں، اگر محیط دائرہ پر کوئی نقطہ و نقاط $ا_۱$ اور $ا_{۲ن+۱}$ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ

$$و ا_۱ + و ا_۳ + ... + و ا_{۲ن+۱} = و ا_۲ + و ا_۴ + ... + و ا_{۲ن}$$

۲۷۔ ایک ن اضلاع کا منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنا ہوا ہے، دائرہ کا نصف قطر ا ہے اگر محیط دائرہ کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ

$\frac{۲}{ن} \sum \left(\frac{ع}{ا} \right)^۲ = ۳$ اور $\frac{۲}{ن} \sum \left(\frac{ع}{ا} \right)^۳ = ۵$ جہاں ع کوئی عمود ہے۔

بیسواں باب

اسقاط

۵۴۲ - اگر ایک مقدارِ مجہول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو ضرور ہے کہ ان مساواتوں کی مستقل مقداروں میں کوئی ربط ہو تاکہ مقدارِ مجہول کی ایک ہی قیمت دونوں کی شرائط کو پورا کرے، مثلاً فرض کرو کہ ایک مقدارِ مجہول لا ذیل کی دو مساواتوں کو پورا کرتی ہے۔

$$\text{ا لا} + \text{ب} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{ج لا}^2 + \text{د لا} + \text{ع} = 0$$

پہلی مساوات سے

$$\text{لا} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

اور لا کی اس قیمت سے دوسری مساوات کی شرائط بھی پوری ہونگی اگر

$$\text{ج}\left(-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^2 + \text{د}\left(-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right) + \text{ع} = 0$$

یعنی اگر $\text{ب}^2\text{ج} - \text{ا ب د} + \text{ا}^2\text{ع} = 0$

یہ مساوات دو مندرجۂ بالا مساواتوں میں سے مقدارِ مجہول لا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لیے اس کو حاصلِ اسقاط کہتے ہیں۔

جب^{۳} طہ = ب اور جم^{۳} طہ = ج کو پورا کرتا ہے۔

جب طہ = ب$^{\frac{۱}{۳}}$ اور جم طہ = ج$^{\frac{۱}{۳}}$

اب طہ کی تمام قیمتوں کے لیے

جب^{۲} طہ + جم^{۲} طہ = ۱

یعنی اس صورت میں ب$^{\frac{۲}{۳}}$ + ج$^{\frac{۲}{۳}}$ = ۱

اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

۲۴۷۔ جب ایک مقدار مجہول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو اصولاً ہم ان مساواتوں سے اُس مقدار کو ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں مگر عملی طور پر بظاہر سادہ سوالات کے حل کرنے میں بھی ذہانت اور حکمت عملی کی ضرورت ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اگر دو مقادیر مجہول کی تین مساواتیں دی ہوئی ہوں تو کم از کم نظری بحث میں ہم اُن مجہول مقداروں کو ان مساواتوں سے ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں

۲۴۸۔ اس جگہ ہم اسقاط کی چند مثالیں دینگے۔

مثال ۱۔ مساواتوں ا جم طہ + ب جب طہ = ج

اور د جم طہ + ع جب طہ = ف سے طہ کو ساقط کرو۔

ضرب چلیپائی یا کسی اور طرح سے مساواتوں کو جم طہ اور جب طہ کے لیے حل کرو۔

$$\frac{\text{جم طہ}}{\text{ب ف - ج ع}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{ج د - ا ف}} = \frac{۱}{\text{ب د - ا ع}}$$

$$\therefore ۱ = \text{جم}^{۲}\,\text{طہ} + \text{جب}^{۲}\,\text{طہ} = \frac{(\text{ب ف - ج ع})^{۲} + (\text{ج د - ا ف})^{۲}}{(\text{ب د - ا ع})^{۲}}$$

یعنی $(\text{ب ف - ج ع})^{۲} + (\text{ج د - ا ف})^{۲} = (\text{ب د - ا ع})^{۲}$

مثال ۲۔ ذیل کی مساواتوں سے طہ کو ساقط کرو

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب طہ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

اور

$$\frac{\text{ا لا جب طہ}}{\text{جم}^2\text{ طہ}} + \frac{\text{ب ما جم طہ}}{\text{جب}^2\text{ طہ}} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

مساوات (۲) سے $\text{ا لا جب}^3\text{ طہ} = -\text{ب ما جم}^3\text{ طہ}$

$$\therefore \frac{\text{جب طہ}}{-(\text{ب ما})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\text{جم طہ}}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{\text{جب}^2\text{ طہ} + \text{جم}^2\text{ طہ}}}{\sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}$$

(دیکھو ٹوڈہنٹر اور لونی کا الجبرا مبتدیوں کے لیے دفعہ ۳۷۱)

$$= \frac{1}{\sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}$$

اس لیے

$$\frac{1}{\text{جب طہ}} = -\frac{\sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}{(\text{ب ما})^{\frac{1}{3}}}$$

اور

$$\frac{1}{\text{جم طہ}} = \frac{\sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}}$$

یعنی مساوات (۱) میں $\frac{1}{\text{جم طہ}}$ اور $\frac{1}{\text{جب طہ}}$ کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$\text{ا}^2 - \text{ب}^2 = \sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}\left[\text{ا لا} \times \frac{1}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}} - \text{ب ما}\left\{-\frac{1}{(\text{ب ما})^{\frac{1}{3}}}\right\}\right]$$

$$= \sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}\left\{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$= \left\{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

(۳) ......

جو طالب علم ہندسہ تحلیلی سے واقف ہے وہ فوراً پہچان لیگا کہ مساوات (۳) قطع ناقص کے عمادوں کے متعلق ایک مشہور مسئلہ کا حل ہے۔

مثال ۳۔ زاویہ طہ کو ذیل کی مساواتوں سے ساقط کرو:—

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ جم طہ − $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جب طہ = جم ۲ طہ .... (۱)

اور $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ جب طہ + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جم طہ = ۲ جب ۲ طہ .... (۲)

مساوات (۱) کو جم طہ سے اور (۲) کو جب طہ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = جم طہ جم ۲ طہ + ۲ جب طہ جب ۲ طہ

= جم طہ + جب طہ جب ۲ طہ = جم طہ + ۲ جب^2 طہ جم طہ ...... (۳)

(۲) کو جم طہ سے اور (۱) کو جب طہ سے ضرب دو اور تفریق کرو تب

$\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ = ۲ جب ۲ طہ جم طہ − جم ۲ طہ جب طہ

= جب ۲ طہ جم طہ + جب طہ = جب طہ + ۲ جب طہ جم^2 طہ ... (۴)

(۳) اور (۴) کو جمع کرنے سے

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ = (جب طہ + جم طہ) [۱ + ۲ جب طہ جم طہ]

= (جب طہ + جم طہ) [جب^2 طہ + جم^2 طہ + ۲ جب طہ جم طہ]

= (جب طہ + جم طہ)^3

پس جب طہ + جم طہ = ($\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$)$^{\frac{1}{3}}$ .... (۵)

(۴) کو (۳) سے تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ − $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ = (جم طہ − جب طہ) (۱ − ۲ جب طہ جم طہ)

= (جم طہ - جب طہ)^۲

یعنی جم طہ - جب طہ = (لا/ا - ما/ب)^(۲/۳) ....(۶)

مساواتوں (۵) اور (۶) کو دوسری قوت پر اٹھانے اور جمع کرنے سے

(لا/ا + ما/ب)^(۲/۳) + (لا/ا - ما/ب)^(۲/۳) = ۲

امثلہ نمبری ۵۴

زاویہ طہ کو مندرجۂ ذیل مساواتوں سے ساقط کرو :-

۱ - ا جم طہ + ب جب طہ = ج اور ب جم طہ - ا جب طہ = د

۲ - لا = ا جم (طہ - عہ) اور ما = ب جم (طہ - بہ)

۳ - ا جم ۲ طہ = ب جب طہ اور ج جب ۲ طہ = د جم طہ

۴ - ا جب عہ - ب جم عہ = ۲ ب جب طہ اور ا جب ۲ عہ - ب جم ۲ طہ = ا

۵ - لا جب طہ - ما جم طہ = √(لا^۲ + ما^۲) اور جب^۲ طہ/ا^۲ + جم^۲ طہ/ب^۲ = ۱/(لا^۲ + ما^۲)

۶ - لا جم طہ/ا + ما جب طہ/ب = ۱

اور لا جب طہ - ما جم طہ = √(ا^۲ جب^۲ طہ + ب^۲ جم^۲ طہ)

۷ - جب طہ - جم طہ = ف

اور قم طہ - جم طہ = ق

۸ - لا = ا جم طہ + ب جم ۲ طہ اور ما = ا جب طہ + ب جب ۲ طہ

۹ - اگر م = قم طہ - جب طہ اور ن = قط طہ - جم طہ

تو ثابت کرو کہ م^(۲/۳) + ن^(۲/۳) = (م ن)^(-۲/۳)

۱۰ - ثابت کرو کہ مساواتوں

لا جم (طہ + عہ) + ما جب (طہ + عہ) = ا جب ۲ طہ

اور　　ما جم (طہ + عہ) ۔ لا جب (طہ + عہ) = ۲ ا جم ۲ طہ

میں سے طہ کا حاصل استفاط (لا جم عہ + ما جب عہ)$^{\frac{2}{3}}$ + (لا جب عہ ۔ ما جم عہ)$^{\frac{2}{3}}$ = (۲ ا)$^{\frac{2}{3}}$ ہے۔

طہ اور فہ کو ذیل کی مساواتوں سے ساقط کرو:۔

۱۱۔ جب طہ + جب فہ = ا، جم طہ + جم فہ = ب، طہ ۔ فہ = ا

۱۲۔ مس طہ + مس فہ = لا، مم طہ + مم فہ = ما، طہ + فہ = ا

۱۳۔ ا جم^{2} طہ + ب جب^{2} طہ = ج، ب جم^{2} فہ + ا جب^{2} فہ = د

اور　ا مس طہ = ب مس فہ

۱۴۔ جم طہ + جم فہ = ا، مم طہ + مم فہ = ب

اور قم طہ + قم فہ = ج

۱۵۔ ا جب طہ = ب جب فہ، ا جم طہ + ب جم فہ = ج

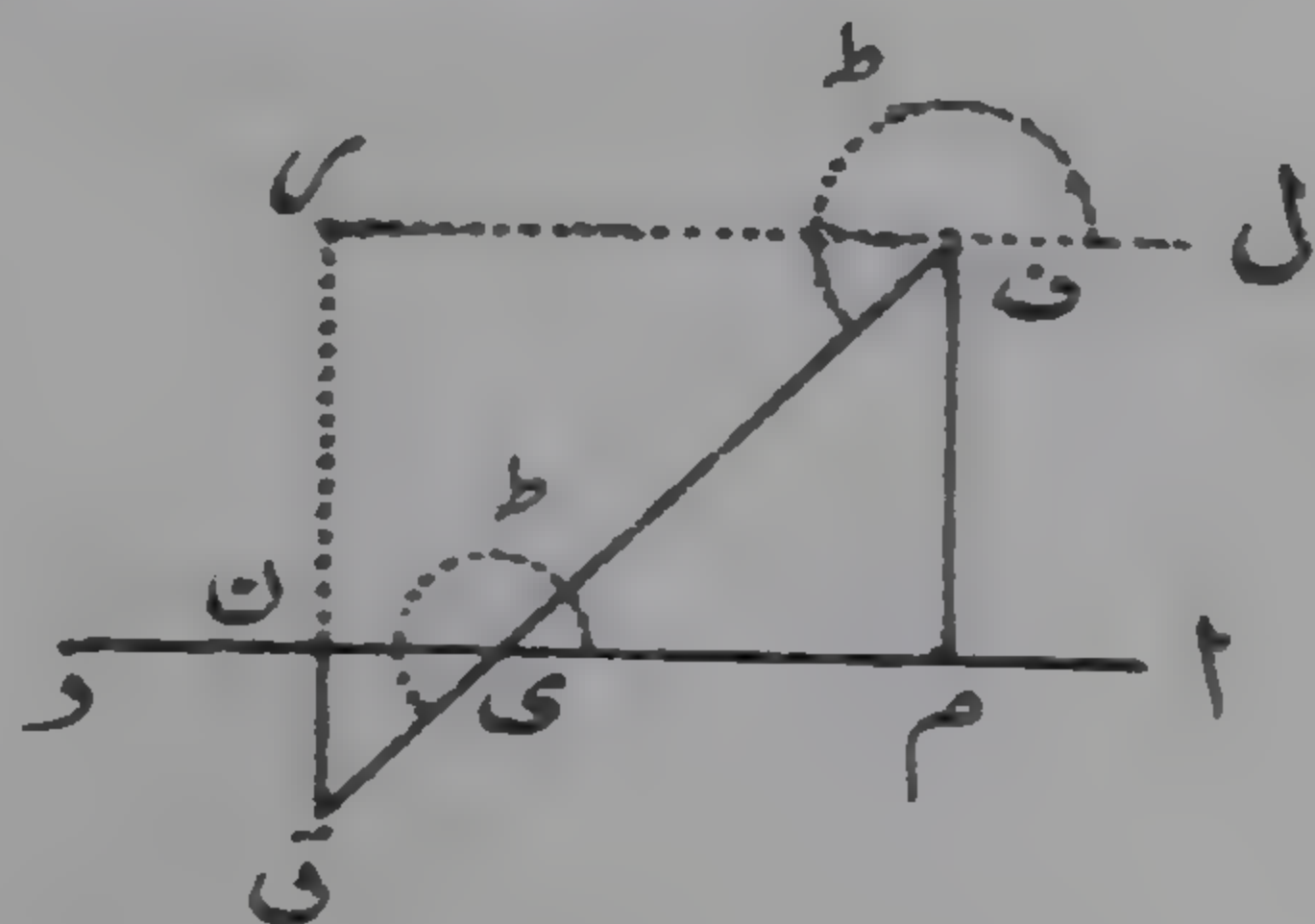
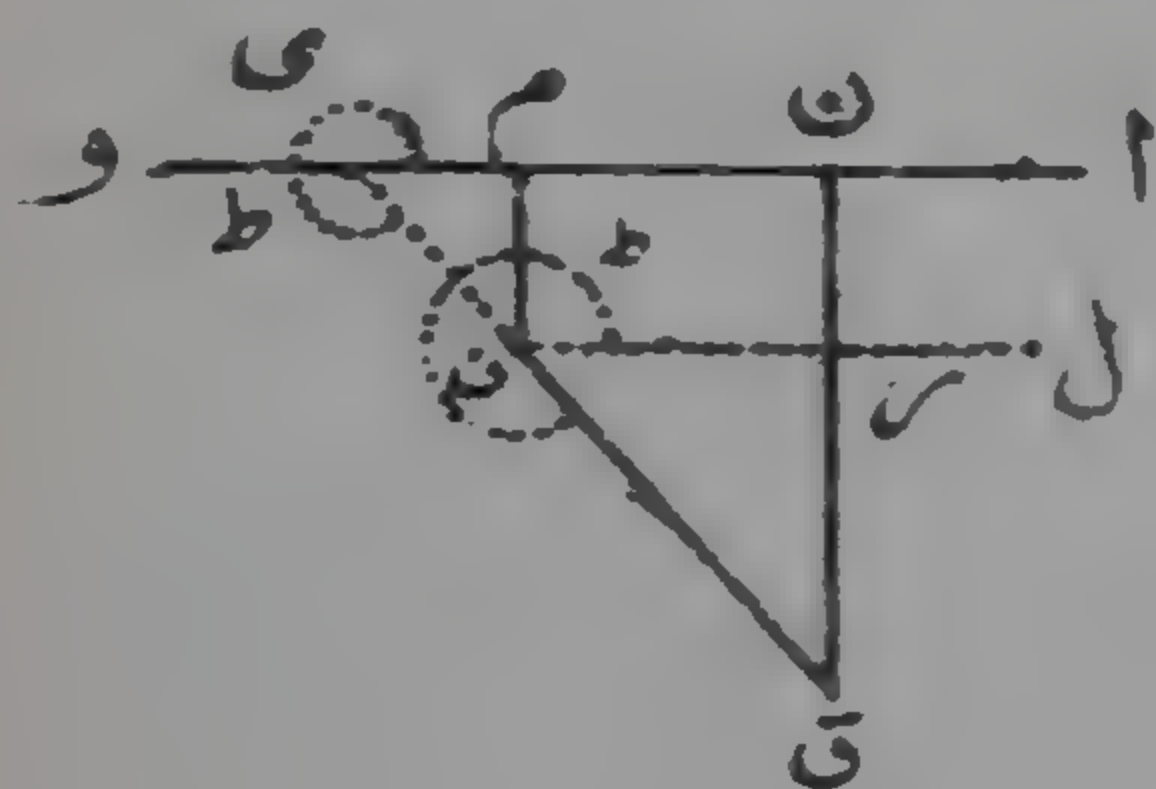
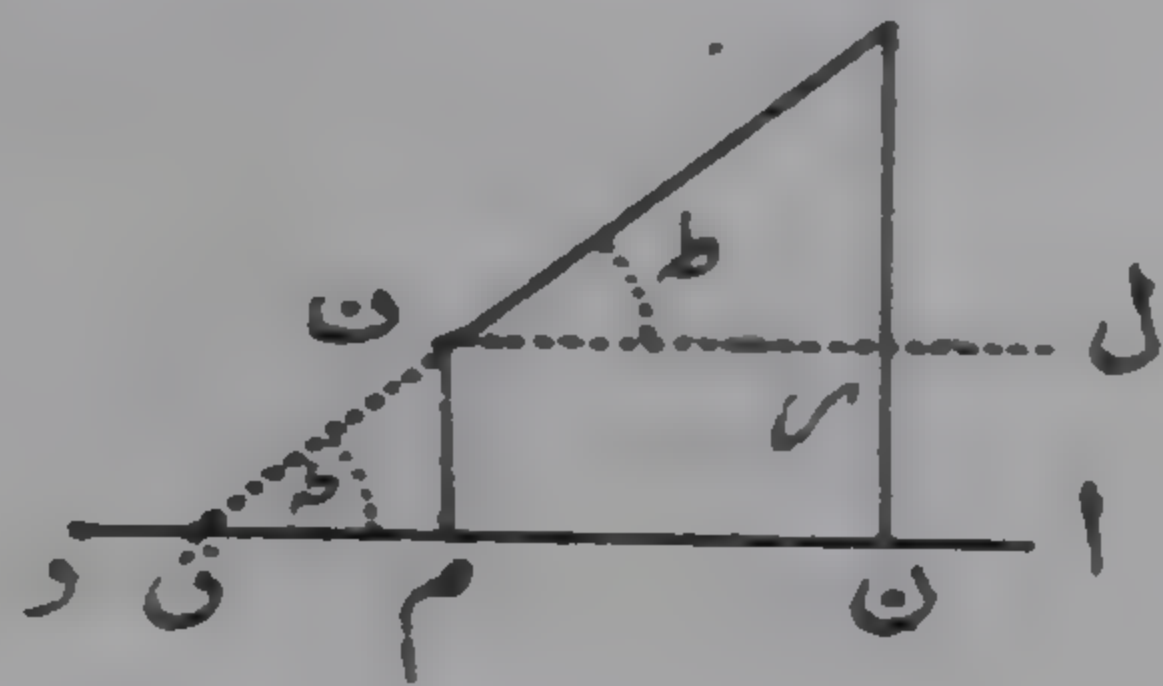
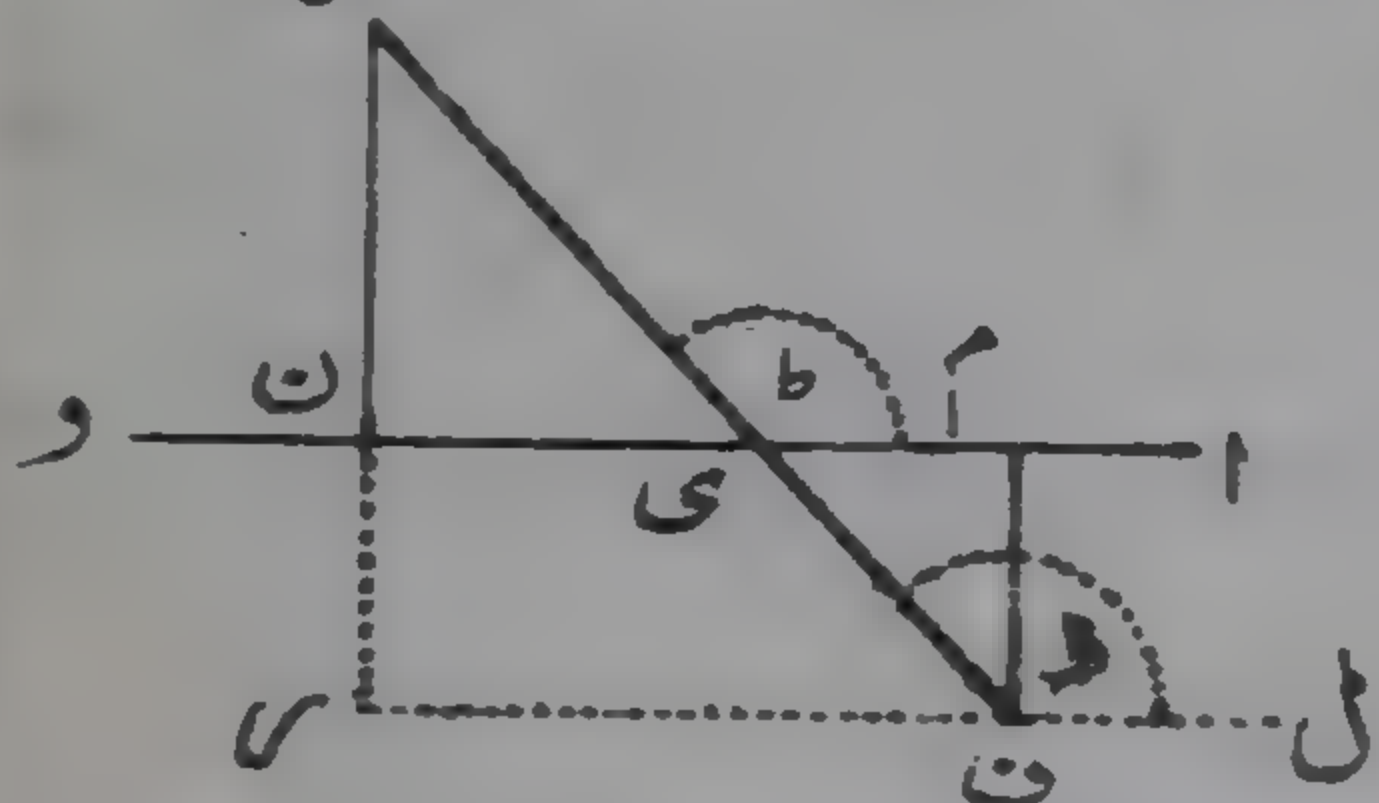
اور لا = ما مس (طہ + فہ)

۱۶۔ (لا/ا) جم طہ + (ما/ب) جب طہ = ۱، (لا/ا) جم فہ + (ما/ب) جب فہ = ۱

اور　ا^{2} جب (طہ/۲) جب (فہ/۲) + ب^{2} جم (طہ/۲) جم (فہ/۲) = ج^{2}

اکیسواں باب

تظلیل

۲۴۹۔ فرض کرو کہ ن ق ایک مستقیم خط ہے اور اس کے سروں ن اور ق سے ایک ثابت مستقیم خط د ا پر عمود نکالے گئے ہیں۔

خط د ا پر م ن کو ن ق کا ظل یا تظلیل کہتے ہیں۔
اگر م ن کی سمت وہی ہو جو د ا کی ہے تو اس کو مثبت کہتے ہیں

اور اگر مخالف ہو تو منفی۔

۲۵۰۔ اگر ایک مستقیم خط ف ق اور ثابت مستقیم خط دا کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ ف ق کا ظل دا پر ف ق جم طہ کے برابر ہے۔

ف ق کی سمت خواہ کچھ ہی ہو نقطہ ف میں سے ایک مستقیم خط ف ل، دا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط (جو بشرط ضرورت خارج کیا جا سکتا ہے) ق ن یا ق ن ممدودہ کو نقطہ ر پر ملتا ہے۔

تب ہر ایک شکل میں زاویہ ل ف ق یا زاویہ ا ی ق، دونوں طہ کے برابر ہیں۔

نیز م ن = ف ر = ف ق جم ل ف ق = ف ق جم طہ

بموجب تعریفات دفعہ ۵۰۔

اسی طرح سے ف ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو دا پر عمود ہو

= ر ق = ف ق جب ل ف ق

= ف ق جب طہ

اس لیے معلوم ہوا کہ خط ف ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو ف ق سے زاویہ طہ بناتا ہو ف ق جم طہ ہے اور اس کا ظل ایک ایسے خط پر جو مذکورۂ بالا خط پر عمود ہو ف ق جب طہ ہے۔

۲۵۱۔ دفعہ ۵۰ میں جیب التمام کی تعریف ہم اس طرح کر سکتے تھے۔ اگر د ع کا ظل خط ابتدائی پر لیا جائے تو جو نسبت اس ظل کو د ع سے ہو اس کو زاویہ طہ کی جیب التمام کہتے ہیں جہاں طہ، د ع اور ابتدائی خط کا درمیانی زاویہ ہے۔ اسی طرح سے اگر د ع کا ظل ایک ایسے خط پر لیا جائے جو ابتدائی خط پر عمود ہو تو جو نسبت اس ظل کو د ع سے ہو اس کو زاویہ طہ

کی جیب کہتے ہیں ۔

جیب اور جیب التمام کی تعریفات کو اس نقطۂ خیال سے دیکھنا بعض اوقات مفید ہوتا ہے ۔

۲۵۲ ۔ اگر ایک ثابت خط و ا پر ف ق کا ظلّ لیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ظلّ ہر ایک ایسے شکستہ (یا غیر مستقیم) خط کے ظلّوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جو ف سے شروع ہو اور ق پر ختم ہو ۔

فرض کرو کہ ف ع پ گ ق ایک شکستہ خط ہے جو ف اور ق کو ملاتا ہے ۔ خط و ا پر عمود ف م ، ق ن ، ع ر ، پ س اور گ ط نکالو ۔

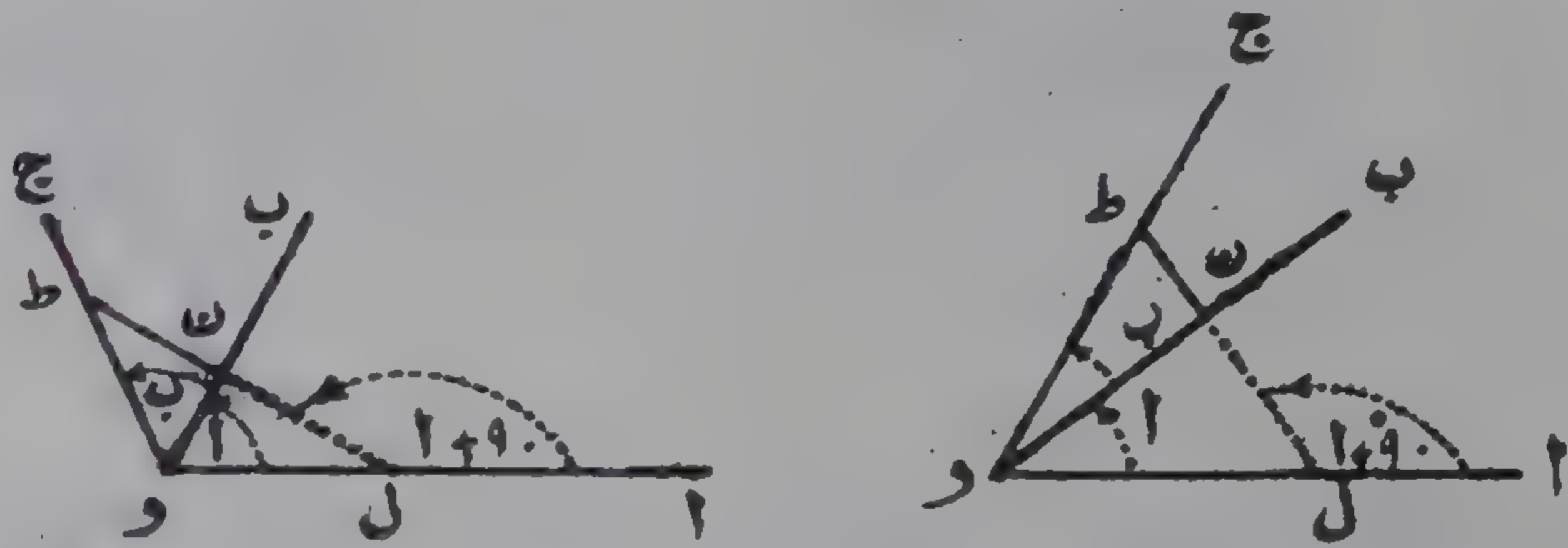
ف ع کا ظلّ م ر ہے اور مثبت ہے
ع پ کا ظلّ ر س ہے اور منفی ہے
پ گ کا ظلّ س ط ہے اور مثبت ہے
گ ق کا ظلّ ط ن ہے اور منفی ہے
شکستہ خط ف ع پ گ ق کے ظلّوں کا مجموعہ
= م ر + ر س + س ط + ط ن
= م ر − س ر + س ط − ن ط
= م س + س ن
= م ن

اسی قسم کا ثبوت تمام صورتوں پر حاوی ہوگا خواہ ف اور ق کہیں واقع ہوں اور شکستہ خط خواہ کتنے مختلف مستقیم خطوں کو ملانے سے بنا ہو۔

نتیجہ صریح ۔ اگر کوئی شکستہ خط نقاط ف اور ق کو ملائے تو اس کے ظلّوں کا مجموعہ اُن دو نقطوں کو ملانے والے کسی اور شکستہ خط کے ظلّوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا کیونکہ ہر ایک صورت میں مجموعہ مذکورہ مستقیم خط ف ق کے ظل کے برابر ہوگا۔

۲۵۳۔ زاویوں کے مسائل جمع تفریق کے ثبوت (بطریق تظلیل)۔

فرض کرو کہ ا و ب زاویہ ا سے اور ب د ج زاویہ ب سے تعبیر ہوتا ہے۔ زاویہ ا + ب کے احاطہ کرنے والے خط د ج پر کوئی نقطہ ط لو اور د ب پر عمود ط ن نکالو اور اس کو اتنا خارج کرو کہ د ا کو نقطہ ل پر ملے۔

تب ∠ ا ل ط = ل ن د + ∠ ا و ب = ۹۰° + ا

(۱) ثابت کرنا مطلوب ہے جم (ا + ب) = جم ا جم ب ۔ جب ا جب ب

چونکہ د ط × جم (ا + ب) = د ط جم ا د ط

= د ط کا ظل خط د ا پر (دفعہ ۲۵۰)

= د ن کا ظل د ا پر + ن ط کا ظل د ا پر (دفعہ ۲۵۲)

= د ن جم ا د ن + ن ط جم ا ل ط (دفعہ ۲۵۰)

= د ط جم ب جم ا + د ط جب ب جم (۹۰° + ا)

= و ط (جم ا جم ب - جب ا جب ب)　　　(دفعہ ۷۰)

اس لیے د ط پر تقسیم کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا۔

(۲) ثابت کرنا مطلوب ہے جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

چونکہ د ط × جب (ا + ب) = و ط × جب ا و ط

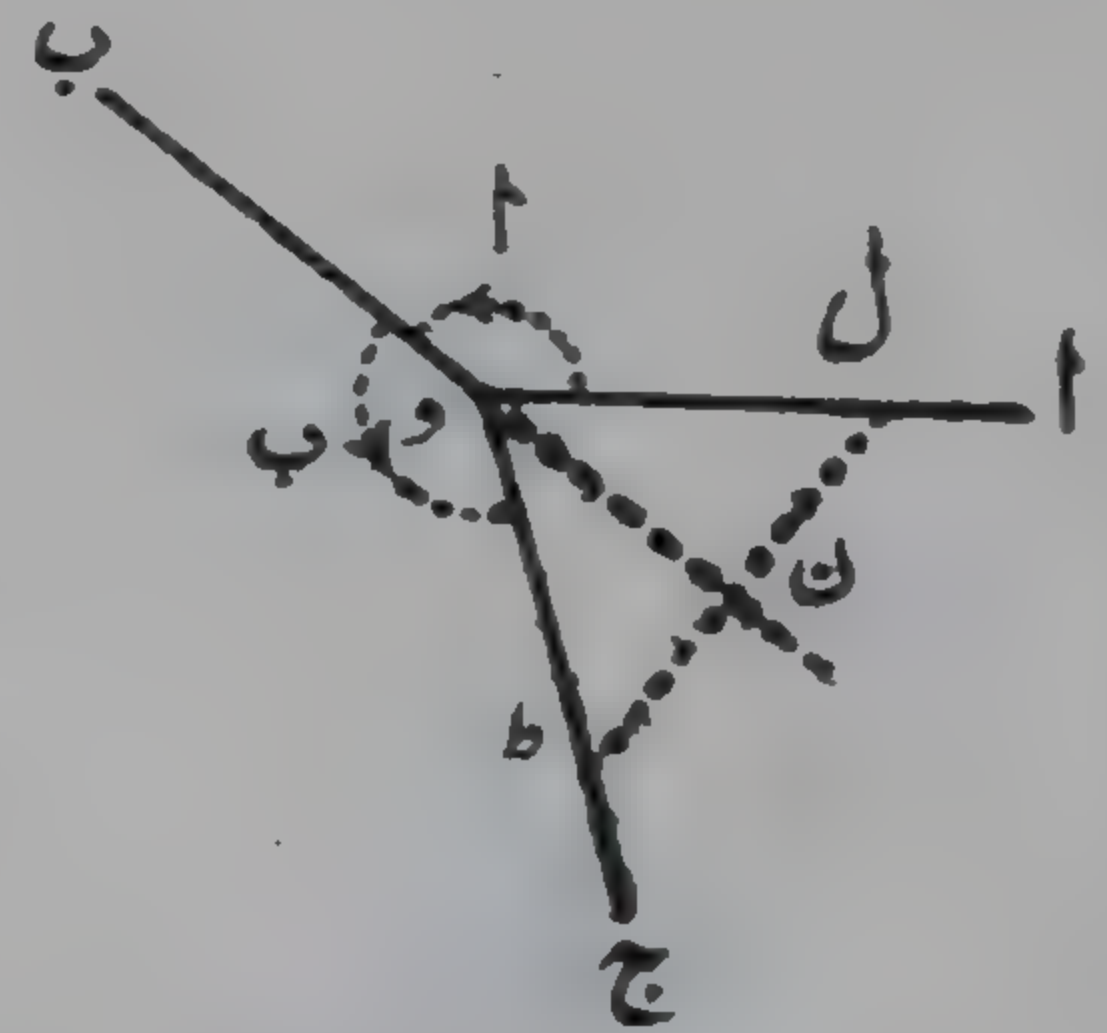
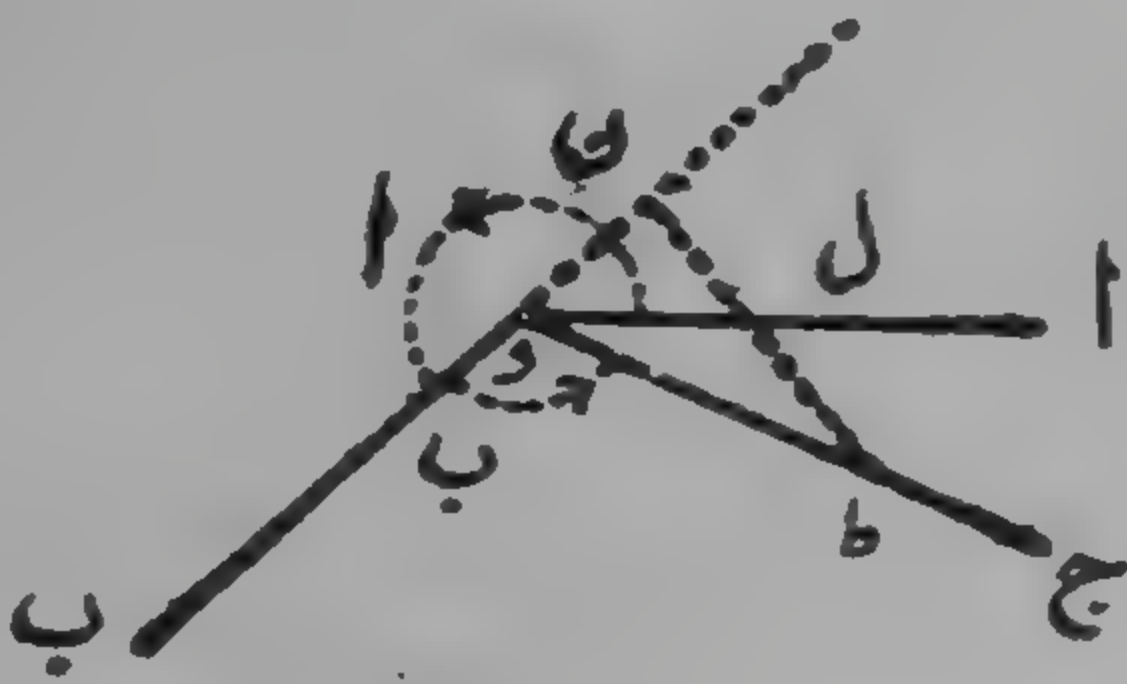
= و ط کا ظل ایک ایسے خط پر جو د ا پر عمود ہو　　　(دفعہ ۲۵۰)

= و ن اور ن ط کے ظلّوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر جو د ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۲)

= و ن جب ا + ن ط جب ا ل ط　　　(دفعہ ۲۵۰)

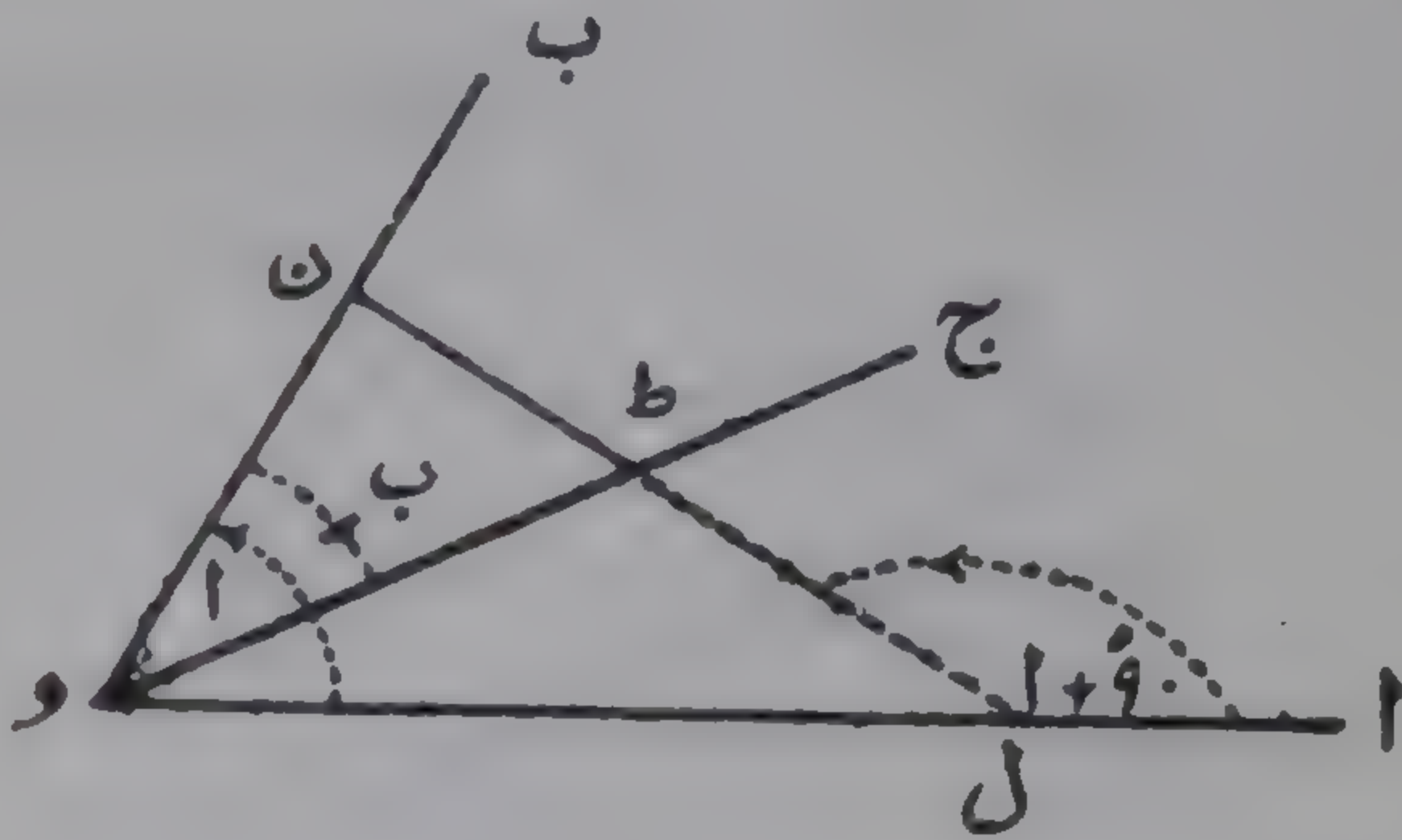
= و ط جم ب جب ا + و ط جب ب جب (۹۰° + ا)　　　(دفعہ ۲۵۰)

= و ط [جب ا جم ب + جم ا جب ب]　　　(دفعہ ۷۰)

اس لیے و ط پر تقسیم کرنے سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

ان شکلوں سے ظاہر ہے کہ اوپر کا ثبوت ہر حالت میں صحیح ہے خواہ احاطہ کرنے والے خطوط د ب اور د ج کسی جگہ واقع ہوں۔

۲۵۴۔ زاویوں کے مسئلہ تفریق کی صورت میں فرض کرو کہ ا و ب زاویہ ا ہے اور ب د ج زاویہ ب ہے جو منفی سمت میں مرتسم کیا گیا ہے یعنی ا د ج زاویہ ا - ب کے برابر ہے، نیز و ج خط و ب سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کے پہلے اگر مناسب علامت لکھی جائے تو وہ - ب کے برابر ہوتا ہے۔

زاویہ مجوزہ کے احاطہ کرنے والے خط و ج پر کوئی نقطہ ط لو اور و ب پر عمود ط ن نکالو اور اس کو اس قدر خارج کرو کہ وہ و ا کو

نقطۂ ل پر ملے۔

(۱) ثابت کرنا مطلوب ہے کہ جم (ا ـ ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

چونکہ وط جم (ا ـ ب) = وط جم ا و ج

= وط کا ظِلّ و ا پر (دفعہ ۲۵۰)

= و ن کا ظِلّ و ا پر + ن ط کا ظِلّ و ا پر (دفعہ ۲۵۲)

= و ن جم ا + ن ط جم (۹۰° + ا) (دفعہ ۲۵۰)

= و ط جم (ـ ب) جم ا + و ط جب (ـ ب) جم (۹۰° + ا) (دفعہ ۲۵۰)

= و ط جم ب جم ا + و ط (ـ جب ب) (ـ جب ا) (دفعات ۶۸، ۷۰)

= و ط [جم ا جم ب + جب ا جب ب]

اس لیے جم (ا ـ ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

(۲) ثابت کرنا مطلوب ہے جب (ا ـ ب) = جب ا جم ب ـ جم ا جب ب

چونکہ وط جب (ا ـ ب) = وط × جب ا و ج

= وط کا ظِلّ ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۰)

= و ن اور ن ط کے ظِلّوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۲)

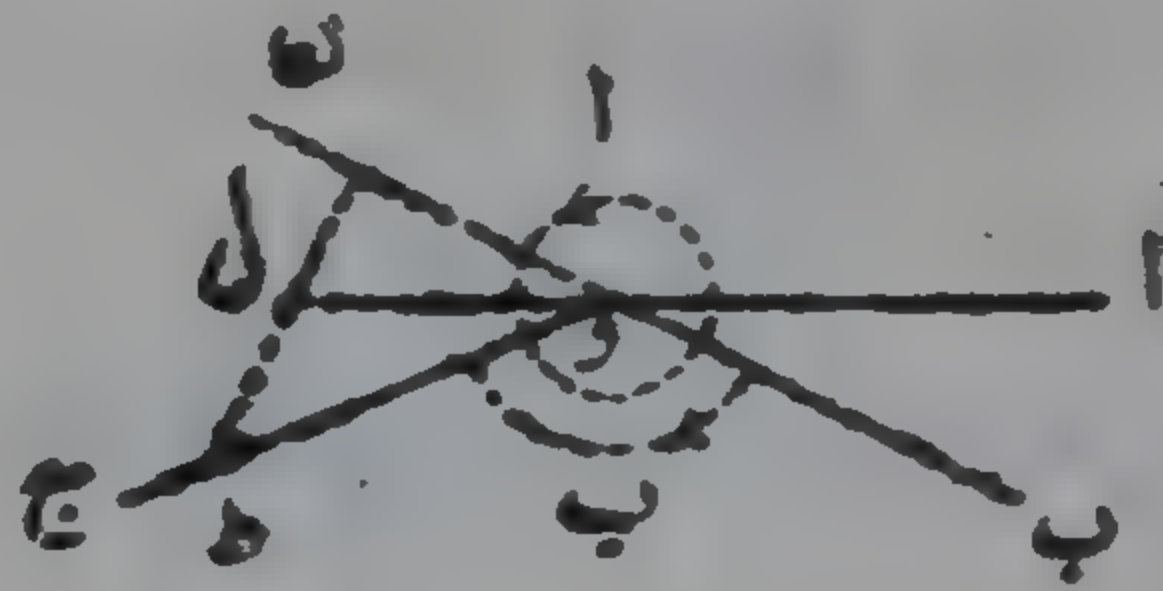
= و ن جب ا + ن ط جب (۹۰° + ا) (دفعہ ۲۵۰)

= و ط جم (ـ ب) جب ا + و ط جب (ـ ب) جب (۹۰° + ا) (دفعہ ۲۵۰)

= و ط جم ب جب ا ـ و ط جب ب جم ا (دفعات ۶۸، ۷۰)

∴ جب (ا ـ ب) = جب ا جم ب ـ جم ا جب ب

اور یہ ثبوت ہر حالت میں درست ہیں، خواہ احاطہ کرنے والے

ن
ا
ل ا
ج ط ب ب

خطوط و ب اور و ج کسی جگہ پر واقع ہوں جیسے کہ شکل بالا میں۔

متفرق مثالیں

۱۔ اگر ایک زاویہ ع کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کیا جائے جن کے مماسوں کی نسبت لہ ہو تو ثابت کرو کہ حصوں کا تفاوت لامساوات جب لا = $\frac{\text{لہ} - ۱}{\text{لہ} + ۱}$ جب ع سے حاصل ہوگا۔

۲۔ اگر مس (π جم ط) = مم (π جب ط) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\text{ط} - \frac{\pi}{۴}\right) = \pm \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

۳۔ کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} - \text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} + \text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}$$

اور

$$\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ج}} = \frac{۱ + \text{مس}\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}{۱ - \text{مس}\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}$$

اس میں ا، ب، ج مثلث کے زاویے ہیں اور ا، ب، ج مثلث کے اضلاع ہیں۔

۴۔ ایک ہوائی جہاز ۱۸۰ میل فی گھنٹہ کی مستقل رفتار سے زمین سے ایک مستقل بلندی پر مشرق کی طرف جارہا تھا۔ کسی خاص وقت پر ایک شخص نے اُس کو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا، اس وقت اس کا زاویہ ارتفاع ۹° ۳۰' تھا، اس کے ایک منٹ بعد اس نے جہاز کو ایسی سمت میں دیکھا جو شمال سے مشرق کی طرف کو ۶۲° کا زاویہ بناتی تھی۔ جہاز کی بلندی دریافت کرو۔

مساوات لا = ن + $\frac{(-۱)^{ن}}{ن\,\pi}$ سے حاصل ہوتی ہیں، اس میں ن کوئی بڑی مقدار ہے۔

۱۸۶۔ ثابت کرو کہ مساوات مس لا = ۲ لا کی اصل جو صفر اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہے تقریباً ۱۶۵ء۱ ہے، معلوم ہے مس ۱۵۹ء۱ = ۲ء۲۴۶۰ اور مس ۱۶۹۴ء۱ = ۲ء۳۵۵۹۔

۱۸۷۔ اگر ط کوئی حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط ہمیشہ ط} + \frac{ط^{۳}}{۳} + \frac{ط^{۵}}{۱۵} + \cdots\cdots + \frac{ط^{۲ن+۱}}{۴ن - ۱} + \cdots\cdots\cdots$$

سے بڑا ہوگا۔

۱۸۸۔ اگر ا، ب، عہ، بہ مستقل مقداریں ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{جم}(۲ط - عہ) + ا\,\text{جم}(ط - بہ) + ب = ۰$$

کی اصلوں کے چار مختلف جٹ ہیں اور اگر ان مختلف جٹوں کی کسی چار قیمتوں کو $ط_{۱}$، $ط_{۲}$، $ط_{۳}$، $ط_{۴}$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ط_{۱} + ط_{۲} + ط_{۳} + ط_{۴} - ۲\,عہ،$$

π کا جفت ضعف ہے۔

۱۸۹۔ اگر مساوات

$$\text{جم}(ط + عہ) + \text{جم}(ط + بہ) + \text{جم}(ط + جہ)$$
$$= \text{قم}(ط + عہ) + \text{قم}(ط + بہ) + \text{قم}(ط + جہ)$$

$ط_{۱}$، $ط_{۲}$، $ط_{۳}$ سے پوری ہو جن میں سے کسی دو کا فرق ۲ قائموں کے ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ط_{۱} + ط_{۲} + ط_{۳} + عہ + بہ + جہ$$

۲ π کے کسی ضعف کے برابر ہوگا۔

۱۹۰۔ ثابت کرو کہ بالعموم مساوات

$$ا\,\text{جب}^{۳}\,لا + ب\,\text{جم}^{۳}\,لا + ج = ۰$$

کی چھ مختلف اصلیں ہیں جن میں سے کسی دو کا تفاوت ۲π کے برابر نہیں ہو سکتا، نیز ثابت کرو کہ اُن کے مجموعہ کا مماس $-\frac{\text{ب}}{\text{ہ}}$ ہے۔

۱۹۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{مس}\,(\text{ط} - \text{ع}) + \text{قط}\,(\text{ط} - \text{بہ}) = \text{مم جہ}$$

کی چار اصلیں ایسی ہیں (جن میں سے کسی دو کا فرق ۲π کے اضعاف کے برابر نہیں) جو ربطِ ذیل کو پورا کرتی ہیں۔

$$\text{ط}_{۱} + \text{ط}_{۲} + \text{ط}_{۳} + \text{ط}_{۴} = ۲\,(\text{ن}\,\pi + \text{ع} + \text{بہ} - \text{جہ})$$

۱۹۲۔ اگر لا کی تین قیمتیں ع، بہ، جہ مساوات

$$\text{جب}\ ۲\text{ط}\ (\text{ا جب لا} + \text{ب جم لا}) = \text{جب}\ ۲\text{لا}\ (\text{ا جب ط} + \text{ب جم ط})$$

کو پورا کریں اور ان میں سے کسی دو کا باہمی فرق یا ان میں سے کسی ایک اور ط کا فرق ۲π کے کسی ضعف سے تعبیر نہ ہو سکے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{\text{ع}}{۲}\ \text{مس}\,\frac{\text{ب}}{۲}\ \text{مس}\,\frac{\text{ج}}{۲}\ \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{۲} + ۱ = ۰$$

۱۹۳۔ اگر مساوات $\text{ا جم}\ ۲\text{ط} + \text{ب جب}\ ۲\text{ط} + \text{ج جم ط} + \text{د} = ۰$
کی مختلف اصلیں $\text{ط}_{۱}$، $\text{ط}_{۲}$، $\text{ط}_{۳}$، $\text{ط}_{۴}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{جب}\ \frac{\text{ط}_{۲} + \text{ط}_{۳} + \text{ط}_{۴} - \text{ط}_{۱}}{۲} = ۰$$

۱۹۴۔ ربطِ ذیل کو ثابت کرو

$$\text{جم}^{-۱}\,\text{لا} = \frac{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}{\text{لا}_{۱} \times \text{لا}_{۲} \times \text{لا}_{۳} \ldots\ \infty\ \text{تک}}$$

جہاں متواتر مقداریں لا، $\text{لا}_{۱}$، $\text{لا}_{۲}$، …… $\text{لا}_{\text{ر}}$ ربطِ ذیل سے منسلک ہیں

$$\text{لا}_{\text{ر}+۱} = \sqrt{\frac{۱}{۲}\,(۱ + \text{لا}_{\text{ر}})}$$

۱۹۵۔ اگر ا اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر

$$\text{ا}_{۱} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲}،\quad \text{ب}_{۱} = \sqrt{\text{ا}_{۱}\,\text{ب}}،\quad \text{ا}_{۲} = \frac{\text{ا}_{۱} + \text{ب}_{۱}}{۲}،$$

$$\text{ب}_{۲} = \sqrt{\text{ا}_{۲}\,\text{ب}_{۱}}$$ اور علی ہذا القیاس

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}_{\infty} = \text{ب}_{\infty} = \frac{\sqrt{\text{ب}^{۲} - \text{ا}^{۲}}}{\text{جم}^{-۱}\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}$$

اس سے ثابت کرو کہ π کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

۱۹۶- اگر مساوات

$$\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{جب لا} + \text{ا}_{۳}\,\text{جم لا} + \text{ا}_{۴}\,\text{جب ۲لا} + \text{ا}_{۵}\,\text{جم ۲لا} = ۰$$

لا کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہو جہاں مستقل مقداروں $\text{ا}_{۱}$، $\text{ا}_{۲}$...... میں لا شامل نہیں ہے، تو ثابت کرو کہ ان مستقل مقداروں میں سے ہر ایک صفر کے برابر ہو گی۔

علم مثلث

جوابات

امثلہ ۱ (صفحہ ۵)

۱- ۲/۳ ۲- ۳۰۱/۳۶۰ ۳- ۴۵۵۶۹/۶۴۸۰۰

۴- ۱ ۹/۲۰ ۵- ۲ ۳۶۶۱/۱۰۸۰۰ ۶- ۴ ۳۸۸/۳۳۷۵

۷- ۳۴گ ۳۳` ۳۳،۳" ۸- ۹۰گ

۹- ۱۵۳گ ۸۸` ۸۸،۸" ۱۰- ۳۹گ ۷۶` ۳۸،۸"

۱۱- ۲۶۱گ ۴۴` ۴۴،۴" ۱۲- ۵۲۸گ ۳` ۳۳،۳"

۱۳- ۱ ۱/۵ قائمے، ۱۰۸°

۱۴- ،۴۵۳۵۲۴ قائمے، ۴۰° ۴۹` ۱،۷۷۶"

۱۵- ،۳۹۴۵۳۶ قائمے، ۳۵° ۳۰` ۲۹،۶۶۶۴"

۱۶- ۲،۵۵۰۸۰۹ قائمے، ۲۲۹° ۳۴` ۲۲،۱۱۶"

۱۷- ۷،۵۹۰۰۰۵ قائمے، ۶۸۳° ۶` ۱،۶۲"

۲۸- ۵° ۳۳` ۲۰"، ۶۶° ۴۰`، ۲۹- ۴۷ ۷/۱۹°، ۴۲ ۱۲/۱۹°

۳۱- ۳۳°، ۲۰'؛ ۱۰°، ۴۸'

امثلہ ۲ (صفحہ ۱۱)

۱- ۲۵۱۳۲٫۷۴ میل تقریباً

۲- ۱۹٫۲۸ میل تقریباً فی گھنٹہ

۳- ۱۲٫۸۵ میل تقریباً

۴- ۳٫۱۴۱۵۹..... انچ

۵- ۵۸۱۱۹۴۶۴۰ میل تقریباً

۶- ۱۳٫۹۹۴ میل تقریباً

امثلہ ۳ (صفحہ ۱۵)

۱- ۹۰° ‏ ۲- ۲۴۰° ‏ ۳- ۱۸۰۰°

۴- ۵۷° ۱۷' ۴۴٫۸" ‏ ۵- ۲۵۸° ۲۱' ۵۸٫۴"

۶- ۱۶[illegible] گ ‏ ۷- ۲۳۳ گ ۳۳` ۳۳٫۳``

۸- ۲۰۰۰ گ ‏ ۹- $\frac{\pi}{۳}$ ‏ ۱۰- $\frac{۴۲۱}{۳۶۰}\pi$

۱۱- $\frac{۷۰۳}{۷۲۰}\pi$ ‏ ۱۲- $\frac{۳۵۵۷}{۱۳۵۰۰}\pi$

۱۳- $\frac{۷۹}{۳۶}\pi$ ‏ ۱۴- $\frac{۳\pi}{۱۰}$

۱۵- $\frac{۱۱۰۳}{۲۰۰۰}\pi$ ‏ ۱۶- π ۱٫۷۲۶۲۶۸

۱۷- ۸۱°، ۹° ‏ ۱۸- ۲۴°، ۶۰°، ۹۶°

۱۹- ۱۳۲° ۱۵' ۱۲٫۶" ‏ ۲۰- ۳۰°، ۶۰°، ۹۰°

۲۱- $\frac{۱}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۳\pi}{۳}$ − $\frac{۱}{۲}$ نیم قطری

۲۲- (۱) $\frac{۳\pi}{۵}$ ، ۱۰۸° (۲) $\frac{۵\pi}{۷}$ ، $۱۲۸\frac{۴}{۷}$°

(۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ، ۱۳۵° (۴) $\frac{۵\pi}{۶}$ ، ۱۵۰° (۵) $\frac{۱۵\pi}{۱۶}$ ، $۱۵۸\frac{۱۴}{۱۶}$°

۲۳- ۱۸ اور ۴　　۲۴- ۱۰ اور ۸

۲۵- ۱۶ اور ۸　　۲۶- $\frac{\pi}{۳}$

۲۷- (۱) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ق = ۷۵° = $۸۳\frac{۱}{۳}$ گ

(۲) $\frac{۷\pi}{۱۸}$ ق = ۷۰° = $۷۷\frac{۷}{۹}$ گ

(۳) $\frac{۵\pi}{۸}$ ق = $۱۱۲\frac{۱}{۲}$° = ۱۲۵ گ

۲۸- (۱) ۴ بج کر $۷\frac{۷}{۱۱}$ اور ۳۶ منٹ پر

(۲) ۷ بج کر $۲۸\frac{۴}{۱۱}$ اور ۴۸ منٹ پر

امثلہ ۴ (صفحہ ۴۰)

[فرض کرو کہ π = ۳٫۱۴۱۵۹..... اور $\frac{۱}{\pi}$ = ۰٫۳۱۸۳۱]

۱- ۲۰٫۴۵۴° تقریباً　　۲- $\frac{۳}{۵}$ نیم قطری، ۳۴° ۲۲′ ۳۸٫۹″

۳- ۶۸٫۷۵ انچ تقریباً　　۴- ۵۰٫۵۲۳۶ انچ تقریباً

۵- ۲۴٫۵۵۵ انچ تقریباً　　۶- ۱° ۲۵′ ۷٫۵″ تقریباً

۷- ۳۹۵۹٫۷۸ میل تقریباً　　۸- π فٹ = ۳٫۱۴۱۵۹ فٹ

۹- ۵ : ۴　　۱۰- ۳٫۱۴۱۶

۱۱- $\frac{۴\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۹\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۱۴\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۱۹\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۲۴\pi}{۳۵}$ نیم قطری

۱۲- ۶۵° ۲۴′ ۳۰٫۴″

۱۳- ۲۰۶۲٫۹۵ فٹ تقریباً

۱۴- ۱۱٫۵۳۵۹ فٹ تقریباً

۱۵- ۲۶۲٫۶ فٹ تقریباً

۱۶- ۳۲۱۴۲٫۹ فٹ تقریباً

۱۷- ۳۸۱۹۷٫۲ فٹ تقریباً

۱۸- ۱۹٫۰۹۹

۱۹- ۱۱۰۵٫۸ میل

۲۰- ۲۳۸۸۳۳ میل

۲۱- ′۲۱۶۰۰ ، ۵٫۵ × ۶ تقریباً

۲۲- ۴۸۸×۱۰^{۱۱} میل

امثلہ ۶ (صفحہ ۳۶)

۵- $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ، $\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$ ، وغیرہ

۶- $\frac{۱۲}{۵}$ ، $\frac{۸}{۱۳}$

۷- $\frac{۱۱}{۶۰}$ ، $\frac{۶۰}{۶۱}$ ، $\frac{۶۱}{۶۰}$

۸- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۳}$

۹- $\frac{۴۰}{۹}$ ، $\frac{۴۱}{۴۰}$

۱۰- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۵}{۳}$

۱۱- $\frac{۳}{۴}$

۱۲- $\frac{۱۵}{۱۷}$ ، $\frac{۱۷}{۸}$

۱۳- $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}\sqrt{۵}$

۱۴- ۱ یا $\frac{۳}{۵}$

۱۵- $\frac{۳}{۵}$ یا $\frac{۵}{۱۳}$

۱۶- $\frac{۵}{۱۳}$

۱۷- $\frac{۱۲}{۱۳}$

۱۸- $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ یا ۱

۱۹- $\frac{۱}{۲}$

۲۰- $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲۱- $۱ + \sqrt{۲}$

۲۲- $\frac{۲ل(ل+۱)}{۲ل^{۲}+۲ل+۱}$ ، $\frac{۲ل+۱}{۲ل^{۲}+۲ل+۱}$

امثلہ ۸ (صفحہ ۵۰)

۱- ...... ۳۴ء۶۴ فٹ، ۲۰ فٹ

۲- ۱۶۰ فٹ

۳- ۲۲۵ فٹ

۴- ۱۳۶ء۶ فٹ

۵- ...... ۱۴۶ء۴ فٹ

۶- ..... ۳۶۷ء۹ گز، ..... ۴۵۴ء۳ گز

۷- ...... ۸۶ء۶ فٹ

۸- ..... ۱۱۵ء۳۵۹ فٹ

۹- ...... ۸۷ء۸۴۶ فٹ

۱۰- ...... ۴۳ء۳ فٹ، ایک ستون سے ۷ء۵ فٹ کے فاصلہ پر

۱۱- ...... ۹۴ء۶۴۱ فٹ، ..... ۵۴ء۶۴۱ فٹ

۱۲- ..... ۱ء۳۶۶ میل

۱۳- ۳۰°

۱۵- ۱۳ء۸۵۶۴ میل فی گھنٹہ

۱۶- ..... ۲۵ء۹۸ فٹ، ...... ۷۰ء۹۸ فٹ، ..... ۸۵ء۹۸ فٹ

۱۷- ۳۲ √۵ = ... ۷۱ء۵۵ فٹ

۱۹- ۱۰ میل فی گھنٹہ

۲۰- ..... ۸۶ء۶ گز

۲۱- ..... ۶۹۲ء۸ گز

امثلہ ۹ (صفحہ ۶۰)

۱- $\frac{۲۲۵۰}{۶۲۸۹}\pi$، $\frac{۲۵۰۰}{۶۲۸۹}\pi$ اور $\frac{۸۱}{۳۳۱}\pi$ نیم قطری

۲- ۶۸° ۴۵′ ۱۷ء۸″

۴- $\frac{\text{۲اب}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}$ ، $\frac{\text{۲اب}}{\text{ا}^{۲}-\text{ب}^{۲}}$

۸- $\frac{۱}{\text{سس}^{۲}\text{ا}}$ - سس^۲ا ۹- ط = ۶۰°

۱۰- ۱/۲ اسنٹ میں

امثلہ ۱۰ (صفحہ ۸۳)

۴- ...... ۳۶۶ء، ۲ء۳۰۹۴

۵- ...... ۱ء۳۶۶، - ۲ء۳۰۹۴

۶- ۲°۰ ۷- ...... ۱ء۳۱۴۲، - ۲

۸- ...... ۱ء۳۶۶، - ۲ء۳۰۹۴

۹- ۴۵° اور ۱۳۵° ۱۰- ۱۲۰° اور ۲۴۰°

۱۱- ۱۳۵° اور ۳۱۵° ۱۲- ۱۵۰° اور ۳۳۰°

۱۳- ۱۵۰° اور ۲۱۰° ۱۴- ۲۱۰° اور ۳۳۰°

۱۵- — جم ۲۵° ۱۶- جب ۶°

۱۷- -سس ۴۳° ۱۸- جب ۱۲°

۱۹- جب ۱۷° ۲۰- — مم ۲۴°

۲۱- جم ۳۳° ۲۲- — جم ۲۸°

۲۳- مم ۲۵° ۲۴- جم ۳۰°

۲۵- مم ۲۶° ۲۶- -قم ۲۳°

۲۷ - تم ۳۶°　　　۲۸ - منفی

۲۹ - منفی　　　۳۰ - مثبت

۳۱ - صفر　　　۳۲ - مثبت

۳۳ - مثبت　　　۳۴ - مثبت

۳۵ - منفی

۳۶ - $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور $-\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ ، $\frac{-۱}{\sqrt{۳}}$ اور $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$

امثلہ ۱۱ (صفحہ ۹۲)

۱ - $ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۶}$　　　۲ - $ن\pi - (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۳}$

۳ - $ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۴}$　　　۴ - $۲ن\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۵ - $۲ن\pi \pm \frac{\pi}{۶}$　　　۶ - $۲ن\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$

۷ - $ن\pi + \frac{\pi}{۳}$　　　۸ - $ن\pi + \frac{۳\pi}{۴}$

۹ - $ن\pi + \frac{\pi}{۴}$　　　۱۰ - $۲ن\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۱۱ $ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۳}$　　　۱۲ - $ن\pi \pm \frac{\pi}{۲}$

۱۳ - $ن\pi \pm \frac{\pi}{۳}$　　　۱۴ - $ن\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۵ - $ن\pi \pm \frac{\pi}{۳}$　　　۱۶ - $ن\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۱۷ - $ن\pi \pm \frac{\pi}{۶}$　　　۱۸ - $(۲ن + ۱)\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۹ - $۲ن\pi - \frac{\pi}{۶}$

۳۰- ۱۰۵° اور ۴۵°، $\pi\left(ن+\frac{م}{۲}\right)\pm\frac{\pi}{۶}+(-۱)^{م}\frac{\pi}{۱۲}$ اور

$\pi\left(ن-\frac{م}{۲}\right)\mp\frac{\pi}{۶}+(-۱)^{م}\frac{\pi}{۱۲}$ جہاں م اور ن

کوئی صحیح عدد ہیں۔

۲۱- ۱۸۷½° اور ۱۴۲½°

$\pi\left(ن+\frac{م}{۲}\right)+\frac{\pi}{۸}\pm\frac{\pi}{۱۲}$ اور $\pi\left(ن-\frac{م}{۲}\right)-\frac{\pi}{۸}\pm\frac{\pi}{۱۲}$

۲۲- (۱) ۶۰° اور ۱۲۰°، (۲) ۱۲۰° اور ۲۴۰°، (۳) ۳۰°

اور ۲۱۰°

۲۳- (۱) ۲، (۲) ۱، (۳) ۱، (۴) ۱، (۵) ۱

امثلہ ۱۲ (صفحہ ۹۵)

۱- $ن\pi+(-۱)^{ن}\frac{\pi}{۶}$

۲- $۲ن\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۳- $ن\pi+(-۱)^{ن}\frac{\pi}{۲}$

۴- جم ط = $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۵- $ن\pi+(-۱)^{ن}\frac{\pi}{۱۰}$ یا $ن\pi-(-۱)^{ن}\frac{۳\pi}{۱۰}$ (دفعہ ۱۲۰)

۶- ط = $۲ن\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۷- ط = $ن\pi+\frac{\pi}{۴}$ یا $ن\pi+\frac{\pi}{۳}$

۸- ط = $ن\pi+\frac{۲\pi}{۳}$ یا $ن\pi+\frac{۵\pi}{۶}$

۹- مس ط = $\frac{۱}{ا}$ یا $-\frac{۱}{ب}$

۱۰- ط = $ن\pi\pm\frac{\pi}{۴}$

۱۱- ط = $۲ن\pi$ یا $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$

۱۲- $ن\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۱۳- $ن\pi$ یا $۲ن\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۱۴- $۲ن\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ یا $۲ن\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۵- جب ط $= ۱$ یا $-\frac{۱}{۳}$

۱۶- $\frac{\pi ن}{۵} + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۲۰}$　　۱۷- $\frac{\pi ن}{۴}$ یا $\frac{\pi(۲ن+۱)}{۱۰}$

۱۸- $۲ن\pi$ یا $\frac{\pi(۲ن+۱)}{۵}$　　۱۹- $\frac{۲ر\pi}{م-ن}$ یا $\frac{۲ر\pi}{م+ن}$

۲۰- $\frac{\pi}{۵}(۲ن+\frac{۱}{۲})$ یا $۲ن\pi - \frac{\pi}{۲}$

۲۱- $۲ن\pi$ یا $\frac{۲ن\pi}{۹}$

۲۲- $\frac{\pi}{م+ن}(۲ر+\frac{۱}{۲})$ یا $\frac{\pi}{م-ن}(۲ر-\frac{۱}{۲})$

۲۳- $\frac{\pi}{۹}(ن+\frac{۱}{۲})$　　۲۴- $\frac{\pi}{ن+۱}(م+\frac{۱}{۲})$

۲۵- $\frac{\pi ن}{۴} \pm \sqrt{۱+\frac{\pi^{۲}ن^{۲}}{۱۶}}$　　۲۶- $\pi ن \pm \frac{\pi}{۶}$

۲۷- $\frac{\pi}{۳}(ن+\frac{۱}{۲}) \pm \frac{ع}{۳}$　　۲۸- $\frac{\pi}{۴}(ن+\frac{۱}{۲})$

۲۹- $\frac{\pi ن}{۳} \pm \frac{ع}{۳}$　　۳۰- $\pi ن \pm \frac{\pi}{۶}$

۳۱- $\frac{\pi}{م-ن}(ر+\frac{۱}{۲})$

۳۲- مس ط $= \frac{۲ن+۱ \pm \sqrt{۴ن^{۲}+۴ن-۱۵}}{۴}$ جہاں $ن > ۱$ یا < -۲

۳۳- ط $= \pi(م+\frac{ن}{۲}) \pm \frac{\pi}{۶} + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۱۲}$

ع $= \pi(م-\frac{ن}{۲}) \pm \frac{\pi}{۴} - (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۱۲}$

۳۴- $\frac{۱}{۵}\left[\pi(۶م-۴ن) \pm \frac{\pi}{۲} \mp \frac{۳\pi}{۳}\right]$ اور

$\frac{۱}{۵}\left[\pi(۶ن-۴م) \pm \pi \mp \frac{\pi}{۳}\right]$

۳۵- ۵۴° اور ۹۰° ۳۶- $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۵}{۴}$

۳۷- $\pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$ ، $\pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$

امثلہ ۱۳ (صفحہ ۱۰۳)

۱- $-\frac{۱۳۳}{۲۰۵}$ ، $-\frac{۸۴}{۲۰۵}$ ۲- $\frac{۱۵۹۶}{۳۴۴۵}$ ، $\frac{۳۴۴۴}{۳۴۴۵}$

۳- $\frac{۲۲۰}{۲۲۱}$ ، $\frac{۱۷۱}{۲۲۱}$ ، $\frac{۲۲۰}{۲۱}$

امثلہ ۱۴ (صفحہ ۱۰۸)

۳۰ - ۲ جب (طہ + ن فہ) جب $\frac{۳ فہ}{۲}$

۳۱ - ۲ جب (طہ + ن فہ) جم $\frac{فہ}{۲}$

امثلہ ۱۵ (صفحہ ۱۱۲)

۱- جم ۲ طہ - جم ۱۲ طہ ۲- جب ۱۲ طہ - جب ۲ طہ

۳- جم ۱۴ طہ + جم ۸ طہ ۴- جم ۱۲° - جم ۱۲۰°

امثلہ ۱۶ (صفحہ ۱۱۶)

۱- ۳، $\frac{۹}{۱۳}$ ۳- ۱

امثلہ ۱۷ (صفحہ ۱۲۴)

۱- (۱) $\pm \frac{۲۴}{۲۵}$ (۲) $\pm \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$ (۳) $\frac{۲۰۱۶}{۴۲۲۵}$

۲- (۱) $\frac{۱۶۱}{۲۸۹}$ (۲) $-\frac{۷}{۲۵}$ (۳) $\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$

۳- و

امثلہ ۱۸ (صفحہ ۱۳۰)

۱- $\frac{\pm ۲\sqrt{۲} \pm \sqrt{۳}}{۶}$ ، $\frac{\pm ۷\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۲}}{۱۸}$

۲- $\pm \frac{۱۳}{۱۲}$ ، $\pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ یا $\pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ ، $\frac{۱۶۹}{۱۲۰}$

۳- $\frac{۱۶}{۳۰۵}$ ، $\frac{۴۹}{۳۰۵}$ ۴- $\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}$

۵- $\pm \frac{۱}{۳}$ ، $\pm \frac{۳}{۴}$ ۶- $\pm \frac{۳}{۴}$

۷- $\frac{\sqrt{۴ - \sqrt{۲} - \sqrt{۶}}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\frac{\sqrt{۴ + \sqrt{۲} + \sqrt{۶}}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\sqrt{۲} - ۱$ ،

$-(۱ + \sqrt{۲}) + \sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$

۸- $\sqrt{\frac{\text{م} - \text{ل}^{۲} - \text{ب}^{۲}}{\text{ل}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}$ ۲۳- + اور −

۲۴- − اور −   ۲۵- − اور −

۲۹- (۱) $۲\text{ن}\pi + \frac{\pi}{۴}$ اور $۲\text{ن}\pi + \frac{۳\pi}{۴}$

(۲) $۲\text{ن}\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲\text{ن}\pi + \frac{۵\pi}{۴}$

(۳) $۲\text{ن}\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $۲\text{ن}\pi + \frac{\pi}{۴}$

(۴) $۲\text{ن}\pi + \frac{\pi}{۴}$ اور $۲\text{ن}\pi + \frac{۳\pi}{۴}$

۳۰- (۱) $۲\text{ن}\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $۲\text{ن}\pi + \frac{\pi}{۴}$

(۲) $۲\text{ن}\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲\text{ن}\pi + \frac{۵\pi}{۴}$

(۳) ۲ن π + $\frac{\pi ۵}{۴}$ اور ۲ن π + $\frac{\pi ۷}{۴}$

امثلہ ۱۹ (صفحہ ۱۴۷)

۱۲- زاویہ کی جیب ۲ جب ۱۸° کے برابر ہے۔

۱۳- $\frac{\pi ن}{۸}$ یا (۲ن ± $\frac{۱}{۳}$) $\frac{\pi}{۸}$

امثلہ ۲۱ (صفحہ ۱۶۳)

۱- $\frac{\pi ن}{۴}$ یا $\frac{۱}{۲}$ (۲ن π ± $\frac{\pi}{۳}$)

۲- (ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۴}$ یا (۲ن ± $\frac{۱}{۳}$) $\frac{\pi}{۳}$

۳ (ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۲}$ یا ۲ن π

۴- (ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۲}$ یا ن π + $(-۱)^{ن}$ $\frac{\pi}{۶}$

۵- $\frac{۲ن \pi}{۳}$ یا (ن + $\frac{۱}{۴}$) π یا (۲ن - $\frac{۱}{۲}$) π

۶- $\frac{\pi ن}{۳}$ یا (۲ن ± $\frac{۱}{۳}$) $\frac{\pi}{۴}$

۷- (ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۲}$ یا ۲ن π ± $\frac{\pi ۲}{۳}$

۸- ن $\frac{\pi}{۲}$ یا (ن ± $\frac{۱}{۳}$) π

۹- ۲ن π یا ($\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۲ن}{۳}$) π

۱۰- نπ + $(-۱)^{ن}$ $\frac{\pi}{۶}$ یا ن π + $(-۱)^{ن}$ $\frac{\pi}{۱۰}$ یا نπ - $(-۱)^{ن}$ $\frac{\pi ۳}{۱۰}$

۱۱- (ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۸}$ یا (ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۲}$

۱۲- م π یا $\frac{۱}{ن-۱}$ [م π - $(-۱)^{م}$ $\frac{\pi}{۶}$]

۱۳- $۲م\pi$ یا $\frac{۴م\pi}{ن\pm۱}$

۱۴- $\frac{۲ر\pi}{م+ن}$ یا $(۲ر+۱)\frac{\pi}{م-ن}$

۱۵- $(۲ر+۱)\frac{\pi}{م\pm ن}$

۱۶- $م\pi$ یا $\frac{م\pi}{ن-۱}$ یا $(م+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{ن}$

۱۷- $۲ن\pi-\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{۱}{۵}(۲ن\pi-\frac{\pi}{۲})$

۱۸- $ن\pi+(-۱)^{ن}\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}$ ۱۹- $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$

۲۰- $ن\pi+\frac{\pi}{۶}+(-۱)^{ن}\frac{\pi}{۴}$ ۲۱- $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}\pm۱$

۲۲- $۲۱^\circ ۴۸' + ن\times۱۸۰^\circ+(-۱)^{ن}[۶۸^\circ ۱۲']$

۲۳- $۲ن\times۱۸۰^\circ+۷۸^\circ ۵۸'$ ، $۲ن\times۱۸۰^\circ+۲۷^\circ ۱۸'$

۲۴- $ن\times۱۸۰^\circ+۴۵^\circ$ ، $ن\times۱۸۰^\circ+۲۶^\circ ۳۴'$

۲۵- $۲ن\pi+\frac{۲\pi}{۳}$ ۲۶- $۲ن\pi$ یا $۲ن\pi+\frac{\pi}{۲}$

۲۷- $۲ن\pi+\frac{\pi}{۲}$ یا $۲ن\pi-\frac{\pi}{۳}$

۲۸- $۲ن\pi+\frac{\pi}{۶}$

۲۹- $\text{ن}\,\pi$

۳۰- $\text{جب ط} = \frac{\pm\sqrt{۱۷}-۱}{۸}$

۳۱- $\text{جم ط} = \frac{\sqrt{۱۷}-۳}{۴}$

۳۲- $\text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ یا $\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{۲}$

۳۳- $۲\text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{۳}$، $۲\text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۳۴- $\left(\text{ن} + \frac{۱}{۴}\right)\frac{\pi}{۲}$

۳۵- $\text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۳۶- $\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{۴}$

۳۷- $\text{ط} = \frac{\text{ن}\,\pi}{۲}$ یا $\text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ نیز $\text{ط} = \text{ن}\,\pi \pm \frac{\text{ع}}{۲}$ جہاں $\text{جم ع} = \frac{۱}{۳}$

۳۸- $\left(\text{ن} + \frac{۱}{۳}\right)\frac{\pi}{۳}$

۳۹- $\text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

امثلہ ۲۳ (صفحہ ۱۸۵)

۱- $\bar{۱}$٫۹۰۳۰۹، $\bar{۳}$٫۴۷۷۱۲۱۳، $\bar{۲}$٫۰۳۳۴۲۳۹، $\bar{۱}$٫۴۶۵۰۳۸۹

۲- ۱٫۱۵۵۳۳۶۱، ۲٫۱۲۲۱۶۸۱، ٫۵۳۸۸۳۳۰،
$\bar{۱}$٫۰۷۵۹۶۲۳

۳- ۲، $\bar{۲}$، ۰، $\bar{۴}$، $\bar{۲}$، ۰، ۳   ۴- ٫۳۱۲۹۳۶

۵- ۱٫۳۴۲۰۵۷، ۵٫۸۸۴۵۳، ٫۴۶۱۷۹۱

۶- (۱) ۲۱ (۲) ۱۳ (۳) ۳۰ (۴) ساتواں (۵) ۲۱ واں
(۶) ۳۲ واں

۷- (۱) $\frac{۴\text{ب}}{\text{ا} - \text{ب} - \text{ج}}$ (۲) $\frac{\text{ا} + ۲\text{ب}}{۴\text{ج} - ۳\text{ب} - ۲\text{ا}}$

(۳) $\frac{۴\text{ا} + ۷\text{ب}}{\text{ا} + ۳\text{ب} - ۲\text{ج}}$ (۴) $\frac{۲\text{ب}\,(۲\text{ا} - \text{ب})}{۵\text{اب} + ۳\text{اج} - ۲\text{ب}^۲ - \text{بج}}$

اور

$$\frac{۲\,اب}{۵\,اب + ۳\,اج - ۲\,ب^{۲} - ب\,ج}$$

جہاں ا = لوک ۲، ب = لوک ۳ اور ج = لوک ۷

۸- ۲٫۲۲۲۲۱ ۹- ۸٫۶۶۴۱۵ ۱۰- ۹٫۶۱۹۲

۱۱- ۱٫۶۲۸۹ ۱۲- ۴٫۷۱۶۲ ۱۳- ۵٫۴۱۴۳۱

امثلہ ۲۴ (صفحہ ۱۹۸)

۱- ۴٫۵۵۲۷۳۷۵ ، ۱٫۵۵۲۷۳۹۴

۲- ۲٫۷۶۸۹۵۲۹ ، ۳̄٫۷۶۸۹۵۰۲

۳- ۴۷۸٫۴۷۵ ، ۵٫۰۰۴۷۸۴۷۷۷

۴- ۲٫۵۸۳۶۷۴ ، ۵٫۰۲۵۸۳۶۲

۵- (۱) ۳٫۷۲۰۴۸۱۵ (۲) ۲٫۷۲۲۰۴۶۲

(۳) ۴̄٫۷۲۴۰۰۷۹ (۴) ۵۲۷۳٫۶۳

(۵) ۵٫۰۵۲۹۶۷۲۶ (۶) ۵٫۲۶۰۶۴

۶- ۵٫۶۸۷۰۴۱۷ ۷- ۴۳° ۱۳′ ۴۵″

۸- ۵٫۸۴۵۵۱۰۴ ، ۵٫۸۴۵۴۵۰۹

۹- ۳۲° ۱۶′ ۳۵″ ، ۳۲° ۱۶′ ۳۱″

۱۰- ۴٫۱۲۰۳۰۶۰ ، ۴٫۱۲۱۸۷۴۸

۱۱- ۴٫۳۹۹۳۲۶۳ ، ۴٫۳۹۷۶۸۲۳

۱۲- ۱۳° ۸′ ۴۷″ ۱۳- ۹٫۹۱۴۷۳۳۴

۱۴- ۳۴° ۴۴′ ۲۷″ ۱۵- ۹٫۵۲۵۴۴۹۷ ، ۱۷° ۲۷′ ۴۳″

۱۶- ۱۰٫۰۲۲۹۴۱۴ ۱۷- ۱۸° ۲۷′ ۱۷″

۱۸- ۳۶° ۵۲′ ۱۲″

امثلہ ۲۵ (صفحہ ۲۰۸)

۱- °۱۳ ′۲۷ ″۳۱ ، ۲- °۲۲ ′۱ ″۲۸

۳- ۴۰ ۱٫۰۹۹۷۳ ، °۶۵ ′۲۴ ″۱۲٫۵

۴- ۹٫۶۱۹۸۵۰۹ ، °۲۲ ′۳۶ ″۲۸

۵- °۱۰ ′۱۵ ″۳۲ ، ۶- °۴۴ ′۵۵ ″۵۵

۷- (۱) ۹٫۷۲۷۶۰۴۳ (۲) ۹٫۹۲۷۰۸۵۷

(۳) ۱۰٫۱۹۵۸۹۱۷ (۴) ۱۰٫۰۷۵۷۶۰۷

(۵) ۱۰٫۲۰۰۱۳۳۷ (۶) ۱۰٫۰۷۲۵۰۲۷

(۷) ۹٫۷۳۴۵۱۴۲

۸- (۱) °۵ ′۳۰ ″۲۴ (۲) °۵۷ ′۳۱ ″۵۸

(۳) °۳۲ ′۳۱ ″۱۵ (۴) °۵۷ ′۶ ″۳۹

۹- ٫۵۳۷۳۶۰۲

۱۰- (۱) جم (لا − ما) قطلا قطما (۲) جم (لا + ما) قطلا قطما

(۳) جم (لا − ما) قم لا قطما

(۴) جم (لا + ما) قم لا قطما

(۵) نس۲ ما (۶) سس لا سس ما

امثلہ ۲۶ (صفحہ ۲۱۸)

۱- $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۹}{۷}$

۲- $\frac{۴}{\sqrt{۴۱}}$ ، $\frac{۳}{۵}$ اور $\frac{۸}{۵\sqrt{۴۱}}$ ، $\frac{۴۰}{۴۱}$ ، $\frac{۲۴}{۲۵}$ اور $\frac{۲۹۶}{۱۰۲۵}$

۳- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، ۱ ، ۴- $\frac{۵}{۱۲}$ ، $\frac{۱۲}{۵}$ اور ∞

۵- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۵۶}{۶۵}$ اور $\frac{۱۲}{۱۳}$

۶- $\frac{۷}{۴۱}$ اور $\frac{۲۸۷}{۸۱۶}$ ۷- ۶۰° ، ۴۵° ، ۷۵°

امثلہ ۲۷ (صفحہ ۲۲۵)

۲۳- $\frac{۴}{۵}$ ۱۶ فٹ ۲۵- $\frac{۲}{۵}$ ۲۸- $\frac{۳۱۳}{۳۳۸}$

امثلہ ۲۸ (صفحہ ۲۳۲)

۱-..... ۱۸۶٫۹۰ اور ۱۹۳٫۱۸

۲- ۲۶° ۳۳′ ۵۴″ ، ۶۳° ۲۶′ ۶″ ، ۱۰ $\sqrt{۵}$ فٹ

۳- ۴۸° ۳۵′ ۲۵″ ، ۳۶° ۵۲′ ۱۲″ ، ۹۴° ۳۲′ ۲۳″

۴- ۷۵° اور ۱۵°

امثلہ ۲۹ (صفحہ ۲۳۵)

۱- ۹۰° ۲- ۳۰° ۴- ۱۲۰°

۵- ۴۵° ، ۱۲۰° ، ۱۵° ۶- ۴۵° ، ۶۰° ، ۷۵°

۷- ۵۸° ۵۹′ ۳۳″ ۸- ۷۷° ۱۹′ ۱۱″

۹- ۷۶° ۳۹′ ۵″ ۱۰- ۱۰۴° ۲۸′ ۳۹″

۱۱- ۵۶° ۱۵′ ۴″ ، ۵۹° ۵۱′ ۱۰″ ، ۶۳° ۵۳′ ۴۶″

۱۲- ۳۸° ۵۶′ ۳۳″ ، ۴۷° ۴۱′ ۷″ ، ۹۳° ۴۲′ ۳۰″

۱۳- ۱۳۰° ۴۳′ ۲۰٫۵″ ، ۲۳° ۲۶′ ۸٫۵″ اور

۲۵° ۵۰′ ۳۱″

امثلہ ۳۰ (صفحہ ۲۴۱)

۱- ۶۳° ۱۳′ ۲″ ، ۴۳° ۸٫۵′ ۲۸″

۲- ۱۱۷° ۳۸′ ۴۵″ ، ۲۷° ۳۸′ ۴۵″

۳- ۸√۷ فٹ ، ۷۹° ۶′ ۲۴″ ، ۶۰° ، ۴۰° ۵۳′ ۳۶″

۴- ۸۷° ۲۷′ ۲۵٫۵″ ، ۳۲° ۳۲′ ۳۴٫۵″

۵- ۴۰° ۵۳′ ۳۶″ ، ۱۹° ۶′ ۲۴″ ، √۷ : ۲

۶- ۷۱° ۴۴′ ۳۰″ : ۴۸° ۱۵′ ۳۰″

۷- ۷۸° ۱۷′ ۴۰″ ، ۴۹° ۳۶′ ۲۰″

۸- ۱۰۸° ۱۲′ ۲۶″ ، ۴۹° ۲۷′ ۳۴″

۹- ا = ۴۰° ، ب = ۷۵° ، ج = √۶

۱۰- √۶ ، ۱۵° ، ۱۰۵°

۱۱- ٫۸۹۶۵

۱۴- ۴۰ گز ، ۱۲۰° ، ۳۰°

۱۵- ٫۵۸۹۴۶۷ ، ۱۰۸° ۲۶′ ۶″ ، ۱۸° ۲۶′ ۶″ ، ۵۳° ۷′ ۴۸″

۱۶- ۲٫۵۲۹۸۲۳

۱۷- ۲۲۶٫۸۷ ، ۷۳° ۳۴′ ۵۰″ ، ۳۹° ۴۵′ ۱۰″

۱۸- ا = ۸۳° ۷′ ۳۹″ ، ب = ۴۲° ۱۶′ ۲۱″ ،
ج = ۱۹۹٫۰۹۹

۱۹- ب = ۱۱۰° ۴۸′ ۱۵″ ، ج = ۲۶° ۵۶′ ۱۵″ اور
ا = ۹۳٫۵۱۹۲

۲۰- ۷۳° ۱′ ۵۱″ اور ۴۸° ۴۱′ ۹″

۲۱- ۸۸° ۳۰′ ۱″ اور ۳۳° ۳۰′ ۵۹″

امثلہ ۳۱ (صفحہ ۲۵۱)

۱- مثلث نہیں بن سکتا۔

۲- ب$_1$ = ۳۰°، ج$_1$ = ۱۰۵°، ب$_1$ = ۲√ اور ب$_2$ = ۶۰°

ج$_2$ = ۷۵° اور ب$_2$ = ۶√

۳- ب$_1$ = ۱۵°، ج$_1$ = ۱۳۵°، ب$_1$ = ۵۰ (۶√ − ۲√)

اور ب$_2$ = ۱۰۵°، ج$_2$ = ۴۵°، ب$_2$ = ۵۰ (۶√ + ۲√)

۵- ۴ ۳√ ± ۲ ۵√

۶- ۱۰۰ ۳√ ، مثلث قائم الزاویہ ہے

۸- ۳۳° ۲۹′ ۳۰″ اور ۱۰۱° ۳۰′ ۳۰″

۹- ۱۷٫۱ یا ۳٫۶۸

۱۰- (۱) مثلث قائم الزاویہ ہے اور ب = ۶۰°

(۲) ب$_1$ = ۶۰٫۲۸۹۳ ، ب$_1$ = ۸° ۴۱′ اور ج$_1$ = ۱۴۱° ۱۹′

ب = ۱۱۱° ۱۹′ اور ج$_2$ = ۳۸° ۴۱′

۱۱- ۶۵° ۵۹′ اور ۴۱° ۵۶′ ۱۲″

۱۲- ۵٫۹۰۸۸........ اور ....۲٫۶۷۱۸ میل فی گھنٹہ

۱۳- ۶۳° ۲′ ۱۲″ یا ۱۱۶° ۵۷′ ۴۸″

۱۴- ۶۲° ۳۱′ ۲۳″ اور ۱۰۲° ۱۷′ ۳۷″

یا ۱۱۷° ۲۸′ ۳۷″ اور ۴۷° ۲۰′ ۲۳″

۱۵- ۵۹۲۶٫۶۱

امثلہ ۳۲ (صفحہ ۲۵۴)

۱- ۷ : ۹ : ۱۱

۴- ۷۹٫۰۶۳

۵- ۱ میل، ۱٫۲۱۹۶۱۴۰۰... میل

۷- ....۲۰٫۹۷۲۱۶ فٹ

۸- ۶٫۸۵۶۷۳ اور ... ۵٫۴۳۷۸۴۶۸ فٹ

۹- ۴۰۴٫۴۳۵۲ فٹ

۱۰- ۲۳۳٫۲۸۸۳ گز

۱۱- ۲۲۲۹ گز

امثلہ ۳۳ (صفحہ ۲۶۰)

۱۔ ۱۰۰ فٹ اونچا اور ۵۰ فٹ چوڑا، ۲۵ فٹ

۲۔ ۲۵٫۷۸۳۴ گز

۳۔ .... ۳۳٫۰۷ فٹ، ½۱۷ فٹ

۴۔ ...... ۱۸٫۲ فٹ

۵۔ ......۱۲۰ فٹ

۶۔ ح مس ہ مم بہ

۷۔ ۱۹۳۹٫۲ فٹ

۸۔ ۱۰۰ فٹ

۹۔ ۶۱٫۲۲۴ فٹ

۱۰۔ ۱۰۰ ∜۲ فٹ

۱۵۔ ف ق = ب ف = ب ق = ۱۰۰۰ فٹ،

ا ف = ۵۰۰ (√۶ - √۲) فٹ

ا ق = ۱۰۰۰ √۲ فٹ

۱۶۔ ٫۳۲۱۱۹ میل

۱۷۔ ۱٫۱۷۳۶۲۸۲ میل، ٫۹۸۴۸۰۷۸ میل۔

۱۸۔ ۱۱۹٫۲۸۶۲ فٹ

۱۹۔ ۱۳۲٫۲۶۶ فٹ

۲۰۔ ۲۳۵٫۸۰۳۴ گز

۲۱۔ ۱٫۴۲۷۷۱ میل

۲۲۔ ۱۲۵٫۳۱۶۷ فٹ

امثلہ ۳۴ (صفحہ ۲۶۹)

۳۔ ۲۰ فٹ، ۴۰ فٹ

۴۔ ل قم جہ جہاں جہ سورج کا ارتفاع ہے،

جیب جہ = ۲/۷

۵۔ .... ۳٫۷۳۲ میل، رفتار .... ۱۲٫۲۴۲ میل فی گھنٹہ مشرق سے جنوب کی جانب میں ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا مماس √۳ + ۱ ہے۔

۶۔ .... ۱۰٫۲۴۲۶ میل فی گھنٹہ

۷۔ .... ۱۶٫۳۹۲۳ میل، ...... ۱۴٫۶۹۷ میل

۸- ۲۶۳۹ء۲ میل، ۶۶ء۳۲۱ میل

۹- زاویہ مطلوبہ کا مماس $\frac{۲}{۳}$ ہے۔ $\frac{۹}{۵۲}$ گھنٹہ

۱۳- ج جب بہ قم (عہ + بہ)، ج جب عہ جب بہ قم (عہ + بہ)

۱۴- ۹ گز، ۲ گز ۱۶- $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۲ ۱}{۳}$ ۱

۲۰- ٹیلے سے $\frac{۳۷۵}{۲ ۷}$ فٹ کے فاصلہ پر۔

۲۱- ج (۱-جب عہ) قطعہ ۲۲- ۱۲۳ء۱۱۴ فٹ

۲۴- ۵۶۳۵ء۱۰۶۹۷ فٹ

۲۶- ایک ایسا زاویہ جس کا مماس $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

۲۹- °۴۵

۳۲- °۱۸ ′۲۶ ″۶

۳۴- مس عہ قط بہ : ۱

۳۷- ۹۱ء۸۹۶ فٹ ۳۸- ۱۹۶۰ء۹۵ گز

۳۹- ۲ء۴۵۸۳۲ میل ۴۰- ۳۳۳ء۴۹۳۲ فٹ

امثلہ ۳۵ (صفحہ ۲۷۹)

۱- ۸۴ ۲- ۲۱۶ ۳- ۶۳۰

۴- ۳۷۲۰ ۵- ۲۷۰ ۶- ۱۱۷۰۹۶

۷- ۱۴۷۰ ۸- ۱ء۱۸۳

۱۲- ۳۵ گز اور ۲۶ گز ۱۳- .....۱۴ء۹۴۱ انچ

۱۴- ۵، ۷، ۸ فٹ ۱۵- °۱۲۰

۱۷- °۴۵ اور °۱۰۵، °۱۳۵ اور °۱۵ ۱۸- ۱۷ء۱۰۶۴ مربع انچ

امثلہ ۳۶۔ (صفحہ ۲۸۸)

۳- $\frac{۱}{۸}$، ۸، $۱\frac{۱}{۲}$، ۸، ۲، ۲۴ بالترتیب

امثلہ ۳۷ (صفحہ ۳۰۰)

۳۵- ہر ایک دائرہ کے نصف قطر کا ...... ۲ء۱۵۴۷ یا ۷ء۱۵۴۷ گنا

۳۹- ان = $\frac{\pi}{3}$ + (-۱)ن × ۲ن × (۱ - $\frac{\pi}{3}$)، .....

امثلہ ۳۸ (صفحہ ۳۱۱)

۱- (۱) ۳ $\sqrt{۱۰۵}$ مربع فٹ (۲) ۱۰ $\sqrt{۷}$ مربع فٹ

۲- ۱ $\frac{۵}{۷}$ اور $\frac{۱}{۲}$ ۲ فٹ

امثلہ ۳۹ (صفحہ ۳۱۶)

۱- ۹۸ء۷۷ انچ

۲- ۵۳۵۹ء

۳- (۱) .... ۷۲۰ء۱ مربع فٹ

(۲) ..... ۲ء۵۹۸ مربع فٹ

(۳) ..... ۴ء۸۲۸۴ مربع فٹ

(۴) ..... ۷ء۶۹۴ مربع فٹ

(۵) ...... ۱۱ء۱۹۶ مربع فٹ

۴- .... ۱ء۸۶۶۸ مربع فٹ

۵- ۳ء۳۱۳۶ مربع فٹ

۶- ۲ + $\sqrt{۲}$: ۴، $\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$: ۳

۱۲- ۳

۱۴- ۶

۱۵- ۹

۱۶- ۲۰ اور ۱۰

۱۷- ۶ اور ۵، ۱۲ اور ۸، ۱۸ اور ۱۰

۲۲ اور ۱۱، ۲۷ اور ۱۲، ۴۲ اور ۱۴

۵۴ اور ۱۵، ۷۲ اور ۱۶، ۱۰۲ اور ۱۷

۱۶۲ اور ۱۸، ۳۴۲ اور ۱۹، اضلاع بالترتیب

۱۹- $\frac{۳}{۴}$ $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۶}$

امثلہ ۴۰ (صفحہ ۳۲۶)

۱- ٫۰۰۲۰۴

۲- ٫۰۰۰۰۰۷

۳- ٫۰۰۰۲۹

۴- ٫۹۹۹۹۹۹

۵- ۲۵۷۸۳٫۱۰۰۷۷

۶- ۱٫۰۰۰۰۰۱۱

۷- ۳۴′ ۲۳″

۸- ۲۸° ۴۰′ ۳۷″

۹- ۳۹′ ۴۲″

۱۰- ۲° ۳۳′ ۴۴″

۱۱- ..... ۱۱۴٫۵۹ انچ

امثلہ ۴۱ (صفحہ ۳۲۹)

۱- ۴۳۵٫۷۷ مربع فٹ

۲- ... ۴٫۹۰۸۷ مربع فٹ

۳- ۱۲۷° ۱۹′ ۲۶″

۴- ۶ مربع فٹ

۵- ۱۱٫۰۰۰۴ انچ

۶- ٫۰۰۰۴۴۶۲۵ انچ

۷- ۲۲ ۲/۳ ر

امثلہ ۴۲ (صفحہ ۳۳۲)

۱- ۱° ۸′ ۴۵″

۲- ۱۷٫۲۳ میل

۳- ۶۱ ۱۱٫ میل، ۱° ۸۴′ تقریباً

۸- تقریباً ۶۱٬۸۰۰ میٹر = تقریباً ۳۸ ۱/۲ میل

۹- ۳۹۶۰ میل

امثلہ ۴۳ (صفحہ ۳۴۱)

۲۸- $\pm \sqrt{\text{جب ۲ ہ}}$ ۲۹- $\frac{۱}{۹}$

۳۰- $\pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳۱- $۴ \sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۳۲- $\frac{۱}{۴}$ ۳۳- ن π یا ن $\pi + \frac{\pi}{۴}$

۳۴- $\sqrt{۳}$ ۳۵ $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۳۶- $\sqrt{۳}$ یا $-(۲ + \sqrt{۳})$

۳۷- $\sqrt{۳}$ یا $۲ - \sqrt{۳}$

۳۸- ن یا $\text{ن}^۲ - \text{ن} + ۱$ ۳۹- $\frac{۱}{۲} \sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۴۰- ۱۳

۴۱- لا مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{لا}^۴ - \text{لا}^۲ (\text{اب} + \text{اج} + \text{اد} + \text{ب ج} + \text{ب د} + \text{ج د}) + \text{اب ج د} = ۰$$

۴۲- لا = اب

۴۳- اب $\div \left[\sqrt{\text{ا}^۲ - ۱} + \sqrt{\text{ب}^۲ - ۱}\right]$

۴۴- $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{۱ + \text{اب}}$

امثلہ ۴۴ (صفحہ ۳۵۱)

۱- $\frac{۱}{۲}$ جب ۲ن ط قہ ط

۲- جم $\frac{۳\text{ن} - ۱}{۴}$ ا ، جب $\frac{۳\text{ن}}{۴}$ ا ، قم $\frac{۳}{۴}$ ا

۶- ۱/۲

۷- جب [عہ + (ن - ۱/۲) بہ] جب ن بہ قط بہ/۲

۸- جب (ن ط)/(ن - ۲)

۹- جب ۲ ن لا (جم ۲ ن لا + جب ۲ ن لا) (جم لا + جب لا) قم ۲ لا

۱۰- ۱/۴ [(ن + ۱) جب ۲ عہ - جب (۲ ن + ۲) عہ] قم عہ

۱۱- ۱/۲ جب (۲ ن + ۲) عہ × جب ۲ ن عہ قم عہ

۱۲- ن/۲ جم ۲ عہ - ۱/۲ جم (ن + ۳) عہ جب ن عہ قم عہ

۱۳- [جم (۲ ن عہ - عہ) جم (ن + ۱) بہ - جم (۲ ن عہ + عہ) جم ن بہ + جم عہ (۱ - جم بہ)] / [۲ (جم بہ - جم ۲ عہ)]

۱۴- ۱/۴ [(۲ ن + ۱) جب عہ - جب (۲ ن + ۱) عہ] قم عہ

۱۵- ن/۲ - ۱/۲ جم [۲ ط + (ن - ۱) عہ] جب ن عہ قم عہ

۱۶- ۳/۴ جب (ن + ۱)/۲ عہ جب ن عہ/۲ قم عہ/۲

- ۱/۴ جب ۳ (ن + ۱)/۲ عہ × جب ۳ ن عہ/۲ قم ۳ عہ/۲

۱۷- ۱/۸ [۳ ن - ۴ جم (ن + ۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ ن + ۲) عہ جب ۲ ن عہ قم ۲ عہ]

۱۸- ۱/۸ [۳ ن + ۴ جم (ن + ۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ ن + ۲) عہ جب ۲ ن عہ قم ۲ عہ]

۱۹- $\frac{1}{4}\,\text{جب}\,\frac{\text{ن ط}}{2}\left[\text{جم}\,\frac{\text{ن}-1}{2}\,\text{ط}+\text{جم}\,\frac{\text{ن}+3}{2}\,\text{ط}+\text{جم}\,\frac{\text{ن}+7}{2}\,\text{ط}\right]\text{قم}\,\frac{\text{ط}}{2}$

$+\frac{1}{4}\,\text{جب}\,\frac{3\,\text{ن ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{3\text{ن}+9}{2}\,\text{ط}\,\text{قم}\,\frac{3\,\text{ط}}{2}$

۲۰- $-\frac{1}{2}\,\text{جب}\,(2\,\text{ع}+2\,\text{ن ب})\,\text{جب}\,2\,\text{ن ب}\,\text{قط ب}$

امثلہ ۴۵ (صفحہ ۳۵۸)

۱- $\text{ا}^2+\text{ب}^2=\text{ج}^2+\text{د}^2$

۲- $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-\frac{2\,\text{لا ما}}{\text{اب}}\,\text{جم}(\text{ع}-\text{ب})=\text{جب}^2(\text{ع}-\text{ب})$

۳- $\text{ا}(2\,\text{ج}^2-\text{د}^2)=\text{ب د ج}$

۴- $\text{ا جب ع}+\text{ب جم ع}=\sqrt{2\,\text{ب}(\text{ا}+\text{ب})}$

۵- $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$

۶- $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}}=\text{ا}+\text{ب}$

۷- $(\text{ف}^2+1)^2+2\,\text{ق}(\text{ف}^2+1)(\text{ف}+\text{ق})=4(\text{ف}+\text{ق})^2$

۸- $(\text{لا}^2+\text{ما}^2-\text{ب}^2)^2=\text{ا}^2\left[(\text{لا}+\text{ب})^2+\text{ما}^2\right]$

۱۱- $\text{ا}^2+\text{ب}^2=2+2\,\text{جم ع}$

۱۲- $\text{لا ما}=(\text{ما}-\text{لا})\,\text{مس ع}$

۱۳- $\text{ا}^2(\text{ا}-\text{ج})(\text{ا}-\text{د})=\text{ب}^2(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{د})$

۱۴- $8\,\text{ب ج}=\text{ا}\left\{4\,\text{ب}^2+(\text{ب}^2-\text{ج}^2)^2\right\}$

۱۵- لا (ج۲ - ا۲ - ب۲)

$= \text{ما} \sqrt{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(-\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})}$

۱۶- ب۲ [لا (ب۲ - ا۲) + ا (ا۲ + ب۲)]۲ = ۴ ج۳ [ب۲ لا۲ + ا۲ ما۲]

تفرق مثالیں (صفحہ ۳۶۷)

۴- ۱۴۲ فٹ تقریباً، ۴ْ ۳۰َ تقریباً

۵- ۴۱، ۵۰، ۲۱ فٹ

۷- جب (ہ - عہ) = ± ما $\sqrt{\text{۱} - \text{ب}}$ $\sqrt{\text{۱} - \text{ا}^2}$ ∓ ا ما $\sqrt{\text{ب}}$

۹- ن π + ۳۸ْ ۷َ ۲۷ً

۱۰- (ن + $\frac{۱}{۴}$) $\frac{\pi}{۲}$

۱۴- ۷ - ۳ $\sqrt{۵}$: ۲

۲۱- (۱) طہ = ن π + (-۱)ن $\frac{\text{عہ} + \text{ہ}}{۲}$

یا مس طہ = (۱ - قم عہ قم ہ) مس $\frac{\text{عہ} + \text{ہ}}{۲}$

(۲) طہ = ن π یا (ن ± $\frac{۱}{۴}$) $\frac{\pi}{۲}$

۲۲- ۵۱ْ ۱۹َ، ۷۸ْ ۲۸َ، ۱۰۸ْ ۱۳َ

۲۳- ۱۲۹۸ فٹ تقریباً، ۱۳ْ ۳۱َ جنوب سے مشرق کی طرف کو۔

۲۸- ۸۰ فٹ

۳۰- $\frac{۱}{۲}$ مس-۱ لا، $\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{۱} - \text{لا ما}}$

۳۱- (ل۲ + م۲) (۱ - ن) = ۲م (۱ + ن)

۳۲- دو اصلیں

۳۵- (م ± ۱/۱۲) π ، (ن ± ۱/۶) π

۴۶- (ل۲ - ۱)۳ = ۲۷ ل۲ جم۲ عہ جب۲ عہ

۴۸- ۳۹ر۱ نیمقطری = ۷۹° ۳۰َ تقریباً

۴۹- جب۲ (بہ - جہ) قط۲ (عہ - بہ) قط۲ (عہ - جہ)

۵۲- ۱۱° ۱۲َ مشرق سے شمال کی طرف کو

۵۴- چھ قیمتیں　　　۵۸- ۱/۴ [ن π + π/۲ - عہ - بہ - جہ]

۵۹- ۷۷ر۲۳ فٹ

۶۲- ج √(۲و - ب) = √۲و - (و - ب) √ب

۶۳- ۱/۲ ۱۱۸°　　　۶۴- ۱° ۱۹َ + ۱/۲ ۲۸َ ، + ۱/۲ ۵۰َ تقریباً

۶۹- ا جب عہ جب بہ / √(جب (بہ - عہ) جب (بہ + عہ))

۷۳- جم (عہ + بہ + جہ + لہ) + جم (عہ + بہ - جہ - لہ)
+ جم (عہ - بہ + جہ - لہ) + جم (عہ - بہ - جہ + لہ) - جم (-عہ + بہ + جہ + لہ)
- جم (عہ - بہ + جہ + لہ) - جم (عہ + بہ - جہ + لہ) - جم (عہ + بہ + جہ - لہ)

۷۶- ۶۶° ۱/۲ ۱۹َ تقریباً　　　۸۰- لا = - ۲ر۴۵۳۱

۸۲- مس طہ = ۲ ± √۱۱ یا ۲ ± √۳
مس فہ = ۲ ∓ √۱۱ یا ۲ ∓ √۳

۸۴- ۴۷٫۱۶ میل

۸۷- ۲۷ ما^{2} = لا^{2} (۹ - ۸ لا^{2})

۹۴- ۲ ر^{2} + ج = ۳ ر (۱ + ب)

۹۵- جب $\frac{\text{ن ط}}{۲}$ جب $\frac{\text{(ن + ۲) ط}}{۲}$ [۱ + ۲ جم ۲ ط] قم $\frac{\text{ط}}{۲}$

- جب $\frac{\text{۳ ن + ۹}}{۲}$ ط جب $\frac{\text{۳ ن ط}}{۲}$ قم $\frac{\text{۳ ط}}{۲}$

۹۶- ۲٫۵۵ ینقطری = ۱۴۶° ۶′ تقریباً

۱۰۴- مس ط = ۰، ۱، - ۱، - ۲

۱۰۸- ۲۳۷۹ فٹ ۱۱۷- ۱۱° ۲۷′

۱۲۰- لا^{2} + ما^{2} = ر^{2} + ب^{2}

۱۲۸- (ر^{2} + ب^{2})^{2} - ۲ ر^{2} = $\frac{\text{۸ ر ب}}{\text{ج}}$

۱۳۶- (لا + ما)$^{\frac{2}{5}}$ + (لا - ما)$^{\frac{2}{5}}$ = ۲

۱۳۸- $\frac{\text{م ج}_1 + \text{ن ک}_2 + \sqrt{\text{م}^2 \text{ج}_1^2 + \text{ن}^2 \text{ک}_2^2 + ۲ \text{م ن ک}_1 \text{ج}_2 \text{جم(عہ - جہ)}} \text{جب (ن ت + بہ)}}{\text{م + ن}}$

جہاں مس بہ = (م ج$_2$ جب جہ + ن ک$_2$ جب عہ) ÷ (م ج$_2$ جم جہ + ن ک$_2$ جم عہ)

۱۴۶- م^{2} + م جم عہ = ۲ ۱۴۸- $\frac{1}{3}$ ۷۷° ، $\frac{1}{2}$ ۶۳°

۱۵۱- (لا^{2} + ما^{2} + ۲ ر لا)^{2} = ۴ ر^{2} (لا^{2} + ما^{2})

۱۶۱- (۱ - لا^{2} - ما^{2}) جب (عہ - لہ) جب (بہ - جہ$_2$)

مساوات $لا = ن + \frac{(-1)^ن}{ن \pi}$ سے حاصل ہوتی ہیں، اس میں ن کوئی بڑی مقدار ہے۔

۱۸۶۔ ثابت کرو کہ مساوات مس لا = ۲ لا کی اصل جو صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہے تقریباً ۱۶۵ر۱ ہے، معلوم ہے مس ۱۶۵ر۱ = ۲۶۰ر۲ اور مس ۱۶۹ر۱ = ۳۵۵ر۲۔

۱۸۷۔ اگر ط کوئی حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$مس\ ط\ ہمیشہ\ ط + \frac{ط^3}{3} + \frac{ط^5}{15} + \cdots\cdots + \frac{ط^{2ن+1}}{4^ن - 1} + \cdots\cdots\cdots$$

سے بڑا ہوگا۔

۱۸۸۔ اگر ا، ب، ع، بہ مستقل مقداریں ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$جم\ (2ط - ع) + ا\ جم\ (ط - بہ) + ب = 0$$

کی اصلوں کے چار مختلف جٹ ہیں اور اگر ان مختلف جٹوں کی کسی چار قیمتوں کو $ط_1$، $ط_2$، $ط_3$، $ط_4$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ط_1 + ط_2 + ط_3 + ط_4 - 2ع،$$

π کا جفت ضعف ہے۔

۱۸۹۔ اگر مساوات

$$مم\ (ط + ع) + مم\ (ط + بہ) + مم\ (ط + جہ)$$
$$= قم\ (ط + ع) + قم\ (ط + بہ) + قم\ (ط + جہ)$$

$ط_1$، $ط_2$، $ط_3$ سے پوری ہو جن میں سے کسی دو کا فرق ۲ قائموں کے ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ط_1 + ط_2 + ط_3 + ع + بہ + جہ$$

2π کے کسی ضعف کے برابر ہوگا۔

۱۹۰۔ ثابت کرو کہ بالعموم مساوات

$$ا\ جب^3\ لا + ب\ جم^3\ لا + ج = 0$$

کی چھ مختلف اصلیں ہیں جن میں سے کسی دو کا تفاوت ۲π کے برابر نہیں ہو سکتا، نیز ثابت کرو کہ اُن کے مجموعہ کا مماس $-\frac{ا}{ب}$ ہے۔

۱۹۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{مس}\,(\text{ط} - \text{ع}) + \text{قط}\,(\text{ط} - \text{ہ}) = \text{مم}\,\text{ج}$$

کی چار اصلیں ایسی ہیں (جن میں سے کسی دو کا فرق ۲π کے اضعاف کے برابر نہیں) جو ربطِ ذیل کو پورا کرتی ہیں۔

$$\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \text{ط}_3 + \text{ط}_4 = ۲\,(\text{ن}\pi + \text{ع} + \text{ہ} - \text{ج})$$

۱۹۲۔ اگر لا کی تین قیمتیں ع، ہ، ج مساوات

$$\text{جب}\ ۲\,\text{ط}\ (\text{ا}\,\text{جب}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{جم}\,\text{لا}) = \text{جب}\ ۲\,\text{لا}\ (\text{ا}\,\text{جب}\,\text{ط} + \text{ب}\,\text{جم}\,\text{ط})$$

کو پورا کریں اور ان میں سے کسی دو کا باہمی فرق یا ان میں سے کسی ایک اور ط کا فرق ۲π کے کسی ضعف سے تعبیر نہ ہو سکے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{\text{ع}}{۲}\ \text{مس}\,\frac{\text{ہ}}{۲}\ \text{مس}\,\frac{\text{ج}}{۲}\ \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{۲} + ۱ = ۰$$

۱۹۳۔ اگر مساوات $\text{ا}\,\text{جم}\ ۲\,\text{ط} + \text{ب}\,\text{جب}\ ۲\,\text{ط} + \text{ج}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{د} = ۰$ کی مختلف اصلیں ط_1، ط_2، ط_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{جب}\,\frac{\text{ط}_2 + \text{ط}_3 + \text{ط}_4 - \text{ط}_1}{۲} = ۰$$

۱۹۴۔ ربطِ ذیل کو ثابت کرو

$$\text{جم}^{-1}\,\text{لا} = \frac{\sqrt{۱ - \text{لا}^2}}{\text{لا}_1 \times \text{لا}_2 \times \text{لا}_3 \ldots\ \infty\ \text{تک}}$$

جہاں متواتر مقداریں لا_1، لا_2، لا_3، ...... $\text{لا}_ر$ ربطِ ذیل سے منسلک ہیں

$$\text{لا}_{ر+1} = \sqrt{\frac{1}{۲}\,(۱ + \text{لا}_ر)}$$

۱۹۵۔ اگر ا اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر

$$ا_۱ = \frac{ا + ب}{۲} ،\quad ب_۱ = \sqrt{ا_۱ ب} ،\quad ا_۲ = \frac{ا_۱ + ب_۱}{۲} ،$$

$$ب_۲ = \sqrt{ا_۲ ب_۱}$$ اور علیٰ ہذا القیاس

تو ثابت کرو کہ

$$ا_\infty = ب_\infty = \frac{\sqrt{ب^۲ - ا^۲}}{جم^{-۱} \frac{ا}{ب}}$$

اس سے ثابت کرو کہ π کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

۱۹۶- اگر مساوات

$$ا_۱ + ا_۲ جب لا + ا_۳ جم لا + ا_۴ جب ۲لا + ا_۵ جم ۲لا = ۰$$

لا کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہو جہاں مستقل مقداروں $ا_۱$، $ا_۲$ ...... میں لا شامل نہیں ہے، تو ثابت کرو کہ ان مستقل مقداروں میں سے ہر ایک صفر کے برابر ہو گی۔

علم مثلث

جوابات

امثلہ ۱ (صفحہ ۵)

۱- $\frac{۲}{۳}$ ۲- $\frac{۳۰۱}{۳۶۰}$ ۳- $\frac{۴۵۵۶۹}{۶۴۸۰۰}$

۴- $۱\frac{۹}{۲۰}$ ۵- $۲\frac{۳۶۶۱}{۱۰۸۰۰}$ ۶- $۴\frac{۳۸۸}{۳۳۷۵}$

۷- ۳۴گ ۳۳' ۳۳،۳" ۸- ۹۰گ

۹- ۱۵۳گ ۸۸' ۸۸،۸" ۱۰- ۳۹گ ۷۶' ۳۸،۸"

۱۱- ۲۶۱گ ۴۴' ۴۴،۴" ۱۲- ۵۲۸گ ۳' ۳۳،۳"

۱۳- $\frac{۱}{۵}$ ۱ قائمے، ۱۰۸°

۱۴- ۲۴۳۵۴۵، قائمے، ۴۰° ۴۹' ۱،۷۷۶"

۱۵- ۳۶۴۵۳۹، قائمے، ۳۵° ۳۰' ۲۹،۶۶۴"

۱۶- ۲،۵۵۰۸۰۹ قائمے، ۲۲۹° ۳۴' ۲۲،۱۱۶"

۱۷- ۷،۵۹۰۰۰۵ قائمے، ۶۸۳° ۶' ۱،۶۲"

۲۸- ۵° ۳۳' ۲۰"، ۶۶° ۴۰'، ۲۹- $\frac{۷}{۱۹}$ ۴۷°، $\frac{۱۲}{۱۹}$ ۴۲°

۳۱- ۳۳° ۲۰′ ۱۰ ۴۸

امثلہ ۲ (صفحہ ۱۱)

۱- ۲۵۱۳۲٫۷۴ میل تقریباً

۲- ۱۹٫۲۸ میل تقریباً فی گھنٹہ

۳- ۱۲٫۸۵ میل تقریباً

۴- ۳٫۱۴۱۵۹..... انچ

۵- ۵۸۱۱۹۴۶۴۰۰ میل تقریباً

۶- ۱۴٫۹۹۴ میل تقریباً

امثلہ ۳ (صفحہ ۱۵)

۱- ۹۰° ۲- ۲۴۰° ۳- ۱۸۰۰°

۴- ۵۷° ۱۷′ ۴۴٫۸″ ۵- ۲۵۸° ۲۱′ ۵۸٫۴″

۶- ۱۶ گ ۷- ۲۳۳ گ ۳۳′ ۳۳٫۳″

۸- ۲۰۰۰ گ ۹- $\frac{\pi}{۳}$ ۱۰- $\frac{۲۲۱}{۳۶۰}\pi$

۱۱- $\frac{۷۰۳}{۷۲۰}\pi$ ۱۲- $\frac{۳۵۵۷}{۱۳۵۰۰}\pi$

۱۳- $\frac{۷۹}{۳۶}\pi$ ۱۴- $\frac{۳\pi}{۱۰}$

۱۵- $\frac{۱۱۰۳}{۲۰۰۰}\pi$ ۱۶- $۱٫۷۲۶۲۶۸\pi$

۱۷- ۸۱°، ۹° ۱۸- ۲۴°، ۶۰°، ۹۶°

۱۹- ۱۳۲° ۱۵′ ۱۲٫۶″ ۲۰- ۳۰°، ۶۰°، ۹۰°

۲۱- $\frac{۱}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۲\pi}{۳}$ - $\frac{۱}{۲}$ نیم قطری

۲۲- (۱) $\frac{۳\pi}{۵}$ ، ۱۰۸° (۲) $\frac{۵\pi}{۷}$ ، $۱۲۸\frac{۴}{۷}^\circ$

(۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ، ۱۳۵° (۴) $\frac{۵\pi}{۶}$ ، ۱۵۰° (۵) $\frac{۱۵\pi}{۱۷}$ ، $۱۵۸\frac{۱۴}{۱۷}^\circ$

۲۳- ۱۸ اور ۴ ۲۴- ۱۰ اور ۸

۲۵- ۱۶ اور ۸ ۲۶- $\frac{\pi}{۳}$

۲۷- (۱) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ نق $= ۷۵^\circ = ۸۳\frac{۱}{۳}$ گ

(۲) $\frac{۷\pi}{۱۸}$ نق $= ۷۰^\circ = ۷۷\frac{۷}{۹}$ گ

(۳) $\frac{۵\pi}{۸}$ نق $= ۱۱۲\frac{۱}{۲}^\circ = ۱۲۵$ گ

۲۸- (۱) ۴ بج کر $۷\frac{۷}{۱۱}$ اور ۳۶ منٹ پر

(۲) ۷ بج کر $۲۸\frac{۴}{۱۱}$ اور ۴۸ منٹ پر

امثلہ ۴۴ (صفحہ ۴۰)

[فرض کرو کہ $\pi = ۳٫۱۴۱۵۹.....$ اور $\frac{۱}{\pi} = ۰٫۳۱۸۳۱$]

۱- ۲۰٫۴۵۴° تقریباً ۲- $\frac{۳}{۵}$ نیم قطری ، ۳۴° ۲۲′ ۳۸٫۹″

۳- ۶۸٫۷۵ انچ تقریباً ۴- ۵۰٫۵۲۳۶ انچ تقریباً

۵- ۲۴٫۵۵۵ انچ تقریباً ۶- ۱° ۲۵′ ۵″٫۷ تقریباً

۷- ۳۹۵۹٫۶۸ میل تقریباً ۸- π فٹ = ۳٫۱۴۱۵۹ فٹ

۹- ۵ : ۴ ۱۰- ۳٫۱۴۱۶

۱۱- $\frac{۴\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۹\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۱۴\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۱۹\pi}{۳۵}$ ، $\frac{۲۴\pi}{۳۵}$ نیم قطری

۱۲- ۶۵° ۲۴′ ۳۰٫۴″

۱۳- ۲۰۶۲٫۶۵ فٹ تقریباً

۱۴- ۵۹۵۳٫۱ فٹ تقریباً

۱۵- ۲۶۲٫۶ فٹ تقریباً

۱۶- ۳۲۱۴۲٫۹ فٹ تقریباً

۱۷- ۳۸۱۹۷٫۲ فٹ تقریباً

۱۸- ۱۹٫۰۹۹′

۱۹- ۱۱۰۵٫۸ میل

۲۰- ۲۳۸۸۳۳ میل

۲۱- ۲۱۶۰۰′ ، ۵٫۵×۱۰^۶ تقریباً

۲۲- ۱۰×۴۸۸^۱۱ میل

امثلہ ۶ (صفحہ ۳۶)

۵- $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ، $\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$ ، وغیرہ

۶- $\frac{۱۲}{۵}$ ، $\frac{۸}{۱۳}$

۷- $\frac{۱۱}{۶۰}$ ، $\frac{۶۰}{۶۱}$ ، $\frac{۶۱}{۶۰}$

۸- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۳}$

۹- $\frac{۴۰}{۹}$ ، $\frac{۴۱}{۴۰}$

۱۰- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۵}{۳}$

۱۱- $\frac{۳}{۴}$

۱۲- $\frac{۱۵}{۱۷}$ ، $\frac{۱۷}{۸}$

۱۳- $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}\sqrt{۵}$

۱۴- ۱ یا $\frac{۳}{۵}$

۱۵- $\frac{۳}{۵}$ یا $\frac{۵}{۱۳}$

۱۶- $\frac{۵}{۱۳}$

۱۷- $\frac{۱۲}{۱۳}$

۱۸- $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ یا ۱

۱۹- $\frac{۱}{۲}$

۲۰- $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲۱- $۱ + \sqrt{۲}$

۲۲- $\frac{۲ل(ل+۱)}{۲ل^۲+۲ل+۱}$ ، $\frac{۲ل+۱}{۲ل^۲+۲ل+۱}$

امثلہ ۸ (صفحہ ۵۰)

۱- ...... ۳۴٫۶۴ فٹ، ۲۰ فٹ   ۲- ۱۶۰ فٹ

۳- ۲۲۵ فٹ   ۴- ۱۳۶٫۶ فٹ

۵- ...... ۱۴۶٫۴ فٹ   ۶- ...... ۳۶۷٫۹ گز، ...... ۴۵۴٫۳ گز

۷- ...... ۸۶٫۶ فٹ   ۸- ...... ۱۱۵٫۳۵۹ فٹ

۹- ...... ۸۷٫۸۴۶ فٹ

۱۰- ...... ۴۳٫۳ فٹ، ایک ستون سے ۷۵ فٹ کے فاصلہ پر

۱۱- ...... ۹۴٫۶۴۱ فٹ، ...... ۵۴٫۶۴۱ فٹ

۱۲- ...... ۱٫۳۶۶ میل   ۱۳- ۳۰°

۱۵- ۱۳٫۸۵۶۴ میل فی گھنٹہ

۱۶- ...... ۲۵٫۹۸ فٹ، ...... ۷۰٫۹۸ فٹ، ...... ۸۵٫۹۸ فٹ

۱۷- ۳۲ $\overline{\text{طا}}$ = ... ۷۱٫۵۵ فٹ

۱۹- ۱۰ میل فی گھنٹہ   ۲۰- ...... ۸۶٫۶ گز

۲۱- ...... ۶۹۲٫۸ گز

امثلہ ۹ (صفحہ ۶۰)

۱- $\frac{۲۲۵۰}{۶۲۸۹}\pi$، $\frac{۲۵۰۰}{۶۲۸۹}\pi$ اور $\frac{۸۱}{۳۳۱}\pi$ نیم قطری

۲- ۶۸° ۴۵′ ۱۷٫۸″

۴- $\frac{۲لا}{ا^{۲}+ل^{۲}}$ ، $\frac{۲لا}{ا^{۲}-ل^{۲}}$

۸- $\frac{۱}{مس^{۲}\,۲}$ - مس² ۲ ۹- ط = ۶۰°

۱۰- $\frac{۱}{۲}$ اسنٹ میں

امثلہ ۱۰ (صفحہ ۸۳)

۴- ...... ۱٫۳۶۶ ، ...... ۲٫۳۰۹۴

۵- ...... ۱٫۳۶۶ ، − ۲٫۳۰۹۴

۶- ۲٫۰ ۷- ...... ۱٫۳۱۴۲ ، − ۲

۸- ...... ۱٫۳۶۶ ، − ۲٫۳۰۹۴

۹- ۴۵° اور ۱۳۵° ۱۰- ۱۲۰° اور ۲۴۰°

۱۱- ۱۳۵° اور ۳۱۵° ۱۲- ۱۵۰° اور ۳۳۰°

۱۳- ۱۵۰° اور ۲۱۰° ۱۴- ۲۱۰° اور ۳۳۰°

۱۵- − جم ۲۵° ۱۶- − جب ۶°

۱۷- − مس ۴۳° ۱۸- جب ۱۲°

۱۹- جب ۱۷° ۲۰- − مم ۲۴°

۲۱- جم ۳۳° ۲۲- − جم ۲۸°

۲۳- مم ۲۵° ۲۴- جم ۳۰°

۲۵- مم ۲۶° ۲۶- − قم ۲۳°

۲۷- -قم ۳۶°　　　　۲۸- منفی

۲۹- منفی　　　　۳۰- مثبت

۳۱- صفر　　　　۳۲- مثبت

۳۳- مثبت　　　　۳۴- مثبت

۳۵- منفی

۳۶- $\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

مشقہ ۱۱ (صفحہ ۹۲)

۱- $n\pi + (-1)^{n}\frac{\pi}{6}$　　　　۲- $n\pi - (-1)^{n}\frac{\pi}{4}$

۳- $n\pi + (-1)^{n}\frac{\pi}{4}$　　　　۴- $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۵- $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$　　　　۶- $2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

۷- $n\pi + \frac{\pi}{3}$　　　　۸- $n\pi + \frac{3\pi}{4}$

۹- $n\pi + \frac{\pi}{4}$　　　　۱۰- $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۱- $n\pi + (-1)^{n}\frac{\pi}{4}$　　　　۱۲- $n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۱۳- $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$　　　　۱۴- $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۵- $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$　　　　۱۶- $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۱۷- $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$　　　　۱۸- $(2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۹- $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

۳۰ - ۱۰۵° اور ۱۶۵° ؛ $\pi\left(\text{ن} + \frac{\text{م}}{۲}\right) \pm \frac{\pi}{۹} + (-۱)^{\text{م}}\frac{\pi}{۱۲}$ اور

$\pi\left(\text{ن} - \frac{\text{م}}{۲}\right) \mp \frac{\pi}{۹} + (-۱)^{\text{م}}\frac{\pi}{۱۲}$ جہاں م اور ن

کوئی صحیح عدد ہیں۔

-۲۱ $۸۷\frac{۱}{۲}^\circ$ اور $۴۲\frac{۱}{۲}^\circ$

$\pi\left(\text{ن} + \frac{\text{م}}{۲}\right) + \frac{\pi}{۸} \pm \frac{\pi}{۱۲}$ اور $\pi\left(\text{ن} - \frac{\text{م}}{۲}\right) - \frac{\pi}{۸} \pm \frac{\pi}{۱۲}$

۲۲ - (۱) ۶۰° اور ۱۲۰° ؛ (۲) ۱۲۰° اور ۲۴۰° ؛ (۳) ۳۰°

اور ۲۱۰°

۲۳ - (۱) ۲ ، (۲) ۱ ، (۳) ۱ ، (۴) ۱ ، (۵) ۱

امثلہ ۱۲ (صفحہ ۹۵)

۱ - $\text{ن}\pi + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۶}$

۲ - $۲\text{ن}\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۳ - $\text{ن}\pi + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۲}$

۴ - $\text{جم ط} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$

۵ - $\text{ن}\pi + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۱۰}$ یا $\text{ن}\pi - (-۱)^{\text{ن}}\frac{۳\pi}{۱۰}$ (دفعہ ۱۲۰)

۶ - $\text{ط} = ۲\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۷ - $\text{ط} = \text{ن}\pi + \frac{\pi}{۴}$ یا $\text{ن}\pi + \frac{\pi}{۳}$

۸ - $\text{ط} = \text{ن}\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ یا $\text{ن}\pi + \frac{۵\pi}{۶}$

۹ - $\text{مس ط} = \frac{۱}{\text{ا}}$ یا $-\frac{۱}{\text{ب}}$

۱۰ - $\text{ط} = \text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۱۱ - $\text{ط} = ۲\text{ن}\pi$ یا $۲\text{ن}\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۲ - $\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۳ - $\text{ن}\pi$ یا $۲\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۱۴- $\text{۲ن}\pi \pm \frac{\pi}{\text{۳}}$ یا $\text{۲ن}\pi \pm \frac{\pi}{\text{۶}}$

۱۵- جب ط = ۱ یا $-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$

۱۶- $\frac{\pi\text{ن}}{\text{۵}} + (-\text{۱})^{\text{ن}}\frac{\pi}{\text{۲۰}}$

۱۷- $\frac{\pi\text{ن}}{\text{۴}}$ یا $\frac{\pi(\text{۲ن}+\text{۱})}{\text{۱۰}}$

۱۸- $\text{۲ن}\pi$ یا $\frac{\pi(\text{۲ن}+\text{۱})}{\text{۵}}$

۱۹- $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{م}-\text{ن}}$ یا $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{م}+\text{ن}}$

۲۰- $\frac{\pi}{\text{۵}}(\text{۲ن}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ یا $\text{۲ن}\pi - \frac{\pi}{\text{۲}}$

۲۱- $\text{۲ن}\pi$ یا $\frac{\text{۲ن}\pi}{\text{۹}}$

۲۲- $\frac{\pi}{\text{م}+\text{ن}}(\text{۲ر}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ یا $\frac{\pi}{\text{م}-\text{ن}}(\text{۲ر}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$

۲۳- $\frac{\pi}{\text{۹}}(\text{ن}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$

۲۴- $\frac{\pi}{\text{ن}+\text{۱}}(\text{م}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$

۲۵- $\frac{\pi\text{ن}}{\text{۴}} \pm \sqrt{\text{۱}+\frac{\pi^{\text{۲}}\text{ن}^{\text{۲}}}{\text{۱۶}}}$

۲۶- $\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{\text{۶}}$

۲۷- $\frac{\pi}{\text{۳}}(\text{ن}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}) \pm \frac{\text{ع}}{\text{۳}}$

۲۸- $\frac{\pi}{\text{۴}}(\text{ن}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$

۲۹- $\frac{\pi\text{ن}}{\text{۳}} \pm \frac{\text{ع}}{\text{۳}}$

۳۰- $\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{\text{۶}}$

۳۱- $\frac{\pi}{\text{م}-\text{ن}}(\text{ر}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$

۳۲- مس ط = $\frac{\text{۲ن}+\text{۱} \pm \sqrt{\text{۴ن}^{\text{۲}}+\text{۴ن}-\text{۱۵}}}{\text{۴}}$ جہاں ن > ۱ یا < −۲

۳۳- ط = $\pi(\text{م}+\frac{\text{ن}}{\text{۲}}) \pm \frac{\pi}{\text{۶}} + (-\text{۱})^{\text{ن}}\frac{\pi}{\text{۱۲}}$

ع = $\pi(\text{م}-\frac{\text{ن}}{\text{۲}}) \pm \frac{\pi}{\text{۴}} - (-\text{۱})^{\text{ن}}\frac{\pi}{\text{۱۲}}$

۳۴- $\frac{\text{۱}}{\text{۵}}\left[\pi(\text{۶م}-\text{۴ن}) \pm \frac{\pi}{\text{۲}} \mp \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}\right]$ اور

$\frac{\text{۱}}{\text{۵}}\left[\pi(\text{۶ن}-\text{۴م}) \pm \pi \mp \frac{\pi}{\text{۳}}\right]$

۳۵ـ ۵۴° اور ۹۰° ۳۶- $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۵}{۴}$

۳۷- $\pm \frac{۱}{۴}\sqrt{۵}$ ، $\pm \frac{۱}{۴}\sqrt{۵}$

امثلہ ۱۳ (صفحہ ۱۰۳)

۱- $-\frac{۱۳۳}{۲۰۵}$ ، $-\frac{۸۴}{۲۰۵}$ ۲- $\frac{۱۵۹۶}{۳۴۴۵}$ ، $\frac{۳۴۴۴}{۳۴۴۵}$

۳- $\frac{۲۲۰}{۲۲۱}$ ، $\frac{۱۷۱}{۲۲۱}$ ، $\frac{۲۲۰}{۲۱}$

امثلہ ۱۴ (صفحہ ۱۰۸)

۳۰- ۲ جب (ط + ن فہ) جب $\frac{۳فہ}{۲}$

۳۱- ۲ جب (ط + ن فہ) جم $\frac{فہ}{۲}$

امثلہ ۱۵ (صفحہ ۱۱۲)

۱- جم ۲ط - جم ۱۲ط ۲- جب ۱۲ط - جب ۲ط

۳- جم ۱۴ط + جم ۸ط ۴- جم ۱۲° - جم ۱۲۰°

امثلہ ۱۶ (صفحہ ۱۱۶)

۱- ۳، $\frac{۹}{۱۴}$ ۳- ۱

امثلہ ۱۷ (صفحہ ۱۲۴)

۱- (۱) $\pm \frac{۲۴}{۲۵}$ (۲) $\pm \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$ (۳) $\frac{۲۰۱۶}{۴۲۲۵}$

۲- (۱) $\frac{۱۶۱}{۲۸۹}$ (۲) $-\frac{۷}{۲۵}$ (۳) $\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$

۳- و

امثلہ ۱۸ (صفحہ ۱۴۰)

۱- $\frac{\pm ۲\sqrt{۲} \pm \sqrt{۳}}{۶}$ ، $\frac{\pm ۷\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۲}}{۱۸}$

۲- $\pm \frac{۱۳}{۱۲}$ ، $\pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ یا $\pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ ، $\frac{۱۶۹}{۱۲۰}$

۳- $\frac{۱۶}{۳۰۵}$ ، $\frac{۴۹}{۳۰۵}$ ۴- $\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}$

۵- $\pm \frac{۱}{۳}$ ، $\pm \frac{۳}{۴}$ ۶- $\pm \frac{۳}{۴}$

۷- $\frac{\sqrt{۴ - \sqrt{۲} - \sqrt{۶}}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\frac{\sqrt{۴ + \sqrt{۲} + \sqrt{۶}}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\sqrt{۲} - ۱$ ،

$-(۱ + \sqrt{۲}) + \sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$

۸- $\sqrt{\frac{۴ - ا^۲ - ب^۲}{ا^۲ + ب^۲}}$ ۲۳- + اور −

۲۴- − اور −   ۲۵- − اور −

۲۹- (۱) $۲ن\pi + \frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{۳\pi}{۴}$

(۲) $۲ن\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{۵\pi}{۴}$

(۳) $۲ن\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{\pi}{۴}$

(۴) $۲ن\pi + \frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{۳\pi}{۴}$

۳۰- (۱) $۲ن\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{\pi}{۴}$

(۲) $۲ن\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{۵\pi}{۴}$

(۳) $۲ن\pi + \frac{۵\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{۷\pi}{۴}$

امثلہ ۱۹ (صفحہ ۱۴۷)

۱۲- زاویہ کی جیب ۲ جب ۱۸° کے برابر ہے۔

۱۳- $\frac{ن\pi}{۸}$ یا $(۲ن \pm \frac{۱}{۳})\frac{\pi}{۸}$

امثلہ ۲۱ (صفحہ ۱۶۳)

۱- $\frac{ن\pi}{۴}$ یا $\frac{۱}{۲}(۲ن\pi \pm \frac{\pi}{۳})$

۲- $(ن + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۴}$ یا $(۲ن \pm \frac{۱}{۳})\frac{\pi}{۳}$

۳ $(ن + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲}$ یا $۲ن\pi$

۴- $(ن + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲}$ یا $ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۶}$

۵- $\frac{۲ن\pi}{۳}$ یا $(ن + \frac{۱}{۴})\pi$ یا $(۲ن - \frac{۱}{۲})\pi$

۶- $\frac{ن\pi}{۳}$ یا $(۲ن \pm \frac{۱}{۳})\frac{\pi}{۴}$

۷- $(ن + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲}$ یا $۲ن\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۸- $ن\frac{\pi}{۲}$ یا $(ن \pm \frac{۱}{۳})\pi$

۹- $۲ن\pi$ یا $(\frac{۱}{۲} + \frac{۲ن}{۳})\pi$

۱۰- $ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۶}$ یا $ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۱۰}$ یا $ن\pi - (-۱)^{ن}\frac{۳\pi}{۱۰}$

۱۱- $(ن + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۸}$ یا $(ن + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲}$

۱۲- $م\pi$ یا $\frac{۱}{ن-۱}\left[م\pi - (-۱)^{م}\frac{\pi}{۶}\right]$

۱۳- ۲م π یا $\frac{۴م\pi}{ن \pm ۱}$

۱۴- $\frac{۲ر\pi}{م+ن}$ یا $(۲ر+۱)\frac{\pi}{م-ن}$

۱۵- $(۲ر+۱)\frac{\pi}{م \pm ن}$

۱۶- مπ یا $\frac{م\pi}{ن-۱}$ یا $(م+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{ن}$

۱۷- ۲نπ - $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{۱}{۵}$(۲نπ - $\frac{\pi}{۲}$)

۱۸- نπ + $(-۱)^{ن}\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}$ ۱۹- ۲نπ + $\frac{\pi}{۴}$

۲۰- نπ + $\frac{\pi}{۶}$ + $(-۱)^{ن}\frac{\pi}{۴}$ ۲۱- ۲نπ + $\frac{\pi}{۴}$ ± ۱

۲۲- ۲۱°۴۸′ + ن × ۱۸۰° + $(-۱)^{ن}$ [۹۸° ۱۲′]

۲۳- ۲ن × ۱۸۰° + ۷۸°۵۸′ ، ۲ن × ۱۸۰° + ۲۷°۱۸′

۲۴- ن × ۱۸۰° + ۴۵° ، ن × ۱۸۰° + ۲۶°۳۴′

۲۵- ۲نπ + $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲۶- ۲نπ یا ۲نπ + $\frac{\pi}{۲}$

۲۷- ۲نπ + $\frac{\pi}{۲}$ یا ۲نπ - $\frac{\pi}{۳}$

۲۸- ۲نπ + $\frac{\pi}{۶}$

۲۹- ن π　　　۳۰- جب ط = (± √۱۷ − ۱)/۸

۳۱- جم ط = (√۱۷ − ۳)/۴　　　۳۲- ن π ± π/۳ یا ن π + π/۲

۳۳- ۲ن π ± π/۳ ، ۲ن π ± π/۴　　　۳۴- (ن + ۱/۴) π/۲

۳۵- ن π ± π/۴　　　۳۶- ن π + π/۴

۳۷- ط = ن π/۲ یا ن π ± π/۳ نیز ط = ن π ± ع/۲ جہاں جم ع = ۱/۴

۳۸- (ن + ۱/۳) π/۳　　　۳۹- ن π ± π/۳

امثلہ ۲۳ (صفحہ ۱۸۵)

۱- ۱̄٫۹۰۳۰۹ ، ۳̄٫۴۷۷۱۲۱۳ ، ۲̄٫۰۳۳۴۲۳۹ ، ۱̄٫۴۶۵۰۳۸۹

۲- ۱٫۱۵۵۳۳۶۱ ، ۲̄٫۱۲۴۱۶۸۱ ، ۲٫۵۳۸۸۴۲۰ ،
۱̄٫۰۷۵۹۶۲۴

۳- ۲ ، ۲̄ ، ۰ ، ۴̄ ، ۲̄ ، ۰ ، ۳　　　۴- ۳٫۱۲۹۳۶

۵- ۱٫۳۴۲۰۵۷ ، ۵٫۸۸۴۵۳ ، ۴٫۶۱۷۹۱

۶- (۱) ۲۱ (۲) ۱۳ (۳) ۳۰ (۴) ساتواں (۵) ۲۱ واں
(۶) ۳۲ واں

۷- (۱) ۴ب / (ج − ب − ا)　　　(۲) (ا + ۲ب) / (۴ج − ۳ب − ۲ا)

(۳) (۴ا + ۷ب) / (ا + ۳ب − ۲ج)　　　(۴) ۲ب (۲ا − ب) / (۵اب + ۳اج − ۲ب² − بج)

اور
$$\frac{\text{۲ اب}}{\text{۵ اب + ۳ اج − ۲ ب}^{۲}\text{ − ب ج}}$$
جہاں ا = لوگ ۲، ب = لوگ ۳ اور ج = لوگ ۷

۸- ٫۲۲۲۲۱ ۹- ۸٫۶۴۱۵ ۱۰- ۹٫۶۱۹۲

۱۱- ۱٫۶۲۸۹ ۱۲- ۳٫۷۱۶۲ ۱۳- ٫۴۱۴۳۱

امثلہ ۲۴ (صفحہ ۱۹۸)

۱- ۴٫۵۵۲۷۳۷۵ ، ۱٫۵۵۵۲۷۳۹۴

۲- ۴٫۷۶۸۹۵۲۹ ، ۳̄٫۷۶۸۹۵۰۲

۳- ۴۷۸٫۴۷۵ ، ٫۰۰۴۷۸۴۷۷۷

۴- ۲٫۵۸۳۶۷۴ ، ٫۰۲۵۸۳۶۲

۵- (۱) ۴٫۷۲۰۴۸۱۵ (۲) ۲٫۷۲۲۰۴۶۲

(۳) ۴̄٫۷۲۴۰۰۷۹ (۴) ۵۲۷۳٫۶۳

(۵) ٫۰۵۲۹۶۷۲۶ (۶) ۵٫۲۶۰۶۴

۶- ٫۶۸۷۰۴۱۷ ۷- ۴۳° ۱۳′ ۴۵″

۸- ٫۸۴۵۵۱۰۴ ، ٫۸۴۵۴۵۰۹

۹- ۳۲° ۱۶′ ۳۵″ ، ۳۲° ۱۶′ ۲۱″

۱۰- ۴٫۱۲۰۳۰۶۰ ، ۴٫۱۲۱۸۷۴۸

۱۱- ۴٫۳۹۹۳۲۶۳ ، ۴٫۳۹۷۶۸۲۳

۱۲- ۱۳° ۸′ ۴۷″ ۱۳- ۹٫۹۱۴۷۳۳۴

۱۴- ۳۴° ۴۴′ ۲۷″ ۱۵- ۹٫۵۲۵۴۴۹۷، ۷۱° ۲۷′ ۴۳″

۱۶- ۱۰٫۰۲۲۹۴۱۴ ۱۷- ۱۸° ۲۷′ ۱۷″

۱۸- ۳۶° ۵۲′ ۱۲″

امثلہ ۲۵ (صفحہ ۲۰۸)

۱- ۱۳° ۲۷′ ۳۱″ ، ۲- ۲۳° ۱′ ۲۸″

۳- ۴۰ ، ۱۰٫۰۹۹۷۳ ، ۶۵° ۲۴′ ۱۲٫۵″

۴- ۹٫۶۱۹۸۵۰۹ ، ۲۲° ۳۶′ ۲۸″

۵- ۱۰° ۱۵′ ۳۳″ ، ۶- ۴۴° ۵۵′ ۵۵″

۷- (۱) ۹٫۷۲۷۹۰۴۳ (۲) ۹٫۹۲۷۰۸۵۷

(۳) ۱۰٫۱۹۵۸۹۱۷ (۴) ۱۰٫۰۷۵۷۹۰۷

(۵) ۱۰٫۲۰۰۱۳۳۷ (۶) ۱۰٫۰۷۲۵۰۲۷

(۷) ۹٫۷۲۳۵۱۴۲

۸- (۱) ۵° ۳۰′ ۴۲″ (۲) ۵۷° ۳۱′ ۵۸″

(۳) ۳۲° ۳۱′ ۱۵″ (۴) ۵۷° ۶′ ۳۹″

۹- ٫۵۳۷۳۶۰۲

۱۰- (۱) جم (لا − ما) قطلا قطما (۲) جم (لا + ما) قطلا قطما

(۳) جم (لا − ما) قملا قطما

(۴) جم (لا + ما) قملا قطما

(۵) نس۲ ما (۶) سس لا سس ما

امثلہ ۲۶ (صفحہ ۲۱۸)

۱- $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۹}{۷}$

۲- $\frac{۴}{\sqrt{۴۱}}$ ، $\frac{۳}{۵}$ اور $\frac{۸}{۵\sqrt{۴۱}}$ ، $\frac{۴۰}{۴۱}$ ، $\frac{۲۴}{۲۵}$ اور $\frac{۴۹۶}{۱۰۲۵}$

۳- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، ۱ ۴- $\frac{۵}{۱۲}$ ، $\frac{۱۲}{۵}$ اور ∞

۵- ۳/۵، ۵۶/۶۵ اور ۱۲/۱۳

۶- ۷/۴۱ اور ۲۸۷/۸۱۶ ۷- ۶۰°، ۴۵°، ۷۵°

امثلہ ۲۷ (صفحہ ۲۲۵)

۲۳- ۱۶ ۴/۵ فٹ ۲۵- ۲/۵ ۲۸- ۳۱۳/۳۳۸

امثلہ ۲۸ (صفحہ ۲۳۲)

۱- ...... ۱۸۶٫۶۰ اور ۱۹۳٫۱۸

۲- ۲۶° ۳۳′ ۵۴″، ۶۳° ۲۶′ ۶″، ۱۰ ۵/۷ فٹ

۳- ۴۸° ۳۵′ ۲۵″، ۳۶° ۵۲′ ۱۲″، ۹۴° ۳۲′ ۲۳″

۴- ۷۵° اور ۱۵°

امثلہ ۲۹ (صفحہ ۲۳۵)

۱- ۹۰° ۲- ۳۰° ۴- ۱۲۰°

۵- ۴۵°، ۱۲۰°، ۱۵° ۶- ۴۵°، ۶۰°، ۷۵°

۷- ۵۸° ۵۹′ ۳۳″ ۸- ۷۷° ۱۹′ ۱۱″

۹- ۷۶° ۳۹′ ۵″ ۱۰- ۱۰۴° ۲۸′ ۳۹″

۱۱- ۵۶° ۱۵′ ۴″، ۵۹° ۵۱′ ۱۰″، ۶۳° ۵۳′ ۴۶″

۱۲- ۳۸° ۵۶′ ۳۳″، ۴۷° ۴۱′ ۷″، ۹۳° ۴۲′ ۳۰″

۱۳- ۱۳۰° ۴۳′ ۲۰٫۵″، ۲۳° ۲۷′ ۸٫۵″ اور

۲۵° ۵۰′ ۳۱″

امثلہ ۳۰ (صفحہ ۲۴۱)

۱- ۶۳° ۱۳′ ۲″، ۴۳° ۵۸′ ۲۸″

۲- ۱۱۷° ۳۸′ ۴۵″، ۲۷° ۳۸′ ۴۵″

۳- ۸√۷ فٹ، ۷۹° ۶′ ۲۴″، ۶۰°، ۴۰° ۵۳′ ۳۶″

۴- ۸۷° ۲۷′ ۲۵٫۵″، ۳۲° ۳۲′ ۳۴٫۵″

۵- ۴۰° ۵۳′ ۳۶″، ۱۹° ۶′ ۲۴″، √۷ : ۲

۶- ۷۱° ۴۴′ ۳۰″ : ۴۸° ۱۵′ ۳۰″

۷- ۷۸° ۱۷′ ۴۰″، ۴۹° ۳۶′ ۲۰″

۸- ۱۰۸° ۱۲′ ۲۶″، ۴۹° ۲۷′ ۴۴″

۹ ا = ۴۰°، ب = ۷۵°، ج = √۶

۱۰- √۶، ۱۵°، ۱۰۵°

۱۱- ٫۸۹۶۵ ۱۴- ۴۰ گز، ۱۲۰°، ۳۰°

۱۵- ٫۵۸۹۴۶۷، ۱۰۸° ۲۶′ ۶″، ۱۸° ۲۶′ ۶″، ۵۳° ۷′ ۴۸″

۱۶- ۲٫۵۲۹۸۲۳

۱۷- ۲۲۶٫۸۷، ۷۳° ۳۴′ ۵۰″، ۳۹° ۴۵′ ۱۰″

۱۸- ا = ۸۳° ۷′ ۳۹″، ب = ۴۲° ۱۶′ ۲۱″،
ج = ۱۹۹٫۰۹۹

۱۹- ب = ۱۱۰° ۴۸′ ۱۵″، ج = ۲۶° ۵۶′ ۱۵″ اور
ا = ۹۳٫۵۱۹۲

۲۰- ۷۳° ۱′ ۵۱″ اور ۴۸° ۴۱′ ۹″

۲۱- ۸۸° ۳۰′ ۱″ اور ۳۳° ۳۰′ ۵۹″

امثلہ ۳۱ (صفحہ ۲۵۱)

۱- مثلث نہیں بن سکتا۔

۲- ب$_۱$ = ۳۰°، ج$_۱$ = ۱۰۵°، ب$_۱$ = $\sqrt{۲}$ اور ب$_۲$ = ۹۰°
ج$_۲$ = ۱۵° اور ب$_۲$ = $\sqrt{۶}$

۳- ب$_۱$ = ۱۵°، ج$_۱$ = ۱۳۵°، ب$_۱$ = ۵۰ ($\sqrt{۶}$ − $\sqrt{۲}$)
اور ب$_۲$ = ۱۰۵°، ج$_۲$ = ۴۵°، ب$_۲$ = ۵۰ ($\sqrt{۶}$ + $\sqrt{۲}$)

۵- ۴$\sqrt{۳}$ ± ۲$\sqrt{۵}$

۶- ۱۰۰$\sqrt{۳}$، مثلث قائم الزاویہ ہے

۸- ۳۳° ۲۹′ ۳۰″ اور ۱۰۱° ۳۰′ ۳۰″

۹- ۱۷٫۱ یا ۳٫۶۸

۱۰- (۱) مثلث قائم الزاویہ ہے اور ب = ۶۰°
(۲) ب$_۱$ = ۶۰٫۳۸۹۳، ب$_۱$ = ۸° ۴۱′ اور ج$_۱$ = ۱۴۱° ۱۹′
ب = ۱۱۱° ۱۹′ اور ج$_۲$ = ۴۸° ۴۱′

۱۱- ۶۵° ۵۹′ اور ۴۱° ۵۶′ ۱۲″

۱۲- ۵٫۹۸۸......... اور ۲٫۶۷۱۸......... میل فی گھنٹہ

۱۳- ۶۳° ۲′ ۱۲″ یا ۱۱۶° ۵۷′ ۴۸″

۱۴- ۹۲° ۳۱′ ۲۳″ اور ۱۰۲° ۱۷′ ۳۷″
یا ۱۱۷° ۲۸′ ۳۷″ اور ۴۷° ۲۰′ ۲۳″

۱۵- ۵۹۲۶٫۶۱

امثلہ ۳۲ (صفحہ ۲۵۴)

۱- ۷ : ۹ : ۱۱

۴- ۷۹٫۰۶۳

۵- ا میل، ۲۱٫۱۹۷۱۴۰۰... میل

۷- ۲۰٫۹۷۶۱۱.... فٹ

۸- ۶٫۸۵۶۷۳ اور .... ۵٫۴۳۷۸۴۶۸ فٹ

۹- ۴۰۴٫۴۳۵۲ فٹ

۱۰- ۲۳۳٫۲۸۸۳ گز

۱۱- ۲۲۲۹ گز

امثلہ ۳۳ (صفحہ ۲۶۰)

۱- ۱۰۰ فٹ اونچا اور ۵۰ فٹ چوڑا، ۲۵ فٹ

۲- ۲۵٫۷۸۳۴ گز
۳- ...... ۳۳٫۰۷ فٹ، $۱۷\frac{۱}{۲}$ فٹ

۴- ...... ۱۸٫۲ فٹ
۵- ...... ۱۲۰ فٹ

۶- ح مس ۶ حم ب
۷- ۱۹۳۹٫۲ فٹ

۸- ۱۰۰ فٹ
۹- ۶۱٫۲۲۴ فٹ

۱۰- ۱۰۰ $\sqrt[۳]{۲}$ فٹ

۱۵- ف ق = ب ف = ب ق = ۱۰۰۰ فٹ،

ا ف = ۵۰۰ ($\sqrt{۶}$ - $\sqrt{۲}$) فٹ

ا ق = ۱۰۰۰ $\sqrt{۲}$ فٹ

۱۶- ٫۳۲۱۱۹ میل

۱۷- ٫۱۷۳۶۲۸۲ میل، ٫۹۸۴۸۰۷۸ میل۔

۱۸- ۱۱۹٫۲۸۶۲ فٹ
۱۹- ۱۳۲٫۲۶۶ فٹ

۲۰- ۲۳۵٫۸۰۳۴ گز
۲۱- ۱٫۴۲۷۷۱ میل

۲۲- ۱۲۵٫۳۱۶۷ فٹ

امثلہ ۳۴ (صفحہ ۲۶۹)

۳- ۲۰ فٹ، ۴۰ فٹ

۴- ل قم جہ جہاں جہ سورج کا ارتفاع ہے،

جب جہ = $\frac{۲}{ب}$

۵- ...... ۲٫۷۳۲ میل، رفتار ...... ۱۲٫۳۲۲ میل فی گھنٹہ مشرق سے جنوب کی جانب میں ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا حماس $\sqrt{۲}$ + ۱ ہے۔

۶- ...... ۱۰٫۲۴۲۶ میل فی گھنٹہ

۷- ...... ۱۶٫۳۹۲۳ میل، ...... ۱۴٫۶۹۷ میل

۸- ۲٫۳۹ میل، ۱٫۳۶۶ میل

۹- زاویہ مطلوبہ کا مماس $\frac{۲}{۳}$ ہے - $\frac{۹}{۵۲}$ گھنٹہ

۱۳- ج جب بہ قم (عہ + بہ)، ج جب عہ جب بہ قم (عہ + بہ)

۱۴- ۹ گز، ۲ گز

۱۶- $\frac{ل}{۳}$ ، $\frac{۲ل}{۳}$

۲۰- ٹیلے سے $\frac{۳۷۵}{\sqrt{۷}}$ فٹ کے فاصلہ پر۔

۲۱- ج (۱-جب عہ) قطعہ

۲۲- ۱۱۴٫۴۱۲۳ فٹ

۲۴- ۱۰۶۹٫۷۴۵۶۲۵ فٹ

۲۶- ایک ایسا زاویہ جس کا مماس $\frac{۱}{۲}$ ہے -

۲۹- ۴۵°

۳۲- ۱۸° ۲۶′ ۶″

۳۴- مس عہ قط بہ : ۱

۳۷- ۹۱٫۸۹۶ فٹ

۳۸- ۱۹۶۰٫۹۵ گز

۳۹- ۲٫۴۵۸۳۲ میل

۴۰- ۳۳۳٫۴۹۳۲ فٹ

امثلہ ۳۵ (صفحہ ۲۷۹)

۱- ۸۴

۲- ۲۱۶

۳- ۶۳۰

۴- ۳۷۲۰

۵- ۲۷۰

۶- ۱۱۷۰٫۹۶

۷- ۱۴۷۰

۸- ۱:۱۸۳

۱۲- ۳۵ گز اور ۲۶ گز

۱۳- ...... ۱۱۴٫۹۴۱ انچ

۱۴- ۵، ۷، ۸ فٹ

۱۵- ۱۲۰°

۱۷- ۴۵° اور ۱۰۵°، ۱۳۵° اور ۱۵°

۱۸- ۱۷٫۱۰۶۴ مربع انچ

امثلہ ۳۶- (صفحہ ۲۸۸)

۳- $\frac{۱}{۸}$، ۸، ۱$\frac{۱}{۲}$، ۸، ۲، ۲۴ بالترتیب

امثلہ ۳۷ (صفحہ ۳۰۰)

۳۵- ہر ایک دائرہ کے نصف قطر کا .....۲۰۱۵۴۷ یا ۷ ۱۵۴ ، ۱ گنا

۳۶- ان = $\frac{\pi}{3}$ + (-۱)ن × ۲ن × (۱ - $\frac{\pi}{3}$)، .....

امثلہ ۳۸ (صفحہ ۳۱۱)

۱- (۱) ۳ $\sqrt{۱۰۵}$ مربع فٹ (۲) ۱۰ $\sqrt{۷}$ مربع فٹ

۲- ۱ $\frac{۵}{۷}$ اور ۲ $\frac{۱}{۲}$ فٹ

امثلہ ۳۹ (صفحہ ۳۱۶)

۱- ۹۸ء۷۷ انچ ۲- ۵۳۵۹ء

۳- (۱) .... ۷۲۰ء۱ مربع فٹ (۲) ..... ۵۹۸ء۲ مربع فٹ

(۳) .....۸۲۸۴ء۴ مربع فٹ (۴) ..... ۶۹۴ء۷ مربع فٹ

(۵) ......۱۹۶ء۱۱ مربع فٹ

۴- .... ۸۶۶ء۱ مربع فٹ ۵- ۳۱۳۶ء۳ مربع فٹ

۶- ۲ + $\sqrt{۲}$: ۴ ، $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$: ۳

۱۲- ۳ ۱۴- ۶

۱۵- ۹ ۱۶- ۲۰ اور ۱۰

۱۷- ۶ اور ۵، ۱۲ اور ۸، ۱۸ اور ۱۰

۲۲ اور ۱۱، ۲۷ اور ۱۲، ۴۲ اور ۱۴

۵۴ اور ۱۵، ۷۲ اور ۱۶، ۱۰۲ اور ۱۷

۱۶۲ اور ۱۸، ۳۴۲ اور ۱۹، اضلاع بالترتیب

۱۹- $\frac{۳}{۴}$ $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۶}$

امثلہ ۴۰ (صفحہ ۳۲۶)

۱- ٫۰۰۲۰۴   ۲- ٫۰۰۰۰۷

۳- ٫۰۰۰۲۹   ۴- ٫۹۹۹۹۹

۵- ۲۵۷۸۳٫۱۰۰۷۷   ۶- ۱٫۰۰۰۰۰۱۱

۷- ۳۴′ ۲۳″   ۸- ۲۸° ۴۰′ ۳۷″

۹- ۳۹′ ۴۲″   ۱۰- ۲° ۳۳′ ۴۴″

۱۱- ..... ۱۱۴٫۵۹ انچ

امثلہ ۴۱ (صفحہ ۳۲۹)

۱- ۴۳۵٫۷۷ مربع فٹ   ۲- ... ۴٫۹۰۸۷ مربع فٹ

۳- ۱۲۷° ۱۹′ ۲۶″   ۴- ۶ مربع فٹ

۵- ۱۱٫۰۰۰۴ انچ   ۶- ٫۰۰۰۴۴۶۲۵ انچ

۷- ۲۲ ۲/۳ ر

امثلہ ۴۲ (صفحہ ۳۳۲)

۱- ۱° ۸′ ۴۵″   ۲- ۱۷٫۲۳ میل

۳- ۱۱٫۶۱ میل، ۱° ۸′ ۴۸ تقریباً

۸- تقریباً ۶۱،۸۰۰ میٹر = تقریباً ۳۸ ۱/۲ میل

۹- ۳۹۶۰ میل

امثلہ ۴۳ (صفحہ ۳۴۱)

۲۸- ± √(جب ۲ ہ) ۲۹- ۱/۶

۳۰- ± ۱/√۲ ۳۱- ۴ √(۳/۷)

۳۲- ۱/۴ ۳۳- ن π یا ن π + π/۴

۳۴- √۲ ۳۵ √۵/۳

۳۶- √۳ یا −(۲ + √۳)

۳۷- √۳ یا ۲ − √۳

۳۸- ن یا ن۲ − ن + ۱ ۳۹- ۱/۲ √(۳/۷)

۴۰- ۱۳

۴۱- لا مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے:

لا۴ − لا۲ (اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د) + اب ج د = ۰

۴۲- لا = اب

۴۳- اب ÷ [√(ا۲ − ۱) + √(ب۲ − ۱)]

۴۴- (ا − ب)/(۱ + اب)

امثلہ ۴۴ (صفحہ ۳۵۱)

۱- ۱/۲ جب ۲ن ط قم ط

۲- جم (۳ن − ۱)/۴ ا ، جب (۳ن/۴) ا ، قم (۳/۴) ا

۶- $\frac{1}{2}$

۷- جب [عہ + (ن - $\frac{1}{2}$) بہ] جب ن بہ قط بہ/۲

۸- جب ن طہ/(ن - ۲)

۹- جب ۲ ن لا (جم ۲ ن لا + جب ۲ ن لا) (جم لا + جب لا) قم ۲ لا

۱۰- $\frac{1}{4}$ [(ن + ۱) جب ۲ عہ - جب (۲ن + ۲) عہ] قم عہ

۱۱- $\frac{1}{2}$ جب (۲ن + ۲) عہ × جب ۲ ن عہ قم عہ

۱۲- ن/۲ جم ۲ عہ - $\frac{1}{2}$ جم (ن + ۳) عہ جب ن عہ قم عہ

۱۳- [جم (۲ن عہ - عہ) جم (ن + ۱) بہ - جم (۲ن عہ + عہ) جم ن بہ + جم عہ (۱ - جم بہ)] / ۲ (جم بہ - جم ۲ عہ)

۱۴- $\frac{1}{4}$ [(۲ن + ۱) جب عہ - جب (۲ن + ۱) عہ] قم عہ

۱۵- ن/۲ - $\frac{1}{2}$ جم [۲ طہ + (ن - ۱) عہ] جب ن عہ قم عہ

۱۶- $\frac{3}{4}$ جب (ن + ۱)/۲ عہ جب ن عہ/۲ قم عہ/۲

- $\frac{1}{4}$ جب ۳ (ن + ۱)/۲ عہ × جب ۳ ن عہ/۲ قم ۳ عہ/۲

۱۷- $\frac{1}{8}$ [۳ن - ۴ جم (ن + ۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ن + ۲) عہ جب ۲ن عہ قم ۲ عہ]

۱۸- $\frac{1}{8}$ [۳ن + ۴ جم (ن + ۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ن + ۲) عہ جب ۲ ن عہ قم ۲ عہ]

۱۹- $\frac{۱}{۴}$ جب $\frac{ن ط}{۲}$ [جم $\frac{ن-۱}{۲}$ ط + جم $\frac{ن+۳}{۲}$ ط + جم $\frac{ن+۷}{۲}$ ط] قم $\frac{ط}{۲}$

+ $\frac{۱}{۴}$ جب $\frac{۳ ن ط}{۲}$ جم $\frac{۳ن+۹}{۲}$ ط قم $\frac{۳ ط}{۲}$

۲۰- - $\frac{۱}{۲}$ جب (۲ عہ + ۲ن بہ) جب ۲ن بہ قط بہ

امثلہ ۴۵ (صفحہ ۳۵۸)

۱- $ا^{۲} + ب^{۲} = ج^{۲} + د^{۲}$

۲- $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} - \frac{۲ لا ما}{اب}$ جم (عہ - بہ) = جب^{۲} (عہ - بہ)

۳- $ا(۲ج^{۲} - د^{۲}) = ب د ج$

۴- ا جب عہ + ب جم عہ = $\sqrt{۲ب (ا+ب)}$

۵- $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$

۶- $\frac{لا^{۲}}{ا} + \frac{ما^{۲}}{ب} = ا + ب$

۷- $(ف^{۲}+۱)^{۲} + ۲ق (ف^{۲}+۱)(ف + ق) = ۴ (ف + ق)^{۲}$

۸- $(لا^{۲} + ما^{۲} - ب^{۲})^{۲} = ا^{۲} [(لا + ب)^{۲} + ما^{۲}]$

۱۱- $ا^{۲} + ب^{۲} = ۲ + ۲$ جم عہ

۱۲- لا ما = (ما - لا) سس عہ

۱۳- $ا^{۲} (ا - ج)(ا - د) = ب^{۲} (ب - ج)(ب - د)$

۱۴- $۸ ب ج = ا \{ ۴ب^{۲} + (ب^{۲} - ج^{۲})^{۲} \}$

۱۵- لا (ج۲ - ا۲ - ب۲)

= ما √(ا + ب + ج)(-ا + ب + ج)(ا - ب + ج)(ا + ب - ج)

۱۶- ب۲ [لا (ب۲ - ا۲) + ا (ا۲ + ب۲)]۲ = ۴ ج۳ [ب۲ لا۲ + ا۲ ما۲]

متفرق مثالیں (صفحہ ۳۶۷)

۴- ۱۴۲ فٹ تقریباً، ۴۴° ۳۰' تقریباً

۵- ۴۱، ۵۰، ۲۱ فٹ

۷- جب (ہ - ع) = ± √ا - ب √ا - ا۲ ∓ ا √ا ب

۹- ن π + ۳۸° ۷' ۲۷"

۱۰- (ن + ۱/۴) π/۲ ۱۴- ۷ - ۳√۵ : ۲

۲۱- (۱) ط = ن π + (-۱)ن (ع + ہ)/۲

یا مس ط = (۱ - قم ع قم ہ) مس (ع + ہ)/۲

(۲) ط = ن π یا (ن ± ۱/۴) π/۲

۲۲- ۵۱° ۱۹' ، ۷۸° ۲۸' ، ۱۰۸° ۱۳'

۲۳- ۱۲۹۸ فٹ تقریباً، ۱۳° ۳۱' جنوب سے مشرق کی طرف کو۔

۲۸- ۸۰ فٹ

۳۰- ۱/۲ مس-۱ لا، (لا + ما)/(۱ - لا ما)

۳۱- (ل۲ + م۲) (۱ - ن) = ۲م (۱ + ن)

۳۲- دو اصلیں

۳۵- (م ± ۱/۱۲) π، (ن ± ۱/۶) π

۴۷- (ل۲ - ۱)۳ = ۲۷ ل۲ جم۲ عہ جب۲ عہ

۴۸- ۳۹ء۱ نیمقطری = ۷۹° ۳۰َ تقریباً

۴۹- جب۲ (بہ - جہ) قط۲ (عہ - بہ) قط۲ (عہ - جہ)

۵۲- ۱۱° ۱۲َ مشرق سے شمال کی طرف کو

۵۴- چھ قیمتیں

۵۸- ۱/۴ [ن π + π/۲ - عہ - بہ - جہ]

۵۹- ۷۷ء۲۳ فٹ

۶۲- ج √(۲و - ب) = ل√(۲و) - (و - ب) √ب

۶۳- ۱/۲ ۱۸°

۶۴- ۱۰° ۱۹َ + ۱/۲ ۲۸، + ۱/۲ ۵۰َ تقریباً

۶۹ ا جب عہ جب بہ / √(جب (بہ - عہ) جب (بہ + عہ))

۷۳- جم (عہ + بہ + جہ + لہ) + جم (عہ + بہ - جہ - لہ)
+ جم (عہ - بہ + جہ - لہ) + جم (عہ - بہ - جہ + لہ) - جم (- عہ + بہ + جہ + لہ)
- جم (عہ - بہ + جہ + لہ) - جم (عہ + بہ - جہ + لہ) - جم (عہ + بہ + جہ - لہ)

۷۶- ۶۶° ۱/۲ ۱۹َ تقریباً

۸۰- لا = - ۲۷۴۵۳۱

۸۲- مس طہ = ۲ ± √۱۱ یا ۲ ± √۳
مس فہ = ۲ ∓ √۱۱ یا ۲ ∓ √۳

۸۴- ۴۷٫۱۶ میل

۸۷- ۲۷ا^2 = لا^2 (۹ - ۸لا^2)

۹۴- ۲ر^2 + ج = ۳ ر (۱ + ب)

۹۵- جب $\frac{\text{ن ط}}{۲}$ جب $\frac{(\text{ن} + ۳)\text{ط}}{۲}$ [۱ + ۲ جم ۲ ط] قم $\frac{\text{ط}}{۲}$

- جب $\frac{۳\text{ن} + ۹}{۲}$ ط جب $\frac{۳\text{ن ط}}{۲}$ قم $\frac{۳\text{ط}}{۲}$

۹۶- ۲٫۵۵ نصف قطری = ۱۴۶° ۶' تقریباً

۱۰۴- مس ط = ۰، ۱، -۱، -۲

۱۰۸- ۲۳۷۹ فٹ

۱۱۷- ۱۱° ۲۷'

۱۲۰- لا^2 + ا^2 = ر^2 + ب^2

۱۲۸- (ر^2 + ب^2) - ۲ ر^2 = $\frac{۸\text{ ر ب}}{\text{ج}}$

۱۳۶- (لا + ا)$^{۲/۵}$ + (لا - ا)$^{۲/۵}$ = ۲

۱۳۸- $\frac{\text{م ج}_1 + \text{ن ج}_2 + \sqrt{\text{م}^2\text{ج}_1^2 + \text{ن}^2\text{ج}_2^2 + ۲\text{م ن ج}_1\text{ج}_2 \text{ جم(ع - جہ)}} \text{ جب (ن ت + ب)}}{\text{م + ن}}$

جہاں مس ب = (م ج$_2$ جب جہ + ن ج$_1$ جب ع) ÷ (م ج$_2$ جم جہ + ن ج$_1$ جم ع)

۱۴۶- م^2 + م جم ع = ۲

۱۴۸- $\frac{1}{3}$ ۷۷°، $\frac{1}{2}$ ۶۳°

۱۵۱- (لا^2 + ا^2 + ۲ ر لا)^2 = ۴ ر^2 (لا^2 + ا^2)

۱۶۱- (۱ - لا^2 - ا^2) جب (ع - ل) جب (ب - جہ$_2$)

۱۷۶- ا^{۴} + ب^{۴} + ج^{۴} − ۲ ب^{۲} ج^{۲} − ۲ ج^{۲} ا^{۲} − ۲ ا^{۲} ب^{۲} = ۰

۱۷۷- لا^{۲} ما^{۲} − ۴ لا ما = (لا + ما)^{۲} مسں^{۲} (ب − ع)

۱۷۸- ب^{۲} (√۳ لا − ما)^{۲} {۶ (لا^{۲} − ما^{۲}) − ب^{۲}}

= ۸ (لا^{۲} − ما^{۲})^{۳} + ۴ ب^{۲} (لا^{۲} − ما^{۲})

۱۸۱- تین اصلیں ۲۹۹° تقریباً

۱۸۲- ۹۸ء۸ نیمقطری = ۵۶° ۹' تقریباً

۱۸۵- ۲ء۰۷ اور ۱ء۲۳

عددوں کے لوگارتھم

طبعی جیوب ، طبعی مماس

لوگارتمی جیوب اور لوگارتمی مماس وغیرہ

جدول اوّل

	عددوں کے لوگارتھم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۰۰۰۰۰	۰۰۴۳۲	۰۰۸۶۰	۰۱۲۸۴	۰۱۷۰۳	۰۲۱۱۹	۰۲۵۳۱	۰۲۹۳۸	۰۳۳۴۲	۰۳۷۴۳	۴۲	۸۳	۱۲۵	۱۶۶	۲۰۸	۲۴۸	۲۹۰	۳۳۱	۳۷۳
۱۱	۰۴۱۳۹	۰۴۵۳۲	۰۴۹۲۲	۰۵۳۰۸	۰۵۶۹۰	۰۶۰۷۰	۰۶۴۴۶	۰۶۸۱۹	۰۷۱۸۸	۰۷۵۵۵	۳۸	۷۶	۱۱۴	۱۵۲	۱۹۰	۲۲۷	۲۶۵	۳۰۲	۳۴۰
۱۲	۰۷۹۱۸	۰۸۲۷۹	۰۸۶۳۶	۰۸۹۹۱	۰۹۳۴۲	۰۹۶۹۱	۱۰۰۳۷	۱۰۳۸۰	۱۰۷۲۱	۱۱۰۵۹	۳۵	۷۰	۱۰۵	۱۴۰	۱۷۵	۲۰۹	۲۴۳	۲۷۸	۳۱۳
۱۳	۱۱۳۹۴	۱۱۷۲۷	۱۲۰۵۷	۱۲۳۸۵	۱۲۷۱۰	۱۳۰۳۳	۱۳۳۵۴	۱۳۶۷۲	۱۳۹۸۸	۱۴۳۰۱	۳۲	۶۵	۹۷	۱۲۹	۱۶۲	۱۹۳	۲۲۵	۲۵۸	۲۹۰
۱۴	۱۴۶۱۳	۱۴۹۲۲	۱۵۲۲۹	۱۵۵۳۴	۱۵۸۳۶	۱۶۱۳۷	۱۶۴۳۵	۱۶۷۳۲	۱۷۰۲۶	۱۷۳۱۹	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۷۰
۱۵	۱۷۶۰۹	۱۷۸۹۸	۱۸۱۸۴	۱۸۴۶۹	۱۸۷۵۲	۱۹۰۳۳	۱۹۳۱۲	۱۹۵۹۰	۱۹۸۶۶	۲۰۱۴۰	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۴۰	۱۶۸	۱۹۶	۲۲۴	۲۵۲
۱۶	۲۰۴۱۲	۲۰۶۸۳	۲۰۹۵۲	۲۱۲۱۹	۲۱۴۸۴	۲۱۷۴۸	۲۲۰۱۱	۲۲۲۷۲	۲۲۵۳۱	۲۲۷۸۹	۲۶	۵۳	۷۹	۱۰۵	۱۳۲	۱۵۸	۱۸۴	۲۱۰	۲۳۷
۱۷	۲۳۰۴۵	۲۳۳۰۰	۲۳۵۵۳	۲۳۸۰۵	۲۴۰۵۵	۲۴۳۰۴	۲۴۵۵۱	۲۴۷۹۷	۲۵۰۴۲	۲۵۲۸۵	۲۵	۵۰	۷۴	۹۹	۱۲۳	۱۴۹	۱۷۴	۱۹۹	۲۲۳
۱۸	۲۵۵۲۷	۲۵۷۶۸	۲۶۰۰۷	۲۶۲۴۵	۲۶۴۸۲	۲۶۷۱۷	۲۶۹۵۱	۲۷۱۸۴	۲۷۴۱۶	۲۷۶۴۶	۲۳	۴۷	۷۰	۹۴	۱۱۷	۱۴۱	۱۶۴	۱۸۸	۲۱۱
۱۹	۲۷۸۷۵	۲۸۱۰۳	۲۸۳۳۰	۲۸۵۵۶	۲۸۷۸۰	۲۹۰۰۳	۲۹۲۲۶	۲۹۴۴۷	۲۹۶۶۷	۲۹۸۸۵	۲۲	۴۵	۶۷	۸۹	۱۱۱	۱۳۴	۱۵۶	۱۷۸	۲۰۱

											فرق								
۲۰	۳۰۱۰۳	۳۰۳۲۰	۳۰۵۳۵	۳۰۷۵۰	۳۰۹۶۳	۳۱۱۷۵	۳۱۳۸۷	۳۱۵۹۷	۳۱۸۰۶	۳۲۰۱۵	۲۱	۴۲	۶۴	۸۵	۱۰۶	۱۲۷	۱۴۸	۱۷۰	۱۹۱
۲۱	۳۲۲۲۲	۳۲۴۲۸	۳۲۶۳۴	۳۲۸۳۸	۳۳۰۴۱	۳۳۲۴۴	۳۳۴۴۵	۳۳۶۴۶	۳۳۸۴۶	۳۴۰۴۴	۲۰	۴۰	۶۱	۸۱	۱۰۱	۱۲۱	۱۴۱	۱۶۲	۱۸۲
۲۲	۳۴۲۴۲	۳۴۴۳۹	۳۴۶۳۵	۳۴۸۳۰	۳۵۰۲۵	۳۵۲۱۸	۳۵۴۱۱	۳۵۶۰۳	۳۵۷۹۳	۳۵۹۸۴	۱۹	۳۹	۵۸	۷۷	۹۷	۱۱۶	۱۳۵	۱۵۴	۱۷۴
۲۳	۳۶۱۷۳	۳۶۳۶۱	۳۶۵۴۹	۳۶۷۳۶	۳۶۹۲۲	۳۷۱۰۷	۳۷۲۹۱	۳۷۴۷۵	۳۷۶۵۸	۳۷۸۴۰	۱۹	۳۷	۵۶	۷۴	۹۳	۱۱۱	۱۳۰	۱۴۸	۱۶۷
۲۴	۳۸۰۲۱	۳۸۲۰۲	۳۸۳۸۲	۳۸۵۶۱	۳۸۷۳۹	۳۸۹۱۷	۳۹۰۹۴	۳۹۲۷۰	۳۹۴۴۵	۳۹۶۲۰	۱۸	۳۶	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۷	۱۲۴	۱۴۲	۱۶۰
۲۵	۳۹۷۹۴	۳۹۹۶۷	۴۰۱۴۰	۴۰۳۱۲	۴۰۴۸۳	۴۰۶۵۴	۴۰۸۲۴	۴۰۹۹۳	۴۱۱۶۲	۴۱۳۳۰	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۵	۱۰۲	۱۱۹	۱۳۶	۱۵۳
۲۶	۴۱۴۹۷	۴۱۶۶۴	۴۱۸۳۰	۴۱۹۹۶	۴۲۱۶۰	۴۲۳۲۵	۴۲۴۸۸	۴۲۶۵۱	۴۲۸۱۳	۴۲۹۷۵	۱۶	۳۳	۴۹	۶۶	۸۲	۹۸	۱۱۵	۱۳۱	۱۴۸
۲۷	۴۳۱۳۶	۴۳۲۹۷	۴۳۴۵۷	۴۳۶۱۶	۴۳۷۷۵	۴۳۹۳۳	۴۴۰۹۱	۴۴۲۴۸	۴۴۴۰۴	۴۴۵۶۰	۱۶	۳۲	۴۷	۶۳	۷۹	۹۵	۱۱۱	۱۲۶	۱۴۲
۲۸	۴۴۷۱۶	۴۴۸۷۱	۴۵۰۲۵	۴۵۱۷۹	۴۵۳۳۲	۴۵۴۸۴	۴۵۶۳۷	۴۵۷۸۸	۴۵۹۳۹	۴۶۰۹۰	۱۵	۳۰	۴۶	۶۱	۷۶	۹۱	۱۰۶	۱۲۲	۱۳۷
۲۹	۴۶۲۴۰	۴۶۳۸۹	۴۶۵۳۸	۴۶۶۸۷	۴۶۸۳۵	۴۶۹۸۲	۴۷۱۲۹	۴۷۲۷۶	۴۷۴۲۲	۴۷۵۶۷	۱۵	۲۹	۴۴	۵۹	۷۴	۸۸	۱۰۳	۱۱۸	۱۳۲
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

	عددوں کے لوگارتم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳۰	۴۷۷۱۲	۴۷۸۵۷	۴۸۰۰۱	۴۸۱۴۴	۴۸۲۸۷	۴۸۴۳۰	۴۸۵۷۲	۴۸۷۱۴	۴۸۸۵۵	[illegible]	۱۴	۲۹	۴۳	۵۷	۷۲	۸۶	۱۰۰	۱۱۴	۱۲۹
۳۱	۴۹۱۳۶	۴۹۲۷۶	۴۹۴۱۵	۴۹۵۵۴	۴۹۶۹۳	۴۹۸۳۱	۴۹۹۶۹	۵۰۱۰۶	۵۰۲۴۳	۵۰۳۷۹	۱۴	۲۸	۴۲	۵۵	۶۹	۸۳	۹۷	۱۱۰	۱۲۵
۳۲	۵۰۵۱۵	۵۰۶۵۱	۵۰۷۸۶	۵۰۹۲۰	۵۱۰۵۵	۵۱۱۸۸	۵۱۳۲۲	۵۱۴۵۵	۵۱۵۸۷	۵۱۷۲۰	۱۳	۲۷	۴۰	۵۴	۶۷	۸۰	۹۴	۱۰۷	۱۲۱
۳۳	۵۱۸۵۱	۵۱۹۸۳	۵۲۱۱۴	۵۲۲۴۴	۵۲۳۷۵	۵۲۵۰۴	۵۲۶۳۴	۵۲۷۶۳	۵۲۸۹۲	۵۳۰۲۰	۱۳	۲۶	۳۹	۵۲	۶۵	۷۸	۹۱	۱۰۴	۱۱۷
۳۴	۵۳۱۴۸	۵۳۲۷۵	۵۳۴۰۳	۵۳۵۲۹	۵۳۶۵۶	۵۳۷۸۲	۵۳۹۰۸	۵۴۰۳۳	۵۴۱۵۸	۵۴۲۸۳	۱۳	۲۵	۳۸	۵۰	۶۳	۷۶	۸۸	۱۰۱	۱۱۳
۳۵	۵۴۴۰۷	۵۴۵۳۱	۵۴۶۵۴	۵۴۷۷۷	۵۴۹۰۰	۵۵۰۲۳	۵۵۱۴۵	۵۵۲۶۷	۵۵۳۸۸	۵۵۵۰۹	۱۲	۲۴	۳۷	۴۹	۶۱	۷۳	۸۶	۹۸	۱۱۰
۳۶	۵۵۶۳۰	۵۵۷۵۱	۵۵۸۷۱	۵۵۹۹۱	۵۶۱۱۰	۵۶۲۲۹	۵۶۳۴۸	۵۶۴۶۷	۵۶۵۸۵	۵۶۷۰۳	۱۲	۲۴	۳۶	۴۸	۶۰	۷۱	۸۳	۹۵	۱۰۷
۳۷	۵۶۸۲۰	۵۶۹۳۷	۵۷۰۵۴	۵۷۱۷۱	۵۷۲۸۷	۵۷۴۰۳	۵۷۵۱۹	۵۷۶۳۴	۵۷۷۴۹	۵۷۸۶۴	۱۲	۲۳	۳۵	۴۶	۵۸	۷۰	۸۱	۹۳	۱۰۴
۳۸	۵۷۹۷۸	۵۸۰۹۲	۵۸۲۰۶	۵۸۳۲۰	۵۸۴۳۳	۵۸۵۴۶	۵۸۶۵۹	۵۸۷۷۱	۵۸۸۸۳	۵۸۹۹۵	۱۱	۲۳	۳۴	۴۵	۵۷	۶۸	۷۹	۹۰	۱۰۲
۳۹	۵۹۱۰۶	۵۹۲۱۸	۵۹۳۲۹	۵۹۴۳۹	۵۹۵۵۰	۵۹۶۶۰	۵۹۷۷۰	۵۹۸۷۹	۵۹۹۸۸	۶۰۰۹۷	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶	۷۷	۸۸	۹۹

											فرق								
۴۰	۶۰۲۰۶	۶۰۳۱۴	۶۰۴۲۳	۶۰۵۳۱	۶۰۶۳۸	۶۰۷۴۶	۶۰۸۵۳	۶۰۹۵۹	۶۱۰۶۶	۶۱۱۷۲	۱۱	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۴	۷۵	۸۶	۹۷
۴۱	۶۱۲۷۸	۶۱۳۸۴	۶۱۴۹۰	۶۱۵۹۵	۶۱۷۰۰	۶۱۸۰۵	۶۱۹۰۹	۶۲۰۱۴	۶۲۱۱۸	۶۲۲۲۱	۱۰	۲۱	۳۱	۴۲	۵۲	۶۳	۷۳	۸۴	۹۴
۴۲	۶۲۳۲۵	۶۲۴۲۸	۶۲۵۳۱	۶۲۶۳۴	۶۲۷۳۷	۶۲۸۳۹	۶۲۹۴۱	۶۳۰۴۳	۶۳۱۴۴	۶۳۲۴۶	۱۰	۲۰	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱	۷۱	۸۲	۹۲
۴۳	۶۳۳۴۷	۶۳۴۴۸	۶۳۵۴۸	۶۳۶۴۹	۶۳۷۴۹	۶۳۸۴۹	۶۳۹۴۹	۶۴۰۴۸	۶۴۱۴۷	۶۴۲۴۶	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
۴۴	۶۴۳۴۵	۶۴۴۴۴	۶۴۵۴۲	۶۴۶۴۰	۶۴۷۳۸	۶۴۸۳۶	۶۴۹۳۳	۶۵۰۳۱	۶۵۱۲۸	۶۵۲۲۵	۱۰	۲۰	۲۹	۳۹	۴۹	۵۹	۶۸	۷۸	۸۸
۴۵	۶۵۳۲۱	۶۵۴۱۸	۶۵۵۱۴	۶۵۶۱۰	۶۵۷۰۶	۶۵۸۰۱	۶۵۸۹۶	۶۵۹۹۲	۶۶۰۸۷	۶۶۱۸۱	۱۰	۱۹	۲۹	۳۸	۴۸	۵۷	۶۷	۷۶	۸۶
۴۶	۶۶۲۷۶	۶۶۳۷۰	۶۶۴۶۴	۶۶۵۵۸	۶۶۶۵۲	۶۶۷۴۵	۶۶۸۳۹	۶۶۹۳۲	۶۷۰۲۵	۶۷۱۱۷	۹	۱۹	۲۸	۳۷	۴۷	۵۶	۶۵	۷۵	۸۴
۴۷	۶۷۲۱۰	۶۷۳۰۲	۶۷۳۹۴	۶۷۴۸۶	۶۷۵۷۸	۶۷۶۶۹	۶۷۷۶۱	۶۷۸۵۲	۶۷۹۴۳	۶۸۰۳۴	۹	۱۸	۲۷	۳۷	۴۶	۵۵	۶۴	۷۳	۸۲
۴۸	۶۸۱۲۴	۶۸۲۱۵	۶۸۳۰۵	۶۸۳۹۵	۶۸۴۸۵	۶۸۵۷۴	۶۸۶۶۴	۶۸۷۵۳	۶۸۸۴۲	۶۸۹۳۱	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۳	۶۲	۷۱	۸۰
۴۹	۶۹۰۲۰	۶۹۱۰۸	۶۹۱۹۷	۶۹۲۸۵	۶۹۳۷۳	۶۹۴۶۱	۶۹۵۴۸	۶۹۶۳۶	۶۹۷۲۳	۶۹۸۱۰	۹	۱۸	۲۶	۳۵	۴۴	۵۳	۶۱	۷۰	۷۹
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

عددوں کے لوگارثم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۶۹۸۹۷	۶۹۹۸۴	۷۰۰۷۰	۷۰۱۵۷	۷۰۲۴۳	۷۰۳۲۹	۷۰۴۱۵	۷۰۵۰۱	۷۰۵۸۶	۷۰۶۷۲	۹	۱۷	۲۶	۳۴	۴۳	۵۲	۶۰	۶۹	۷۷
۵۱	۷۰۷۵۷	۷۰۸۴۲	۷۰۹۲۷	۷۱۰۱۲	۷۱۰۹۶	۷۱۱۸۱	۷۱۲۶۵	۷۱۳۴۹	۷۱۴۳۳	۷۱۵۱۷	۸	۱۷	۲۵	۳۴	۴۲	۵۱	۵۹	۶۷	۷۶
۵۲	۷۱۶۰۰	۷۱۶۸۴	۷۱۷۶۷	۷۱۸۵۰	۷۱۹۳۳	۷۲۰۱۶	۷۲۰۹۹	۷۲۱۸۱	۷۲۲۶۳	۷۲۳۴۶	۸	۱۷	۲۵	۳۳	۴۲	۵۰	۵۸	۶۶	۷۵
۵۳	۷۲۴۲۸	۷۲۵۰۹	۷۲۵۹۱	۷۲۶۷۳	۷۲۷۵۴	۷۲۸۳۵	۷۲۹۱۶	۷۲۹۹۷	۷۳۰۷۸	۷۳۱۵۹	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۱	۴۹	۵۷	۶۵	۷۳
۵۴	۷۳۲۳۹	۷۳۳۲۰	۷۳۴۰۰	۷۳۴۸۰	۷۳۵۶۰	۷۳۶۴۰	۷۳۷۱۹	۷۳۷۹۹	۷۳۸۷۸	۷۳۹۵۷	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲
۵۵	۷۴۰۳۶	۷۴۱۱۵	۷۴۱۹۴	۷۴۲۷۳	۷۴۳۵۱	۷۴۴۲۹	۷۴۵۰۷	۷۴۵۸۶	۷۴۶۶۳	۷۴۷۴۱	۸	۱۶	۲۳	۳۱	۳۹	۴۷	۵۵	۶۲	۷۰
۵۶	۷۴۸۱۹	۷۴۸۹۶	۷۴۹۷۴	۷۵۰۵۱	۷۵۱۲۸	۷۵۲۰۵	۷۵۲۸۲	۷۵۳۵۸	۷۵۴۳۵	۷۵۵۱۱	۸	۱۵	۲۳	۳۱	۳۹	۴۶	۵۴	۶۲	۶۹
۵۷	۷۵۵۸۷	۷۵۶۶۴	۷۵۷۴۰	۷۵۸۱۵	۷۵۸۹۱	۷۵۹۶۷	۷۶۰۴۲	۷۶۱۱۸	۷۶۱۹۳	۷۶۲۶۸	۸	۱۵	۲۳	۳۰	۳۸	۴۵	۵۳	۶۰	۶۸
۵۸	۷۶۳۴۳	۷۶۴۱۸	۷۶۴۹۲	۷۶۵۶۷	۷۶۶۴۱	۷۶۷۱۶	۷۶۷۹۰	۷۶۸۶۴	۷۶۹۳۸	۷۷۰۱۲	۷	۱۵	۲۲	۳۰	۳۷	۴۵	۵۲	۵۹	۶۷
۵۹	۷۷۰۸۵	۷۷۱۵۹	۷۷۲۳۲	۷۷۳۰۵	۷۷۳۷۹	۷۷۴۵۲	۷۷۵۲۵	۷۷۵۹۷	۷۷۶۷۰	۷۷۷۴۳	۷	۱۵	۲۲	۲۹	۳۷	۴۴	۵۱	۵۸	۶۶

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۶۰	۷۷۸۱۵	۷۷۸۸۷	۷۷۹۶۰	۷۸۰۳۲	۷۸۱۰۴	۷۸۱۷۶	۷۸۲۴۷	۷۸۳۱۹	۷۸۳۹۰	۷۸۴۶۲	۷	۱۴	۲۲	۲۹	۳۶	۴۳	۵۰	۵۷	۶۵
۶۱	۷۸۵۳۳	۷۸۶۰۴	۷۸۶۷۵	۷۸۷۴۶	۷۸۸۱۷	۷۸۸۸۸	۷۸۹۵۸	۷۹۰۲۹	۷۹۰۹۹	۷۹۱۶۹	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۴
۶۲	۷۹۲۳۹	۷۹۳۰۹	۷۹۳۷۹	۷۹۴۴۹	۷۹۵۱۸	۷۹۵۸۸	۷۹۶۵۷	۷۹۷۲۷	۷۹۷۹۶	۷۹۸۶۵	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳
۶۳	۷۹۹۳۴	۸۰۰۰۳	۸۰۰۷۲	۸۰۱۴۰	۸۰۲۰۹	۸۰۲۷۷	۸۰۳۴۶	۸۰۴۱۴	۸۰۴۸۲	۸۰۵۵۰	۷	۱۴	۲۱	۲۷	۳۴	۴۱	۴۸	۵۵	۶۲
۶۴	۸۰۶۱۸	۸۰۶۸۶	۸۰۷۵۴	۸۰۸۲۱	۸۰۸۸۹	۸۰۹۵۶	۸۱۰۲۳	۸۱۰۹۰	۸۱۱۵۸	۸۱۲۲۴	۷	۱۳	۲۰	۲۷	۳۴	۴۰	۴۷	۵۴	۶۰
۶۵	۸۱۲۹۱	۸۱۳۵۸	۸۱۴۲۵	۸۱۴۹۱	۸۱۵۵۸	۸۱۶۲۴	۸۱۶۹۰	۸۱۷۵۷	۸۱۸۲۳	۸۱۸۸۹	۷	۱۳	۲۰	۲۶	۳۳	۴۰	۴۶	۵۳	۵۹
۶۶	۸۱۹۵۴	۸۲۰۲۰	۸۲۰۸۶	۸۲۱۵۱	۸۲۲۱۷	۸۲۲۸۲	۸۲۳۴۷	۸۲۴۱۳	۸۲۴۷۸	۸۲۵۴۳	۷	۱۳	۲۰	۲۶	۳۳	۳۹	۴۶	۵۲	۵۹
۶۷	۸۲۶۰۷	۸۲۶۷۲	۸۲۷۳۷	۸۲۸۰۲	۸۲۸۶۶	۸۲۹۳۰	۸۲۹۹۵	۸۳۰۵۹	۸۳۱۲۳	۸۳۱۸۷	۶	۱۳	۱۹	۲۶	۳۲	۳۹	۴۵	۵۲	۵۸
۶۸	۸۳۲۵۱	۸۳۳۱۵	۸۳۳۷۸	۸۳۴۴۲	۸۳۵۰۶	۸۳۵۶۹	۸۳۶۳۲	۸۳۶۹۶	۸۳۷۵۹	۸۳۸۲۲	۶	۱۳	۱۹	۲۵	۳۲	۳۸	۴۴	۵۰	۵۷
۶۹	۸۳۸۸۵	۸۳۹۴۸	۸۴۰۱۱	۸۴۰۷۳	۸۴۱۳۶	۸۴۱۹۸	۸۴۲۶۱	۸۴۳۲۳	۸۴۳۸۶	۸۴۴۴۸	۶	۱۳	۱۹	۲۵	۳۱	۳۷	۴۴	۵۰	۵۶
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

	عددوں کے لوگارتم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۷۰	۸۴۵۱۰	۸۴۵۷۲	۸۴۶۳۴	۸۴۶۹۴	۸۴۷۵۷	۸۴۸[illegible]	۸۴۸۸۰	۸۴۹۴۲	۸۵۰۰۳	۸۵۰۶۵	۶	۱۲	۱۸	۲۵	۳۱	۳۷	۴۳	۴۹	۵۵
۷۱	۸۵۱۲۶	۸۵۱۸۷	۸۵۲۴۸	۸۵۳۰۹	۸۵۳۷۰	۸۵۴۳۱	۸۵۴۹۱	۸۵۵۵۲	۸۵۶۱۲	۸۵۶۷۳	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۹	۵۵
۷۲	۸۵۷۳۳	۸۵۷۹۴	۸۵۸۵۴	۸۵۹۱۴	۸۵۵۷۴	۸۶۰۳۴	۸۶۰۹۴	۸۶۱۵۴	۸۶۲۱۳	۸۶۲۷۳	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴
۷۳	۸۶۳۳۲	۸۶۳۹۲	۸۶۴۵۱	۸۶۵۱۰	۸۶۵۷۰	۸۶۶۲۹	۸۶۶۸۸	۸۶۷۴۷	۸۶۸۰۶	۸۶۸۶۴	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۵	۴۱	۴۷	۵۳
۷۴	۸۶۹۲۳	۸۶۹۸۲	۸۷۰۴۰	۸۷۰۹۹	۸۷۱۵۷	۸۷۲۱۶	۸۷۲۷۴	۸۷۳۳۲	۸۷۳۹۰	۸۷۴۴۸	۶	۱۲	۱۸	۲۳	۲۹	۳۵	۴۱	۴۷	۵۲
۷۵	۸۷۵۰۶	۸۷۵۶۴	۸۷۶۲۲	۸۷۶۷۹	۸۷۷۳۷	۸۷۷۹۵	۸۷۸۵۲	۸۷۹۱۰	۸۷۹۶۷	۸۸۰۲۴	۶	۱۲	[illegible]	۲۳	۲۹	۳۵	۴۰	۴۶	۵۲
۷۶	۸۸۰۸۱	۸۸۱۳۸	۸۸۱۹۵	۸۸۲۵۲	۸۸۳۰۹	۸۸۳۶۶	۸۸۴۲۳	۸۸۴۸۰	۸۸۵۳۶	۸۸۵۹۳	۶	۱۱	۱۷	۲۳	۲۹	۳۴	۴۰	۴۶	۵۱
۷۷	۸۸۶۴۹	۸۸۷۰۵	۸۸۷۶۲	۸۸۸۱۸	۸۸۸۷۴	۸۸۹۳۰	۸۸۹۸۶	۸۹۰۴۲	۸۹۰۹۸	۸۹۱۵۴	۶	۱۱	۱۷	۲۳	۲۸	۳۴	۳۹	۴۵	۵۰
۷۸	۸۹۲۰۹	۸۹۲۶۵	۸۹۳۲۱	۸۹۳۷۶	۸۹۴۳۲	۸۹۴۸۷	۸۹۵۴۲	۸۹۵۹۷	۸۹۶۵۳	۸۹۷۰۸	۶	۱۱	۱۷	۲۲	۲۸	۳۳	۳۹	۴۴	۵۰
۷۹	۸۹۷۶۳	۸۹۸۱۸	۸۹۸۷۳	۸۹۹۲۷	۸۹۹۸۲	۹۰۰۳۷	۹۰۰۹۱	۹۰۱۴۶	۹۰۲۰۰	۹۰۲۵۵	۵	۱۱	۱۶	۲۲	۲۷	۳۳	۳۸	۴۴	۴۹

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸۰	۹۰۳۰۹	۹۰۳۶۳	۹۰۴۱۷	۹۰۴۷۲	۹۰۵۲۶	۹۰۵۸۰	۹۰۶۳۴	۹۰۶۸۷	۹۰۷۴۱	۹۰۷۹۵	۵	۱۱	۱۶	۲۲	۲۷	۳۲	۳۸	۴۳	۴۹
۸۱	۹۰۸۴۹	۹۰۹۰۲	۹۰۹۵۶	۹۱۰۰۹	۹۱۰۶۲	۹۱۱۱۶	۹۱۱۶۹	۹۱۲۲۲	۹۱۲۷۵	۹۱۳۲۸	۵	۱۱	۱۶	۲۱	۲۷	۳۲	۳۷	۴۳	۴۸
۸۲	۹۱۳۸۱	۹۱۴۳۴	۹۱۴۸۷	۹۱۵۴۰	۹۱۵۹۳	۹۱۶۴۵	۹۱۶۹۸	۹۱۷۵۱	۹۱۸۰۳	۹۱۸۵۵	۵	۱۱	۱۶	۲۱	۲۶	۳۲	۳۷	۴۲	۴۷
۸۳	۹۱۹۰۸	۹۱۹۶۰	۹۲۰۱۲	۹۲۰۶۵	۹۲۱۱۷	۹۲۱۶۹	۹۲۲۲۱	۹۲۲۷۳	۹۲۳۲۴	۹۲۳۷۶	۵	۱۰	۱۶	۲۱	۲۶	۳۱	۳۶	۴۲	۴۷
۸۴	۹۲۴۲۸	۹۲۴۸۰	۹۲۵۳۱	۹۲۵۸۳	۹۲۶۳۴	۹۲۶۸۶	۹۲۷۳۷	۹۲۷۸۸	۹۲۸۴۰	۹۲۸۹۱	۵	۱۰	۱۵	۲۱	۲۶	۳۱	۳۶	۴۱	۴۶
۸۵	۹۲۹۴۲	۹۲۹۹۳	۹۳۰۴۴	۹۳۰۹۵	۹۳۱۴۶	۹۳۱۹۷	۹۳۲۴۷	۹۳۲۹۸	۹۳۳۴۹	۹۳۳۹۹	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۶	۴۱	۴۶
۸۶	۹۳۴۵۰	۹۳۵۰۰	۹۳۵۵۱	۹۳۶۰۱	۹۳۶۵۱	۹۳۷۰۲	۹۳۷۵۲	۹۳۸۰۲	۹۳۸۵۲	۹۳۹۰۲	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
۸۷	۹۳۹۵۲	۹۴۰۰۲	۹۴۰۵۲	۹۴۱۰۱	۹۴۱۵۱	۹۴۲۰۱	۹۴۲۵۰	۹۴۳۰۰	۹۴۳۴۹	۹۴۳۹۹	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
۸۸	۹۴۴۴۸	۹۴۴۹۸	۹۴۵۴۷	۹۴۵۹۶	۹۴۶۴۵	۹۴۶۹۴	۹۴۷۴۳	۹۴۷۹۲	۹۴۸۴۱	۹۴۸۹۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۲۹	۳۴	۳۹	۴۴
۸۹	۹۴۹۳۹	۹۴۹۸۸	۹۵۰۳۶	۹۵۰۸۵	۹۵۱۳۴	۹۵۱۸۲	۹۵۲۳۱	۹۵۲۷۹	۹۵۳۲۸	۹۵۳۷۶	۵	۱۰	۱۵	۱۹	۲۴	۲۹	۳۴	۳۹	۴۴
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

عددوں کے لوگارتم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۹۰	۹۵۴۲۴	۹۵۴۷۲	۹۵۵۲۱	۹۵۵۶۹	۹۵۶۱۷	۹۵۶۶۵	۹۵۷۱۳	۹۵۷۶۱	۹۵۸۰۹	۹۵۸۵۶	۵	۱۰	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۴	۳۸	۴۳
۹۱	۹۵۹۰۴	۹۵۹۵۲	۹۵۹۹۹	۹۶۰۴۷	۹۶۰۹۵	۹۶۱۴۲	۹۶۱۹۰	۹۶۲۳۷	۹۶۲۸۴	۹۶۳۳۲	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۳	۳۸	۴۳
۹۲	۹۶۳۷۹	۹۶۴۲۶	۹۶۴۷۳	۹۶۵۲۰	۹۶۵۶۷	۹۶۶۱۴	۹۶۶۶۱	۹۶۷۰۸	۹۶۷۵۵	۹۶۸۰۲	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۴	۲۸	۳۳	۳۸	۴۲
۹۳	۹۶۸۴۸	۹۶۸۹۵	۹۶۹۴۲	۹۶۹۸۸	۹۷۰۳۵	۹۷۰۸۱	۹۷۱۲۸	۹۷۱۷۴	۹۷۲۲۰	۹۷۲۶۷	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۳	۲۸	۳۳	۳۷	۴۲
۹۴	۹۷۳۱۳	۹۷۳۵۹	۹۷۴۰۵	۹۷۴۵۱	۹۷۴۹۷	۹۷۵۴۳	۹۷۵۸۹	۹۷۶۳۵	۹۷۶۸۱	۹۷۷۲۷	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۸	۳۲	۳۷	۴۱
۹۵	۹۷۷۷۲	۹۷۸۱۸	۹۷۸۶۴	۹۷۹۰۹	۹۷۹۵۵	۹۸۰۰۰	۹۸۰۴۶	۹۸۰۹۱	۹۸۱۳۷	۹۸۱۸۲	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۷	۳۲	۳۶	۴۱
۹۶	۹۸۲۲۷	۹۸۲۷۲	۹۸۳۱۸	۹۸۳۶۳	۹۸۴۰۸	۹۸۴۵۳	۹۸۴۹۸	۹۸۵۴۳	۹۸۵۸۸	۹۸۶۳۲	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۷	۳۲	۳۶	۴۱
۹۷	۹۸۶۷۷	۹۸۷۲۲	۹۸۷۶۷	۹۸۸۱۱	۹۸۸۵۶	۹۸۹۰۰	۹۸۹۴۵	۹۸۹۸۹	۹۹۰۳۴	۹۹۰۷۸	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۷	۳۱	۳۶	۴۰
۹۸	۹۹۱۲۳	۹۹۱۶۷	۹۹۲۱۱	۹۹۲۵۵	۹۹۳۰۰	۹۹۳۴۴	۹۹۳۸۸	۹۹۴۳۲	۹۹۴۷۶	۹۹۵۲۰	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۶	۳۱	۳۵	۴۰
۹۹	۹۹۵۶۴	۹۹۶۰۷	۹۹۶۵۱	۹۹۶۹۵	۹۹۷۳۹	۹۹۷۸۲	۹۹۸۲۶	۹۹۸۷۰	۹۹۹۱۳	۹۹۹۵۷	۴	۹	۱۳	۱۷	۲۲	۲۶	۳۰	۳۵	۳۹
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

	طبعی جیوب							فرق								
	′۰	′۱۰	′۲۰	′۳۰	′۴۰	′۵۰		′۱	′۲	′۳	′۴	′۵	′۶	′۷	′۸	′۹
°۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۹۱	۰٫۰۰۵۸۲	۰٫۰۰۸۷۳	۰٫۰۱۱۶۴	۰٫۰۱۴۵۴	°۸۹	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
°۱	۰٫۰۱۷۴۵	۰٫۰۲۰۳۶	۰٫۰۲۳۲۷	۰٫۰۲۶۱۸	۰٫۰۲۹۰۸	۰٫۰۳۱۹۹	°۸۸	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
°۲	۰٫۰۳۴۹۰	۰٫۰۳۷۸۱	۰٫۰۴۰۷۱	۰٫۰۴۳۶۲	۰٫۰۴۶۵۳	۰٫۰۴۹۴۳	°۸۷	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
°۳	۰٫۰۵۲۳۴	۰٫۰۵۵۲۴	۰٫۰۵۸۱۴	۰٫۰۶۱۰۵	۰٫۰۶۳۹۵	۰٫۰۶۶۸۵	°۸۶	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
°۴	۰٫۰۶۹۷۶	۰٫۰۷۲۶۶	۰٫۰۷۵۵۶	۰٫۰۷۸۴۶	۰٫۰۸۱۳۶	۰٫۰۸۴۲۶	°۸۵	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
°۵	۰٫۰۸۷۱۶	۰٫۰۹۰۰۵۰	۰٫۰۹۲۹۵	۰٫۰۹۵۸۵	۰٫۰۹۸۷۴	۰٫۱۰۱۶۳	°۸۴	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
°۶	۰٫۱۰۴۵۳	۰٫۱۰۷۴۲	۰٫۱۱۰۳۱	۰٫۱۱۳۲۰	۰٫۱۱۶۰۹	۰٫۱۱۸۹۸	°۸۳	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
°۷	۰٫۱۲۱۸۷	۰٫۱۲۴۷۶	۰٫۱۲۷۶۴	۰٫۱۳۰۵۳	۰٫۱۳۳۴۱	۰٫۱۳۶۲۹	°۸۲	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۳	۲۰۲	۲۳۱	۲۶۰
°۸	۰٫۱۳۹۱۷	۰٫۱۴۲۰۵	۰٫۱۴۴۹۳	۰٫۱۴۷۸۱	۰٫۱۵۰۶۹	۰٫۱۵۳۵۶	°۸۱	۲۹	۵۸	۸۶	۱۱۵	۱۴۴	۱۷۳	۲۰۲	۲۳۰	۲۵۹
°۹	۰٫۱۵۶۴۳	۰٫۱۵۹۳۱	۰٫۱۶۲۱۸	۰٫۱۶۵۰۵	۰٫۱۶۷۹۲	۰٫۱۷۰۷۸	°۸۰	۲۹	۵۷	۸۶	۱۱۵	۱۴۴	۱۷۲	۲۰۱	۲۳۰	۲۵۸
	′۶۰	′۵۰	′۴۰	′۳۰	′۲۰	′۱۰		′۱	′۲	′۳	′۴	′۵	′۶	′۷	′۸	′۹

طبعی جیوب التمام

	طبعی جیوب							فرق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۱۰°	۰٫۱۷۳۶۵	۰٫۱۷۶۵۱	۰٫۱۷۹۳۷	۰٫۱۸۲۲۴	۰٫۱۸۵۰۹	۰٫۱۸۷۹۵	۷۹°	۲۹	۵۷	۸۶	۱۱۵	۱۴۴	۱۷۲	۲۰۱	۲۲۹	۲۵۸
۱۱°	٫۱۹۰۸۱	٫۱۹۳۶۶	٫۱۹۶۵۲	٫۱۹۹۳۷	٫۲۰۲۲۲	٫۲۰۵۰۷	۷۸°	۲۹	۵۷	۸۶	۱۱۴	۱۴۳	۱۷۱	۲۰۰	۲۲۸	۲۵۷
۱۲°	٫۲۰۷۹۱	٫۲۱۰۷۶	٫۲۱۳۶۰	٫۲۱۶۴۴	٫۲۱۹۲۸	٫۲۲۲۱۲	۷۷°	۲۸	۵۷	۸۵	۱۱۴	۱۴۲	۱۷۰	۱۹۹	۲۲۷	۲۵۶
۱۳°	٫۲۲۴۹۵	٫۲۲۷۷۸	٫۲۳۰۶۲	٫۲۳۳۴۵	٫۲۳۶۲۷	٫۲۳۹۱۰	۷۶°	۲۸	۵۷	۸۵	۱۱۳	۱۴۱	۱۷۰	۱۹۸	۲۲۶	۲۵۵
۱۴°	٫۲۴۱۹۲	٫۲۴۴۷۴	٫۲۴۷۵۶	٫۲۵۰۳۸	٫۲۵۳۲۰	٫۲۵۶۰۱	۷۵°	۲۸	۵۶	۸۵	۱۱۳	۱۴۱	۱۶۹	۱۹۷	۲۲۶	۲۵۴
۱۵°	۰٫۲۵۸۸۲	۰٫۲۶۱۶۳	۰٫۲۶۴۴۳	۰٫۲۶۷۲۴	۰٫۲۷۰۰۴	۰٫۲۷۲۸۴	۷۴°	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۴۰	۱۶۸	۱۹۶	۲۲۴	۲۵۲
۱۶°	٫۲۷۵۶۴	٫۲۷۸۴۳	٫۲۸۱۲۳	٫۲۸۴۰۲	٫۲۸۶۸۰	٫۲۸۹۵۹	۷۳°	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۴۰	۱۶۷	۱۹۵	۲۲۳	۲۵۱
۱۷°	٫۲۹۲۳۷	٫۲۹۵۱۵	٫۲۹۷۹۳	٫۳۰۰۷۱	٫۳۰۳۴۸	٫۳۰۶۲۵	۷۲°	۲۸	۵۶	۸۳	۱۱۱	۱۳۹	۱۶۷	۱۹۴	۲۲۲	۲۵۰
۱۸°	٫۳۰۹۰۲	٫۳۱۱۷۸	٫۳۱۴۵۴	٫۳۱۷۳۰	٫۳۲۰۰۶	٫۳۲۲۸۲	۷۱°	۲۸	۵۵	۸۳	۱۱۰	۱۳۸	۱۶۶	۱۹۳	۲۲۱	۲۴۸
۱۹°	٫۳۲۵۵۷	٫۳۲۸۳۲	٫۳۳۱۰۶	٫۳۳۳۸۱	٫۳۳۶۵۵	٫۳۳۹۲۹	۷۰°	۲۷	۵۵	۸۲	۱۱۰	۱۳۷	۱۶۴	۱۹۲	۲۱۹	۲۴۷

								فرق								
°۲۰	۰.۳۴۲۰۲	۰.۳۴۴۷۵	۰.۳۴۷۴۸	۰.۳۵۰۲۱	۰.۳۵۲۹۳	۰.۳۵۵۶۵	°۶۹	۲۷	۵۵	۸۲	۱۰۹	۱۳۷	۱۶۳	۱۹۱	۲۱۸	۲۴۶
°۲۱	۰.۳۵۸۳۷	۰.۳۶۱۰۸	۰.۳۶۳۷۹	۰.۳۶۶۵۰	۰.۳۶۹۲۱	۰.۳۷۱۹۱	°۶۸	۲۷	۵۴	۸۱	۱۰۸	۱۳۶	۱۶۳	۱۹۰	۲۱۷	۲۴۴
°۲۲	۰.۳۷۴۶۱	۰.۳۷۷۳۰	۰.۳۷۹۹۹	۰.۳۸۲۶۸	۰.۳۸۵۳۷	۰.۳۸۸۰۵	°۶۷	۲۷	۵۴	۸۱	۱۰۸	۱۳۵	۱۶۱	۱۸۸	۲۱۵	۲۴۲
°۲۳	۰.۳۹۰۷۳	۰.۳۹۳۴۱	۰.۳۹۶۰۸	۰.۳۹۸۷۵	۰.۴۰۱۴۲	۰.۴۰۴۰۸	°۶۶	۲۷	۵۳	۸۰	۱۰۷	۱۳۴	۱۶۰	۲۸۷	۲۱۴	۲۴۰
°۲۴	۰.۴۰۶۷۴	۰.۴۰۹۳۹	۰.۴۱۲۰۴	۰.۴۱۴۶۹	۰.۴۱۷۳۴	۰.۴۱۹۹۸	°۶۵	۲۷	۵۳	۸۰	۱۰۶	۱۳۳	۱۵۹	۱۸۶	۲۱۲	۲۳۸
°۲۵	۰.۴۲۲۶۲	۰.۴۲۵۲۵	۰.۴۲۷۸۸	۰.۴۳۰۵۱	۰.۴۳۳۱۳	۰.۴۳۵۷۵	°۶۴	۲۶	۵۲	۷۹	۱۰۵	۱۳۱	۱۵۷	۱۸۴	۲۱۰	۲۳۶
°۲۶	۰.۴۳۸۳۷	۰.۴۴۰۹۸	۰.۴۴۳۵۹	۰.۴۴۶۲۰	۰.۴۴۸۸۰	۰.۴۵۱۴۰	°۶۳	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۴	۱۳۰	۱۵۶	۱۸۲	۲۰۸	۲۳۴
°۲۷	۰.۴۵۳۹۹	۰.۴۵۶۵۸	۰.۴۵۹۱۷	۰.۴۶۱۷۵	۰.۴۶۴۳۳	۰.۴۶۶۹۰	°۶۲	۲۶	۵۲	۷۷	۱۰۳	۱۲۹	۱۵۵	۱۸۱	۲۰۶	۲۳۲
°۲۸	۰.۴۶۹۴۷	۰.۴۷۲۰۴	۰.۴۷۴۶۰	۰.۴۷۷۱۶	۰.۴۷۹۷۱	۰.۴۸۲۲۶	°۶۱	۲۶	۵۱	۷۷	۱۰۲	۱۲۸	۱۵۴	۱۷۹	۲۰۴	۲۳۰
°۲۹	۰.۴۸۴۸۱	۰.۴۸۷۳۵	۰.۴۸۹۸۹	۰.۴۹۲۴۲	۰.۴۹۴۹۵	۰.۴۹۷۴۸	°۶۰	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵	۶′	۷′	۸′	۹′

طبعی جیوب التمام

	طبعی جیوب							زق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۳۰°	٫۵۰۰۰۰	٫۵۰۲۵۲	٫۵۰۵۰۳	٫۵۰۷۵۴	٫۵۱۰۰۴	٫۵۱۲۵۴	۵۹°	۲۵	۵۰	۷۵	۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰	۱۷۵	۲۰۰	۲۲۵
۳۱°	٫۵۱۵۰۴	٫۵۱۷۵۳	٫۵۲۰۰۲	٫۵۲۲۵۰	٫۵۲۴۹۸	٫۵۲۷۴۵	۵۸°	۲۵	۵۰	۷۴	۹۹	۱۲۴	۱۴۹	۱۷۴	۱۹۸	۲۲۳
۳۲°	٫۵۲۹۹۲	٫۵۳۲۳۸	٫۵۳۴۸۴	٫۵۳۷۳۰	٫۵۳۹۷۵	٫۵۴۲۲۰	۵۷°	۲۵	۴۹	۷۴	۹۸	۱۲۳	۱۴۷	۱۷۲	۱۹۶	۲۲۱
۳۳°	٫۵۴۴۶۴	٫۵۴۷۰۸	٫۵۴۹۵۱	٫۵۵۱۹۴	٫۵۵۴۳۶	٫۵۵۶۷۸	۵۶°	۲۴	۴۹	۷۳	۹۷	۱۲۲	۱۴۶	۱۷۰	۱۹۴	۲۱۹
۳۴°	٫۵۵۹۱۹	٫۵۶۱۶۰	٫۵۶۴۰۱	٫۵۶۶۴۱	٫۵۶۸۸۰	٫۵۷۱۱۹	۵۵°	۲۴	۴۸	۷۲	۹۶	۱۲۰	۱۴۴	۱۶۸	۱۹۲	۲۱۶
۳۵°	٫۵۷۳۵۸	٫۵۷۵۹۶	٫۵۷۸۳۳	٫۵۸۰۷۰	٫۵۸۳۰۶	٫۵۸۵۴۳	۵۴°	۲۴	۴۷	۷۱	۹۵	۱۱۹	۱۴۲	۱۶۶	۱۹۰	۲۱۳
۳۶°	٫۵۸۷۷۹	٫۵۹۰۱۴	٫۵۹۲۴۸	٫۵۹۴۸۲	٫۵۹۷۱۶	٫۵۹۹۴۹	۵۳°	۲۳	۴۷	۷۰	۹۴	۱۱۷	۱۴۰	۱۶۴	۱۸۷	۲۱۱
۳۷°	٫۶۰۱۸۲	٫۶۰۴۱۴	٫۶۰۶۴۵	٫۶۰۸۷۶	٫۶۱۱۰۷	٫۶۱۳۳۷	۵۲°	۲۳	۴۶	۷۰	۹۲	۱۱۶	۱۳۹	۱۶۲	۱۸۵	۲۰۸
۳۸°	٫۶۱۵۶۶	٫۶۱۷۹۵	٫۶۲۰۲۴	٫۶۲۲۵۱	٫۶۲۴۷۹	٫۶۲۷۰۶	۵۱°	۲۳	۴۶	۶۸	۹۱	۱۱۴	۱۳۷	۱۵۹	۱۸۲	۲۰۵
۳۹°	٫۶۲۹۳۲	٫۶۳۱۵۸	٫۶۳۳۸۴	٫۶۳۶۰۸	٫۶۳۸۳۲	٫۶۴۰۵۶	۵۰°	۲۲	۴۵	۶۷	۹۰	۱۱۲	۱۳۵	۱۵۷	۱۷۹	۲۰۲

												فرق				
°۴۰	۰٫۶۴۲۷۹	۰٫۶۴۵۰۱	۰٫۶۴۷۲۳	۰٫۶۴۹۴۵	۰٫۶۵۱۶۶	۰٫۶۵۳۸۶	°۴۹	۲۲	۴۴	۶۶	۸۸	۱۱۱	۱۳۳	۱۵۵	۱۷۷	۱۹۹
°۴۱	٫۶۵۶۰۶	٫۶۵۸۲۵	٫۶۶۰۴۴	٫۶۶۲۶۲	٫۶۶۴۸۰	٫۶۶۶۹۷	°۴۸	۲۲	۴۴	۶۵	۸۷	۱۰۹	۱۳۱	۱۵۳	۱۷۴	۱۹۶
°۴۲	٫۶۶۹۱۳	٫۶۷۱۲۹	٫۶۷۳۴۴	٫۶۷۵۵۹	٫۶۷۷۷۳	٫۶۷۹۸۷	°۴۷	۲۱	۴۳	۶۴	۸۶	۱۰۷	۱۲۹	۱۵۰	۱۷۲	۱۹۳
°۴۳	٫۶۸۲۰۰	٫۶۸۴۱۲	٫۶۸۶۲۴	٫۶۸۸۳۵	٫۶۹۰۴۶	٫۶۹۲۵۶	°۴۶	۲۱	۴۲	۶۳	۸۴	۱۰۶	۱۲۷	۱۴۸	۱۶۹	۱۹۰
°۴۴	٫۶۹۴۶۶	٫۶۹۶۷۵	٫۶۹۸۸۳	٫۷۰۰۹۱	٫۷۰۲۹۸	٫۷۰۵۰۵	°۴۵	۲۱	۴۲	۶۲	۸۳	۱۰۴	۱۲۴	۱۴۵	۱۶۶	۱۸۷
°۴۵	۰٫۷۰۷۱۱	۰٫۷۰۹۱۶	۰٫۷۱۱۲۱	۰٫۷۱۳۲۵	۰٫۷۱۵۲۹	۰٫۷۱۷۳۲	°۴۴	۲۰	۴۱	۶۱	۸۲	۱۰۲	۱۲۲	۱۴۳	۱۶۳	۱۸۴
°۴۶	٫۷۱۹۳۴	٫۷۲۱۳۶	٫۷۲۳۳۷	٫۷۲۵۳۷	٫۷۲۷۳۷	٫۷۲۹۳۷	°۴۳	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۸۰
°۴۷	٫۷۳۱۳۵	٫۷۳۳۳۳	٫۷۳۵۳۱	٫۷۳۷۲۸	٫۷۳۹۲۴	٫۷۴۱۲۰	°۴۲	۲۰	۳۹	۵۹	۷۸	۹۸	۱۱۸	۱۳۸	۱۵۷	۱۷۷
°۴۸	٫۷۴۳۱۴	٫۷۴۵۰۹	٫۷۴۷۰۳	٫۷۴۸۹۶	٫۷۵۰۸۸	٫۷۵۲۸۰	°۴۱	۱۹	۳۹	۵۸	۷۷	۹۶	۱۱۶	۱۳۵	۱۵۴	۱۷۳
°۴۹	٫۷۵۴۷۱	٫۷۵۶۶۱	٫۷۵۸۵۱	٫۷۶۰۴۱	٫۷۶۲۲۹	٫۷۶۴۱۷	°۴۰	۱۹	۳۸	۵۷	۷۶	۹۵	۱۱۳	۱۳۲	۱۵۱	۱۷۰
	′۶۰	′۵۰	′۴۰	′۳۰	′۲۰	′۱۰		′۱	′۲	′۳	′۴	′۵	′۶	′۷	′۸	′۹

طبعی جیوب التمام

	طبعی جیوب							فرق								
	′۰	′۱۰	′۲۰	′۳۰	′۴۰	′۵۰		′۱	′۲	′۳	′۴	′۵	′۶	′۷	′۸	′۹
°۵۰	۰٫۷۶۶۰۴	۰٫۷۶۷۹۱	۰٫۷۶۹۷۷	۰٫۷۷۱۶۲	۰٫۷۷۳۴۷	۰٫۷۷۵۳۱	°۳۹	۱۹	۳۷	۵۶	۷۴	۹۳	۱۱۱	۱۳۰	۱۴۸	۱۶۷
°۵۱	۰٫۷۷۷۱۵	۰٫۷۷۸۹۷	۰٫۷۸۰۷۹	۰٫۷۸۲۶۱	۰٫۷۸۴۴۲	۰٫۷۸۶۲۲	°۳۸	۱۸	۳۶	۵۴	۷۲	۹۱	۱۰۹	۱۲۷	۱۴۵	۱۶۳
°۵۲	۰٫۷۸۸۰۱	۰٫۷۸۹۸۰	۰٫۷۹۱۵۸	۰٫۷۹۳۳۵	۰٫۷۹۵۱۲	۰٫۷۹۶۸۸	°۳۷	۱۸	۳۵	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۶	۱۲۴	۱۴۲	۱۵۹
°۵۳	۰٫۷۹۸۶۴	۰٫۸۰۰۳۸	۰٫۸۰۲۱۲	۰٫۸۰۳۸۶	۰٫۸۰۵۵۸	۰٫۸۰۷۳۰	°۳۶	۱۷	۳۵	۵۲	۶۹	۸۶	۱۰۴	۱۲۱	۱۳۸	۱۵۶
°۵۴	۰٫۸۰۹۰۲	۰٫۸۱۰۷۲	۰٫۸۱۲۴۲	۰٫۸۱۴۱۲	۰٫۸۱۵۸۰	۰٫۸۱۷۴۸	°۳۵	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۵	۱۰۱	۱۱۸	۱۳۵	۱۵۲
°۵۵	۰٫۸۱۹۱۵	۰٫۸۲۰۸۲	۰٫۸۲۲۴۸	۰٫۸۲۴۱۳	۰٫۸۲۵۷۷	۰٫۸۲۷۴۱	°۳۴	۱۶	۳۳	۴۹	۶۶	۸۲	۹۹	۱۱۵	۱۳۲	۱۴۸
°۵۶	۰٫۸۲۹۰۴	۰٫۸۳۰۶۶	۰٫۸۳۲۲۸	۰٫۸۳۳۸۹	۰٫۸۳۵۴۹	۰٫۸۳۷۰۸	°۳۳	۱۶	۳۲	۴۸	۶۴	۸۰	۹۶	۱۱۲	۱۲۸	۱۴۴
°۵۷	۰٫۸۳۸۶۷	۰٫۸۴۰۲۵	۰٫۸۴۱۸۲	۰٫۸۴۳۳۹	۰٫۸۴۴۹۵	۰٫۸۴۶۵۰	°۳۲	۱۶	۳۱	۴۷	۶۳	۷۸	۹۴	۱۱۰	۱۲۵	۱۴۱
°۵۸	۰٫۸۴۸۰۵	۰٫۸۴۹۵۹	۰٫۸۵۱۱۲	۰٫۸۵۲۶۴	۰٫۸۵۴۱۶	۰٫۸۵۵۶۷	°۳۱	۱۵	۳۰	۴۶	۶۱	۷۶	۹۱	۱۰۶	۱۲۲	۱۳۷
°۵۹	۰٫۸۵۷۱۷	۰٫۸۵۸۶۶	۰٫۸۶۰۱۵	۰٫۸۶۱۶۳	۰٫۸۶۳۱۰	۰٫۸۶۴۵۷	°۳۰	۱۵	۳۰	۴۴	۵۹	۷۴	۸۹	۱۰۳	۱۱۸	۱۳۳

												تفرق					
۶۰°	۰٫۸۶۶۰۳	۰٫۸۶۷۴۸	۰٫۸۶۸۹۲	۰٫۸۷۰۳۶	۰٫۸۷۱۷۸	۰٫۸۷۳۲۱	۲۹°	۱۴	۲۹	۴۳	۵۷	۷۲	۸۶	۱۰۰	۱۱۴	۱۲۹
۶۱°	۰٫۸۷۴۶۲	۰٫۸۷۶۰۳	۰٫۸۷۷۴۳	۰٫۸۷۸۸۲	۰٫۸۸۰۲۰	۰٫۸۸۱۵۸	۲۸°	۱۴	۲۸	۴۲	۵۵	۶۹	۸۳	۹۷	۱۱۱	۱۲۵
۶۲°	۰٫۸۸۲۹۵	۰٫۸۸۴۳۱	۰٫۸۸۵۶۶	۰٫۸۸۷۰۱	۰٫۸۸۸۳۵	۰٫۸۸۹۶۸	۲۷°	۱۳	۲۷	۴۰	۵۴	۶۷	۸۱	۹۴	۱۰۸	۱۲۱
۶۳°	۰٫۸۹۱۰۱	۰٫۸۹۲۳۲	۰٫۸۹۳۶۳	۰٫۸۹۴۹۳	۰٫۸۹۶۲۳	۰٫۸۹۷۵۲	۲۶°	۱۳	۲۶	۳۹	۵۲	۶۵	۷۸	۹۱	۱۰۴	۱۱۷
۶۴°	۰٫۸۹۸۷۹	۰٫۹۰۰۰۶	۰٫۹۰۱۳۳	۰٫۹۰۲۵۹	۰٫۹۰۳۸۳	۰٫۹۰۵۰۷	۲۵°	۱۳	۲۵	۳۸	۵۰	۶۳	۷۵	۸۸	۱۰۰	۱۱۳
۶۵°	۰٫۹۰۶۳۱	۰٫۹۰۷۵۳	۰٫۹۰۸۷۵	۰٫۹۰۹۹۶	۰٫۹۱۱۱۶	۰٫۹۱۲۳۶	۲۴°	۱۲	۲۴	۳۶	۴۸	۶۰	۷۲	۸۴	۹۶	۱۰۸
۶۶°	۰٫۹۱۳۵۵	۰٫۹۱۴۷۲	۰٫۹۱۵۹۰	۰٫۹۱۷۰۶	۰٫۹۱۸۲۲	۰٫۹۱۹۳۶	۲۳°	۱۲	۲۳	۳۵	۴۶	۵۸	۷۰	۸۱	۹۳	۱۰۴
۶۷°	۰٫۹۲۰۵۰	۰٫۹۲۱۶۴	۰٫۹۲۲۷۶	۰٫۹۲۳۸۸	۰٫۹۲۴۹۹	۰٫۹۲۶۰۹	۲۲°	۱۱	۲۲	۳۳	۴۵	۵۶	۶۷	۷۸	۸۹	۱۰۰
۶۸°	۰٫۹۲۷۱۸	۰٫۹۲۸۲۷	۰٫۹۲۹۳۵	۰٫۹۳۰۴۲	۰٫۹۳۱۴۸	۰٫۹۳۲۵۳	۲۱°	۱۱	۲۱	۳۲	۴۳	۵۳	۶۴	۷۵	۸۵	۹۶
۶۹°	۰٫۹۳۳۵۸	۰٫۹۳۴۶۲	۰٫۹۳۵۶۵	۰٫۹۳۶۶۷	۰٫۹۳۷۶۹	۰٫۹۳۸۶۹	۲۰°	۱۰	۲۰	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱	۷۱	۸۱	۹۲
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′

طبعی جیوب التمام

طبعی جیوب

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	فرق ۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۷۰°	۰٫۹۳۹۶۹	۰٫۹۴۰۶۸	۰٫۹۴۱۶۷	۰٫۹۴۲۶۴	۰٫۹۴۳[illegible]	۰٫۹۴۴۵۷	۱۹°	۱۰	۱۹	۲۹	۳۹	۴۹	۵۸	۶۸	۷۸	۸۷
۷۱°	٫۹۴۵۵۲	٫۹۴۶۴۶	٫۹۴۷۴۰	٫۹۴۸۳۲	٫۹۴۹۲۴	٫۹۵۰۱۵	۱۸°	۹	۱۸	۲۸	۳۷	۴۶	۵۵	۶۴	۷۴	۸۳
۷۲°	٫۹۵۱۰۶	٫۹۵۱۹۵	٫۹۵۲۸۴	٫۹۵۳۷۲	٫۹۵۴۵۹	٫۹۵۵۴۵	۱۷°	۹	۱۸	۲۶	۳۵	۴۴	۵۲	۶۱	۷۰	۷۹
۷۳°	٫۹۵۶۳۰	٫۹۵۷۱۵	٫۹۵۷۹۹	٫۹۵۸۸۲	٫۹۵۹۶۴	٫۹۶۰۴۶	۱۶°	۸	۱۷	۲۵	۳۳	۴۱	۵۰	۵۸	۶۶	۷۴
۷۴°	٫۹۶۱۲۶	٫۹۶۲۰۶	٫۹۶۲۸۵	٫۹۶۳۶۳	٫۹۶۴۴۰	٫۹۶۵۱۷	۱۵°	۸	۱۶	۲۳	۳۱	۳۹	۴۷	۵۴	۶۲	۷۰
۷۵°	۰٫۹۶۵۹۳	۰٫۹۶۶۶۷	۰٫۹۶۷۴۲	۰٫۹۶۸۱۵	۰٫۹۶۸۸۷	۰٫۹۶۹۵۹	۱۴°	۷	۱۵	۲۲	۲۹	۳۶	۴۴	۵۱	۵۸	۶۵
۷۶°	٫۹۷۰۳۰	٫۹۷۱۰۰	٫۹۷۱۶۹	٫۹۷۲۳۷	٫۹۷۳۰۴	٫۹۷۳۷۱	۱۳°	۷	۱۴	۲۰	۲۷	۳۴	۴۱	۴۷	۵۴	۶۱
۷۷°	٫۹۷۴۳۷	٫۹۷۵۰۲	٫۹۷۵۶۶	٫۹۷۶۳۰	٫۹۷۶۹۲	٫۹۷۷۵۴	۱۲°	۶	۱۳	۱۹	۲۵	۳۳	۳۸	۴۴	۵۰	۵۷
۷۸°	٫۹۷۸۱۵	٫۹۷۸۷۵	٫۹۷۹۳۴	٫۹۷۹۹۲	٫۹۸۰۵۰	٫۹۸۱۰۷	۱۱°	۶	۱۲	۱۷	۲۳	۲۹	۳۵	۴۱	۴۶	۵۲
۷۹°	٫۹۸۱۶۳	٫۹۸۲۱۸	٫۹۸۲۷۲	٫۹۸۳۲۵	٫۹۸۳۷۸	٫۹۸۴۳۰	۱۰°	۶	۱۱	۱۶	۲۱	۲۷	۳۲	۳۷	۴۳	۴۸

	٦٠′	٥٠′	٤٠′	٣٠′	٢٠′	١٠′		١′	٢′	٣′	٤′	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
												فرق				
٨٠°	٠٫٩٨٤٨١	٠٫٩٨٥٣١	٠٫٩٨٥٨٠	٠٫٩٨٦٢٩	٠٫٩٨٦٧٦	٫٩٨٧٢٣	٩°	٥	١٠	١٤	١٩	٢٤	٢٩	٣٤	٣٨	٤٣
٨١°	٫٩٨٧٦٩	٫٩٨٨١٤	٫٩٨٨٥٨	٫٩٨٩٠٢	٫٩٨٩٤٤	٫٩٨٩٨٦	٨°	٤	٩	١٣	١٧	٢٢	٢٦	٣٠	٣٤	٣٩
٨٢°	٫٩٩٠٢٧	٫٩٩٠٦٧	٫٩٩١٠٦	٫٩٩١٤٤	٫٩٩١٨٢	٫٩٩٢١٩	٧°	٤	٨	١١	١٥	١٩	٢٣	٢٧	٣٠	٣٤
٨٣°	٫٩٩٢٥٥	٫٩٩٢٩٠	٫٩٩٣٢٤	٫٩٩٣٥٧	٫٩٩٣٩٠	٫٩٩٤٢١	٦°	٣	٧	١٠	١٣	١٧	٢٠	٢٣	٢٦	٣٠
٨٤°	٫٩٩٤٥٢	٫٩٩٤٨٢	٫٩٩٥١١	٫٩٩٥٤٠	٫٩٩٥٦٧	٫٩٩٥٩٤	٥°	٣	٦	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٢	٢٥
٨٥°	٠٫٩٩٦١٩	٠٫٩٩٦٤٤	٠٫٩٩٦٦٨	٠٫٩٩٦٩٢	٠٫٩٩٧١٤	٠٫٩٩٧٣٦	٤°	٢	٥	٧	٩	١٢	١٤	١٦	١٨	٢١
٨٦°	٫٩٩٧٥٦	٫٩٩٧٧٠١	٫٩٩٧٩٥	٫٩٩٨١٣	٫٩٩٨٣١	٫٩٩٨٤٧	٣°	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٣	١٤	١٦
٨٧°	٫٩٩٨٦٣	٫٩٩٨٧٨	٫٩٩٨٩٢	٫٩٩٩٠٥	٫٩٩٩١٧	٫٩٩٩٢٩	٢°	١	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١٠	١٢
٨٨°	٫٩٩٩٣٩	٫٩٩٩٤٩	٫٩٩٩٥٨	٫٩٩٩٦٦	٫٩٩٩٧٣	٫٩٩٩٧٩	١°									
٨٩°	٫٩٩٩٨٥	٫٩٩٩٨٩	٫٩٩٩٩٣	٫٩٩٩٩٦	٫٩٩٩٩٨	١٫٠٠٠٠٠	٠°									
	٠٫٠٠٠٠٠															

طبعی جیوب التمام

طبعی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	فرق	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
°۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۹۱	۰٫۰۰۵۸۲	۰٫۰۰۸۷۳	۰٫۰۱۱۶۴	۰٫۰۱۴۵۵	°۸۹	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶		۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
°۱	٫۰۱۷۴۶	٫۰۲۰۳۶	٫۰۲۳۲۸	٫۰۲۶۱۹	٫۰۲۹۱۰	٫۰۳۲۰۱	°۸۸	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶		۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
°۲	٫۰۳۴۹۲	٫۰۳۷۸۳	٫۰۴۰۷۵	٫۰۴۳۶۶	٫۰۴۶۵۸	٫۰۴۹۴۹	°۸۷	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶		۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۳
°۳	٫۰۵۲۴۱	٫۰۵۵۳۳	٫۰۵۸۲۴	٫۰۶۱۱۶	٫۰۶۴۰۸	٫۰۶۷۰۰	°۸۶	۲۹	۵۸	۸۸	۱۱۷		۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۴	۲۶۳
°۴	٫۰۶۹۹۳	٫۰۷۲۸۵	٫۰۷۵۷۸	٫۰۷۸۷۰	٫۰۸۱۶۳	٫۰۸۴۵۶	°۸۵	۲۹	۵۸	۸۸	۱۱۷		۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۴	۲۶۳
°۵	۰٫۰۸۷۴۹	۰٫۰۹۰۴۲	۰٫۰۹۳۳۵	۰٫۰۹۶۲۹	۰٫۰۹۹۲۳	۰٫۱۰۲۱۶	°۸۴	۲۹	۵۹	۸۸	۱۱۸		۱۴۷	۱۷۶	۲۰۶	۲۳۵	۲۶۵
°۶	٫۱۰۵۱۰	٫۱۰۸۰۵	٫۱۱۰۹۹	٫۱۱۳۹۴	٫۱۱۶۸۸	٫۱۱۹۸۳	°۸۳	۲۹	۵۹	۸۸	۱۱۸		۱۴۷	۱۷۷	۲۰۶	۲۳۵	۲۶۵
°۷	٫۱۲۲۷۸	٫۱۲۵۷۴	٫۱۲۸۶۹	٫۱۳۱۶۵	٫۱۳۴۶۱	٫۱۳۷۵۸	°۸۲	۳۰	۵۹	۸۹	۱۱۸		۱۴۸	۱۷۸	۲۰۷	۲۳۷	۲۶۶
°۸	٫۱۴۰۵۴	٫۱۴۳۵۱	٫۱۴۶۴۸	٫۱۴۹۴۵	٫۱۵۲۴۳	٫۱۵۵۴۰	°۸۱	۳۰	۵۹	۸۹	۱۱۹		۱۴۹	۱۷۸	۲۰۸	۲۳۸	۲۶۷
°۹	٫۱۵۸۳۸	٫۱۶۱۳۷	٫۱۶۴۳۵	٫۱۶۷۳۴	٫۱۷۰۳۳	٫۱۷۳۳۳	°۸۰	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰		۱۵۰	۱۷۹	۲۰۹	۲۳۹	۲۶۹

								فرق								
°١٠	٠٫١٧٦٣٣	٠٫١٧٩٣٣	٠٫١٨٢٣٣	٠٫١٨٥٣٤	٠٫١٨٨٣٥	٠٫١٩١٣٦	°٧٩	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥١	١٨١	٢١١	٢٤١	٢٧١
°١١	٠٫١٩٤٣٨	٠٫١٩٧٤٠	٠٫٢٠٠٤٢	٠٫٢٠٣٤٥	٠٫٢٠٦٤٨	٠٫٢٠٩٥٢	°٧٨	٣٠	٦١	٩١	١٢١	١٥١	١٨٢	٢١٢	٢٤٢	٢٧٣
°١٢	٠٫٢١٢٥٦	٠٫٢١٥٦٠	٠٫٢١٨٦٤	٠٫٢٢١٦٩	٠٫٢٢٤٧٥	٠٫٢٢٧٨١	°٧٧	٣١	٦١	٩٢	١٢٢	١٥٣	١٨٣	٢١٤	٢٤٤	٢٧٥
°١٣	٠٫٢٣٠٨٧	٠٫٢٣٣٩٣	٠٫٢٣٧٠٠	٠٫٢٤٠٠٨	٠٫٢٤٣١٦	٠٫٢٤٦٢٤	°٧٦	٣١	٦٢	٩٢	١٢٣	١٥٤	١٨٥	٢١٦	٢٤٦	٢٧٧
°١٤	٠٫٢٤٩٣٣	٠٫٢٥٢٤٣	٠٫٢٥٥٥٣	٠٫٢٥٨٦٢	٠٫٢٦١٧٢	٠٫٢٦٤٨٣	°٧٥	٣١	٦٢	٩٣	١٢٤	١٥٥	١٨٦	٢١٧	٢٤٨	٢٧٩
°١٥	٠٫٢٦٧٩٥	٠٫٢٧١٠٧	٠٫٢٧٤١٩	٠٫٢٧٧٣٢	٠٫٢٨٠٤٦	٠٫٢٨٣٦٠	°٧٤	٣١	٦٣	٩٤	١٢٥	١٥٧	١٨٨	٢١٩	٢٥٠	٢٨٢
°١٦	٠٫٢٨٦٧٥	٠٫٢٨٩٩٠	٠٫٢٩٣٠٥	٠٫٢٩٦٢١	٠٫٢٩٩٣٨	٠٫٣٠٢٥٥	°٧٣	٣٢	٦٣	٩٥	١٢٦	١٥٨	١٩٠	٢٢١	٢٥٣	٢٨٥
°١٧	٠٫٣٠٥٧٣	٠٫٣٠٨٩١	٠٫٣١٢١٠	٠٫٣١٥٣٠	٠٫٣١٨٥٠	٠٫٣٢١٧١	°٧٢	٣٢	٦٤	٩٦	١٢٨	١٦٠	١٩٢	٢٢٣	٢٥٦	٢٨٨
°١٨	٠٫٣٢٤٩٢	٠٫٣٢٨١٤	٠٫٣٣١٣٦	٠٫٣٣٤٦٠	٠٫٣٣٧٨٣	٠٫٣٤١٠٨	°٧١	٣٢	٦٥	٩٧	١٢٩	١٦٢	١٩٤	٢٢٦	٢٥٩	٢٩١
°١٩	٠٫٣٤٤٣٣	٠٫٣٤٧٥٨	٠٫٣٥٠٨٥	٠٫٣٥٤١٢	٠٫٣٥٧٤٠	٠٫٣٦٠٦٨	°٧٠	٣٣	٦٥	٩٨	١٣١	١٦٣	١٩٦	٢٢٩	٢٦٢	٢٩٤
	'٦٠	'٥٠	'٤٠	'٣٠	'٢٠	'١٠		'١	'٢	'٣	'٤	'٥	'٦	'٧	'٨	'٩

طبعی مماس التمام

طبعی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	فرق	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
°۲۰	۰٫۳۶۳۹۷	۰٫۳۶۷۲۷	۰٫۳۷۰۵۷	۰٫۳۷۳۸۸	۰٫۳۷۷۲۰	۰٫۳۸۰۵۳	°۶۹	۳۳	۶۶	۱۰۰	۱۳۳		۱۶۶	۱۹۹	۲۳۲	۲۶۵	۲۹۸
°۲۱	٫۳۸۳۸۶	٫۳۸۷۲۱	٫۳۹۰۵۵	٫۳۹۳۹۱	٫۳۹۷۲۷	٫۴۰۰۶۵	°۶۸	۳۴	۶۷	۱۰۱	۱۳۴		۱۶۸	۲۰۲	۲۳۶	۲۶۹	۳۰۲
°۲۲	٫۴۰۴۰۳	٫۴۰۷۴۲	٫۴۱۰۸۱	٫۴۱۴۲۱	٫۴۱۷۶۳	٫۴۲۱۰۵	°۶۷	۳۴	۶۸	۱۰۲	۱۳۶		۱۷۰	۲۰۵	۲۳۹	۲۷۳	۳۰۷
°۲۳	٫۴۲۴۴۷	٫۴۲۷۹۱	٫۴۳۱۳۶	٫۴۳۴۸۱	٫۴۳۸۲۸	٫۴۴۱۷۵	°۶۶	۳۵	۶۹	۱۰۴	۱۳۸		۱۷۳	۲۰۸	۲۴۲	۲۷۷	۳۱۱
°۲۴	٫۴۴۵۲۳	٫۴۴۸۷۲	٫۴۵۲۲۲	٫۴۵۵۷۳	٫۴۵۹۲۴	٫۴۶۲۷۷	°۶۵	۳۵	۷۰	۱۰۵	۱۴۰		۱۷۶	۲۱۱	۲۴۶	۲۸۱	۳۱۶
°۲۵	۰٫۴۶۶۳۱	۰٫۴۶۹۸۵	۰٫۴۷۳۴۱	۰٫۴۷۶۹۸	۰٫۴۸۰۵۵	۰٫۴۸۴۱۴	°۶۴	۳۶	۷۱	۱۰۷	۱۴۳		۱۷۹	۲۱۴	۲۵۰	۲۸۶	۳۲۱
°۲۶	٫۴۸۷۷۳	٫۴۹۱۳۴	٫۴۹۴۹۵	٫۴۹۸۵۸	٫۵۰۲۲۲	٫۵۰۵۸۷	°۶۳	۳۶	۷۳	۱۰۹	۱۴۵		۱۸۲	۲۱۸	۲۵۴	۲۹۱	۳۲۷
°۲۷	٫۵۰۹۵۳	٫۵۱۳۲۰	٫۵۱۶۸۸	٫۵۲۰۵۷	٫۵۲۴۲۷	٫۵۲۷۹۸	°۶۲	۳۷	۷۴	۱۱۱	۱۴۸		۱۸۵	۲۲۲	۲۵۹	۲۹۶	۳۳۳
°۲۸	٫۵۳۱۷۱	٫۵۳۵۴۵	٫۵۳۹۲۰	٫۵۴۲۹۶	٫۵۴۶۷۳	٫۵۵۰۵۱	°۶۱	۳۸	۷۵	۱۱۳	۱۵۱		۱۸۹	۲۲۶	۲۶۴	۳۰۲	۳۳۹
°۲۹	٫۵۵۴۳۱	٫۵۵۸۱۲	٫۵۶۱۹۴	٫۵۶۵۷۷	٫۵۶۹۶۲	٫۵۷۳۴۸	°۶۰	۳۸	۷۷	۱۱۵	۱۵۴		۱۹۲	۲۳۰	۲۶۹	۳۰۷	۳۴۶

												فرق				
°۳۰	۰،۵۷۷۳۵	۰،۵۸۱۲۴	۰،۵۸۵۱۳	۰،۵۸۹۰۵	۰،۵۹۲۹۷	۰،۵۹۶۹۱	°۵۹	۳۹	۷۸	۱۱۸	۱۵۷	۱۹۶	۲۳۵	۲۷۴	۳۱۳	۳۵۳
°۳۱	،۶۰۰۸۶	،۶۰۴۸۳	،۶۰۸۸۱	،۶۱۲۸۰	،۶۱۶۸۱	،۶۲۰۸۳	°۵۸	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰	۲۰۰	۲۴۰	۲۸۰	۳۲۰	۳۶۰
°۳۲	،۶۲۴۸۷	،۶۲۸۹۲	،۶۳۲۹۹	،۶۳۷۰۷	،۶۴۱۱۷	،۶۴۵۲۸	°۵۷	۴۱	۸۲	۱۲۳	۱۶۴	۲۰۵	۲۴۵	۲۸۶	۳۲۷	۳۶۸
°۳۳	،۶۴۹۴۱	،۶۵۳۵۵	،۶۵۷۷۱	،۶۶۱۸۹	،۶۶۶۰۸	،۶۷۰۲۸	°۵۶	۴۲	۸۴	۱۲۶	۱۶۷	۲۰۹	۲۵۱	۲۹۳	۳۳۴	۳۷۶
°۳۴	،۶۷۴۵۱	،۶۷۸۷۵	،۶۸۳۰۱	،۶۸۷۲۸	،۶۹۱۵۷	،۶۹۵۸۸	°۵۵	۴۳	۸۶	۱۲۸	۱۷۱	۲۱۴	۲۵۷	۳۰۰	۳۴۲	۳۸۵
°۳۵	۰،۷۰۰۲۱	۰،۷۰۴۵۵	۰،۷۰۸۹۱	۰،۷۱۳۲۹	۰،۷۱۷۶۹	۰،۷۲۲۱۱	°۵۴	۴۴	۸۸	۱۳۱	۱۷۵	۲۲۰	۲۶۳	۳۰۷	۳۵۱	۳۹۵
°۳۶	،۷۲۶۵۴	،۷۳۱۰۰	،۷۳۵۴۷	،۷۳۹۹۶	،۷۴۴۴۷	،۷۴۹۰۰	°۵۳	۴۵	۹۰	۱۳۵	۱۸۰	۲۲۵	۲۷۰	۳۱۵	۳۶۰	۴۰۵
°۳۷	،۷۵۳۵۵	،۷۵۸۱۲	،۷۶۲۷۲	،۷۶۷۳۳	،۷۷۱۹۶	،۷۷۶۶۱	°۵۲	۴۶	۹۲	۱۳۹	۱۸۵	۲۳۱	۲۷۷	۳۲۴	۳۷۰	۴۱۶
°۳۸	،۷۸۱۲۹	،۷۸۵۹۸	،۷۹۰۷۰	،۷۹۵۴۴	،۸۰۰۲۰	،۸۰۴۹۸	°۵۱	۴۸	۹۵	۱۴۳	۱۹۰	۲۳۸	۲۸۵	۳۳۳	۳۸۰	۴۲۸
°۳۹	،۸۰۹۷۸	،۸۱۴۶۱	،۸۱۹۴۶	،۸۲۴۳۴	،۸۲۹۲۳	،۸۳۴۱۵	°۵۰	۴۹	۹۸	۱۴۷	۱۹۶	۲۴۵	۲۹۳	۳۴۲	۳۹۱	۴۴۰
	'۶۰	'۵۰	'۴۰	'۳۰	'۲۰	'۱۰		'۱	'۲	'۳	'۴	'۵	'۶	'۷	'۸	'۹

طبعی مماس التمام

طبعی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
								فرق								
۴۰°	۰٫۸۳۹۱۰	۰٫۸۴۴۰۷	۰٫۸۴۹۰۶	٫۸۵۴۰۸	۰٫۸۵۹۱۲	٫۸۶۴۱۹	۴۹°	۵۰	۱۰۱	۱۵۱	۲۰۱	۲۵۲	۳۰۲	۳۵۲	۴۰۲	۴۵۳
۴۱°	٫۸۶۹۲۹	٫۸۷۴۴۱	٫۸۷۹۵۵	٫۸۸۴۷۳	٫۸۸۹۹۲	٫۸۹۵۱۵	۴۸°	۵۱	۱۰۳	۱۵۶	۲۰۸	۲۶۰	۳۱۱	۳۶۳	۴۱۵	۴۶۷
۴۲°	٫۹۰۰۴۰	٫۹۰۵۶۹	٫۹۱۰۹۹	٫۹۱۶۳۳	٫۹۲۱۷۰	٫۹۲۷۰۹	۴۷°	۵۳	۱۰۷	۱۶۱	۲۱۴	۲۶۸	۳۲۱	۳۷۵	۴۲۹	۴۸۲
۴۳°	٫۹۳۲۵۲	٫۹۳۷۹۷	٫۹۴۳۴۵	٫۹۴۸۹۶	٫۹۵۴۵۱	٫۹۶۰۰۸	۴۶°	۵۵	۱۱۱	۱۶۶	۲۲۱	۲۷۷	۳۳۲	۳۸۷	۴۴۲	۴۹۸
۴۴°	٫۹۶۵۶۹	٫۹۷۱۳۳	٫۹۷۷۰۰	٫۹۸۲۷۰	٫۹۸۸۴۳	٫۹۹۴۲۰	۴۵°	۵۷	۱۱۴	۱۷۲	۲۲۹	۲۸۶	۳۴۳	۴۰۰	۴۵۷	۵۱۵
۴۵°	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۵۸۳	۱٫۰۱۱۷۰	۱٫۰۱۷۶۱	۱٫۰۲۳۵۵	۱٫۰۲۹۵۲	۴۴°	۵۹	۱۱۸	۱۷۸	۲۳۷	۲۹۶	۳۵۵	۴۱۴	۴۷۴	۵۳۳
۴۶°	۱٫۰۳۵۵۳	۱٫۰۴۱۵۸	۱٫۰۴۷۶۶	۱٫۰۵۳۷۸	۱٫۰۵۹۹۴	۱٫۰۶۶۱۳	۴۳°	۶۱	۱۲۳	۱۸۴	۲۴۶	۳۰۷	۳۶۸	۴۳۰	۴۹۱	۵۵۳
۴۷°	۱٫۰۷۲۳۷	۱٫۰۷۸۶۴	۱٫۰۸۴۹۶	۱٫۰۹۱۳۱	۱٫۰۹۷۷۰	۱٫۱۰۴۱۴	۴۲°	۶۴	۱۲۷	۱۹۱	۲۵۵	۳۱۹	۳۸۲	۴۴۶	۵۱۰	۵۷۳
۴۸°	۱٫۱۱۰۶۱	۱٫۱۱۷۱۳	۱٫۱۲۳۶۹	۱٫۱۳۰۲۹	۱٫۱۳۶۹۴	۱٫۱۴۳۶۳	۴۱°	۶۶	۱۳۲	۱۹۹	۲۶۵	۳۳۲	۳۹۷	۴۶۳	۵۳۰	۵۹۶
۴۹°	۱٫۱۵۰۳۷	۱٫۱۵۷۱۵	۱٫۱۶۳۹۸	۱٫۱۷۰۸۵	۱٫۱۷۷۷۷	۱٫۱۸۴۷۴	۴۰°	۶۹	۱۳۸	۲۰۷	۲۷۶	۳۴۵	۴۱۳	۴۸۲	۵۵۲	۶۲۰

								فرق								
۵۰°	۱٫۱۹۱۷۵	۱٫۱۹۸۸۴	۱٫۲۰۵۹۳	۱٫۲۱۳۱۰	۱٫۲۲۰۳۱	۱٫۲۲۷۵۸	۳۹°	۷۲	۱۴۴	۲۱۶	۲۸۸	۳۶۰	۴۳۱	۵۰۳	۵۷۵	۶۴۷
۵۱°	۱٫۲۳۴۹۰	۱٫۲۴۲۲۷	۱٫۲۴۹۶۹	۱٫۲۵۷۱۷	۱٫۲۶۴۷۱	۱٫۲۷۲۳۰	۳۸°	۷۵	۱۵۰	۲۲۵	۳۰۰	۳۷۶	۴۵۱	۵۲۶	۶۰۱	۶۷۶
۵۲°	۱٫۲۷۹۹۴	۱٫۲۸۷۶۴	۱٫۲۹۵۴۱	۱٫۳۰۳۲۳	۱٫۳۱۱۱۰	۱٫۳۱۹۰۴	۳۷°	۷۸	۱۵۷	۲۳۵	۳۱۴	۳۹۲	۴۷۱	۵۴۹	۶۲۸	۷۰۶
۵۳°	۱٫۳۲۷۰۴	۱٫۳۳۵۱۱	۱٫۳۴۳۲۳	۱٫۳۵۱۴۲	۱٫۳۵۹۶۸	۱٫۳۶۸۰۰	۳۶°	۸۲	۱۶۴	۲۴۷	۳۲۹	۴۱۱	۴۹۳	۵۷۶	۶۵۸	۷۴۰
۵۴°	۱٫۳۷۶۳۸	۱٫۳۸۴۸۴	۱٫۳۹۳۳۶	۱٫۴۰۱۹۵	۱٫۴۱۰۶۱	۱٫۴۱۹۳۴	۳۵°	۸۶	۱۷۲	۲۵۹	۳۴۵	۴۳۱	۵۱۷	۶۰۳	۶۹۰	۷۷۶
۵۵°	۱٫۴۲۸۱۵	۱٫۴۳۷۰۳	۱٫۴۴۵۹۸	۱٫۴۵۵۰۱	۱٫۴۶۴۱۱	۱٫۴۷۳۳۰	۳۴°	۹۱	۱۸۱	۲۷۲	۳۶۳	۴۵۳	۵۴۴	۶۳۴	۷۲۵	۸۱۶
۵۶°	۱٫۴۸۲۵۶	۱٫۴۹۱۹۰	۱٫۵۰۱۳۲	۱٫۵۱۰۸۴	۱٫۵۲۰۴۳	۱٫۵۳۰۱۰	۳۳°	۹۶	۱۹۱	۲۸۷	۳۸۲	۴۷۸	۵۷۳	۶۶۹	۷۶۴	۸۶۰
۵۷°	۱٫۵۳۹۸۷	۱٫۵۴۹۷۲	۱٫۵۵۹۶۶	۱٫۵۶۹۶۹	۱٫۵۷۹۸۱	۱٫۵۹۰۰۳	۳۲°	۱۰۱	۲۰۱	۳۰۲	۴۰۳	۵۰۴	۶۰۴	۷۰۵	۸۰۶	۹۰۷
۵۸°	۱٫۶۰۰۳۳	۱٫۶۱۰۷۲	۱٫۶۲۱۲۵	۱٫۶۳۱۸۵	۱٫۶۴۲۵۶	۱٫۶۵۳۳۷	۳۱°	۱۰۷	۲۱۳	۳۲۰	۴۲۶	۵۳۳	۶۳۹	۷۴۶	۸۵۲	۹۵۹
۵۹°	۱٫۶۶۴۲۸	۱٫۶۷۵۲۰	۱٫۶۸۶۴۳	۱٫۶۹۷۶۷	۱٫۷۰۹۰۱	۱٫۷۲۰۴۷	۳۰°	۱۱۳	۲۲۶	۳۳۹	۴۵۱	۵۶۵	۶۷۷	۷۹۰	۹۰۳	۱۰۱۶
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′

طبعی مماس التمام

طبعی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
								فرق								
°۶۰	۱٫۷۳۲۱	۱٫۷۴۳۷	۱٫۷۵۵۶	۱٫۷۶۷۵	۱٫۷۷۹۶	۱٫۷۹۱۷	°۲۹	۱۲	۲۴	۳۶	۴۸	۶۰	۷۲	۸۴	۹۶	۱۰۸
°۶۱	۱٫۸۰۴۰	۱٫۸۱۶۵	۱٫۸۲۹۱	۱٫۸۴۱۸	۱٫۸۵۴۶	۱٫۸۶۷۶	°۲۸	۱۳	۲۵	۳۸	۵۱	۶۴	۷۷	۸۹	۱۰۲	۱۱۵
°۶۲	۱٫۸۸۰۷	۱٫۸۹۴۰	۱٫۹۰۷۴	۱٫۹۲۱۰	۱٫۹۳۴۷	۱٫۹۴۸۶	°۲۷	۱۴	۲۷	۴۱	۵۴	۶۸	۸۲	۹۵	۱۰۹	۱۲۲
°۶۳	۱٫۹۶۲۶	۱٫۹۷۶۸	۱٫۹۹۱۲	۲٫۰۰۵۷	۲٫۰۲۰۴	۲٫۰۳۵۳	°۲۶	۱۵	۲۹	۴۴	۵۸	۷۳	۸۸	۱۰۲	۱۱۷	۱۳۱
°۶۴	۲٫۰۵۰۳	۲٫۰۶۵۵	۲٫۰۸۰۹	۲٫۰۹۶۵	۲٫۱۱۲۳	۲٫۱۲۸۳	°۲۵	۱۶	۳۱	۴۷	۶۳	۷۹	۹۴	۱۱۰	۱۲۶	۱۴۱
°۶۵	۲٫۱۴۴۵	۲٫۱۶۰۹	۲٫۱۷۷۵	۲٫۱۹۴۳	۲٫۲۱۱۳	۲٫۲۲۸۶	°۲۴	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۵	۱۰۱	۱۱۸	۱۳۵	۱۵۲
°۶۶	۲٫۲۴۶۰	۲٫۲۶۳۷	۲٫۲۸۱۷	۲٫۲۹۹۸	۲٫۳۱۸۳	۲٫۳۳۶۹	°۲۳	۱۸	۳۷	۵۵	۷۳	۹۲	۱۱۰	۱۲۸	۱۴۶	۱۶۵
°۶۷	۲٫۳۵۵۹	۲٫۳۷۵۰	۲٫۳۹۴۵	۲٫۴۱۴۲	۲٫۴۳۴۲	۲٫۴۵۴۵	°۲۲	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰	۱۰۰	۱۱۹	۱۳۹	۱۵۹	۱۷۹
°۶۸	۲٫۴۷۵۱	۲٫۴۹۶۰	۲٫۵۱۷۲	۲٫۵۳۸۶	۲٫۵۶۰۵	۲٫۵۸۲۶	°۲۱	۲۲	۴۳	۶۵	۸۷	۱۰۹	۱۳۰	۱۵۲	۱۷۴	۱۹۵
°۶۹	۲٫۶۰۵۱	۲٫۶۲۷۹	۲٫۶۵۱۱	۲٫۶۷۴۶	۲٫۶۹۸۵	۲٫۷۲۲۸	°۲۰	۲۴	۴۷	۷۱	۹۵	۱۱۹	۱۴۲	۱۶۶	۱۹۰	۲۱۳

°۷۰	۲٫۷۴۷۵	۲٫۷۷۲۵	۲٫۷۹۸۰	۲٫۸۲۳۹	۲٫۸۵۰۲	۲٫۸۷۷۰	°۱۹	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۴	۱۳۱	۱۵۷	۱۸۳	۲۰۹	۲۳۵
°۷۱	۲٫۹۰۴۲	۲٫۹۳۱۹	۲٫۹۶۰۰	۲٫۹۸۸۷	۳٫۰۱۷۸	۳٫۰۴۷۵	°۱۸	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۱	۲۶۰
°۷۲	۳٫۰۷۷۷	۳٫۱۰۸۴	۳٫۱۳۹۷	۳٫۱۷۱۶	۳٫۲۰۴۱	۳٫۲۳۷۱	°۱۷	۳۲	۶۴	۹۷	۱۲۹	۱۶۱	۱۹۳	۲۲۵	۲۵۸	۲۹۰
°۷۳	۳٫۲۷۰۹	۳٫۳۰۵۲	۳٫۳۴۰۲	۳٫۳۷۵۹	۳٫۴۱۲۴	۳٫۴۴۹۵	°۱۶	۳۶	۷۲	۱۰۸	۱۴۴	۱۸۱	۲۱۶	۲۵۳	۲۸۹	۳۲۵
°۷۴	۳٫۴۸۷۴	۳٫۵۲۶۱	۳٫۵۶۵۶	۳٫۶۰۵۹	۳٫۶۴۷۰	۳٫۶۸۹۱	°۱۵	۴۱	۸۱	۱۲۲	۱۶۳	۲۰۴	۲۴۴	۲۸۵	۳۲۶	۳۶۶
°۷۵	۳٫۷۳۲۱	۳٫۷۷۶۰	۳٫۸۲۰۸	۳٫۸۶۶۷	۳٫۹۱۳۶	۳٫۹۶۱۷	°۱۴	۴۶	۹۳	۱۳۹	۱۸۵	۲۳۲	۲۷۸	۳۲۵	۳۷۱	۴۱۸
°۷۶	۴٫۰۱۰۸	۴٫۰۶۱۱	۴٫۱۱۲۶	۴٫۱۶۵۳	۴٫۲۱۹۳	۴٫۲۷۴۷	°۱۳	۵۳	۱۰۷	۱۶۰	۲۱۴	۲۶۷	۳۲۰	۳۷۴	۴۲۷	۴۸۱
°۷۷	۴٫۳۳۱۵	۴٫۳۸۹۷	۴٫۴۴۹۴	۴٫۵۱۰۷	۴٫۵۷۳۶	۴٫۶۳۸۲	°۱۲	۶۲	۱۲۴	۱۸۶	۲۴۸	۳۱۱	۳۷۳	۴۳۵	۴۹۷	۵۵۹
°۷۸	۴٫۷۰۴۶	۴٫۷۷۲۹	۴٫۸۴۳۰	۴٫۹۱۵۲	۴٫۹۸۹۴	۵٫۰۶۵۸	°۱۱	۷۳	۱۴۶	۲۲۰	۲۹۳	۳۶۶	۴۳۹	۵۱۲	۵۸۶	۶۵۹
°۷۹	۵٫۱۴۴۶	۵٫۲۲۵۷	۵٫۳۰۹۳	۵٫۳۹۵۵	۵٫۴۸۴۵	۵٫۵۷۶۴	°۱۰	۸۸	۱۷۵	۲۶۳	۳۵۰	۴۳۸	۵۲۶	۶۱۳	۷۰۱	۷۸۸
	′۶۰	′۵۰	′۴۰	′۳۰	′۲۰	′۱۰		′۱	′۲	′۳	′۴	′۵	′۶	′۷	′۸	′۹

طبعی مماس التمام

طبعی مماس

	۰َ	۱۰َ	۲۰َ	۳۰َ	۴۰َ	۵۰َ		۱َ	۲َ	۳َ	۴َ	۵َ	۶َ	۷َ	۸َ	۹َ
°۸۰	۵٫۶۷۱۳	۵٫۷۶۹۴	۵٫۸۷۰۸	۵٫۹۷۵۸	۶٫۰۸۴۴	۶٫۱۹۷۰	°۹									
°۸۱	۶٫۳۱۳۸	۶٫۴۳۴۸	۶٫۵۶۰۶	۶٫۶۹۱۲	۶٫۸۲۶۹	۶٫۹۶۸۲	°۸									
°۸۲	۷٫۱۱۵۴	۷٫۲۶۸۷	۷٫۴۲۸۷	۷٫۵۹۵۸	۷٫۷۷۰۴	۷٫۹۵۳۰	°۷									
°۸۳	۸٫۱۴۴۳	۸٫۳۴۵۰	۸٫۵۵۵۵	۸٫۷۷۶۹	۹٫۰۰۹۸	۹٫۲۵۵۳	°۶									
°۸۴	۹٫۵۱۴۴	۹٫۷۸۸۲	۱۰٫۰۷۸	۱۰٫۳۸۵	۱۰٫۷۱۲	۱۱٫۰۵۹	°۵									
°۸۵	۱۱٫۴۳۰	۱۱٫۸۲۶	۱۲٫۲۵۱	۱۲٫۷۰۶	۱۳٫۱۹۷	۱۳٫۷۲۷	°۴									
°۸۶	۱۴٫۳۰۱	۱۴٫۹۲۴	۱۵٫۶۰۵	۱۶٫۳۵۰	۱۷٫۱۶۹	۱۸٫۰۷۵	°۳									
°۸۷	۱۹٫۰۸۱	۲۰٫۲۰۶	۲۱٫۴۷۰	۲۲٫۹۰۴	۲۴٫۵۴۲	۲۶٫۴۳۲	°۲									
°۸۸	۲۸٫۶۳۶	۳۱٫۲۴۲	۳۴٫۳۶۸	۳۸٫۱۸۸	۴۲٫۹۶۴	۴۹٫۱۰۴	°۱									
°۸۹	۵۷٫۲۹۰	۶۸٫۷۵۰	۸۵٫۹۴۰	۱۱۴٫۵۹	۱۷۱٫۸۹	۳۴۳٫۷۷	°۰									
°۹۰	∞ +															
	۶۰َ	۵۰َ	۴۰َ	۳۰َ	۲۰َ	۱۰َ		۱َ	۲َ	۳َ	۴َ	۵َ	۶َ	۷َ	۸َ	۹َ

فرق یہاں اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ درج نہیں کیے جا سکتے۔

صغیر زاویہ ن کا مماس التمام یا

$$۹۰° - ن \text{ کا مماس} = \frac{۳۴۳۷٫۷}{ن} \text{ تقریباً}$$

طبعی مماس التمام

لوکارثمی جیوب

	۰َ	۱۰َ	۲۰َ	۳۰َ	۴۰َ	۵۰َ		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰°	−∞	۷٫۴۶۳۷۳	۷٫۷۶۴۷۵	۷٫۹۴۰۸۴	۸٫۰۶۵۷۸	۸٫۱۶۲۶۸	۸۹°	فرق								
۱°	۸٫۲۴۱۸۶	۸٫۳۰۸۷۹	۸٫۳۶۶۷۸	۸٫۴۱۷۹۲	۸٫۴۶۳۶۶	۸٫۵۰۵۰۴	۸۸°	فرق یہاں اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ ان کا درج								
۲°	۸٫۵۴۲۸۲	۸٫۵۷۷۵۷	۸٫۶۰۹۷۳	۸٫۶۳۹۶۸	۸٫۶۶۷۶۹	۸٫۶۹۴۰۰	۸۷°									
۳°	۸٫۷۱۸۸۰	۸٫۷۴۲۲۶	۸٫۷۶۴۵۱	۸٫۷۸۵۶۸	۸٫۸۰۵۸۵	۸٫۸۲۵۱۳	۸۶°	کرنا ناممکن ہے صغیر زاویہ نَ کے لیے لوک جب نَ								
۴°	۸٫۸۴۳۵۸	۸٫۸۶۱۲۸	۸٫۸۷۸۲۹	۸٫۸۹۴۶۴	۸٫۹۱۰۴۰	۸٫۹۲۵۶۱	۸۵°	یا لوک جم (۹۰° - نَ) = لوک ن + ۳٫۶۳۷۳۴۶۴								
۵°	۸٫۹۴۰۳۰	۸٫۹۵۴۵۰	۸٫۹۶۸۲۵	۸٫۹۸۱۵۷	۸٫۹۹۴۵۰	۹٫۰۰۷۰۴	۸۴°									
۶°	۹٫۰۱۹۲۳	۹٫۰۳۱۰۹	۹٫۰۴۲۶۲	۹٫۰۵۳۸۶	۹٫۰۶۴۸۱	۹٫۰۷۵۴۸	۸۳°									
۷°	۹٫۰۸۵۸۹	۹٫۰۹۶۰۶	۹٫۱۰۵۹۹	۹٫۱۱۵۷۰	۹٫۱۲۵۱۹	۹٫۱۳۴۴۷	۸۲°	۹۶	۱۹۲	۲۸۸	۳۸۴	۴۸۰	۵۷۶	۶۷۲	۷۶۸	۸۶۴
۸°	۹٫۱۴۳۵۶	۹٫۱۵۲۴۵	۹٫۱۶۱۱۶	۹٫۱۶۹۷۰	۹٫۱۷۸۰۷	۹٫۱۸۶۲۸	۸۱°	۸۵	۱۶۹	۲۵۴	۳۳۸	۴۲۳	۵۰۷	۵۹۲	۶۷۶	۷۶۱
۹°	۹٫۱۹۴۳۳	۹٫۲۰۲۲۳	۹٫۲۰۹۹۹	۹٫۲۱۷۶۱	۹٫۲۲۵۰۹	۹٫۲۳۲۴۴	۸۰°	۷۶	۱۵۱	۲۲۷	۳۰۲	۳۷۸	۴۵۳	۵۲۹	۶۰۴	۶۸۰
	۶۰َ	۵۰َ	۴۰َ	۳۰َ	۲۰َ	۱۰َ		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

لوکارثمی جیوب التمام

لوگارتھمی جیوب

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
								فرق								
۱۰°	۹٫۲۳۹۶۷	۹٫۲۴۶۷۷	۹٫۲۵۳۷۶	۹٫۲۶۰۶۳	۹٫۲۶۷۳۹	۹٫۲۷۴۰۵	۷۹°	۶۸	۱۳۶	۲۰۴	۲۷۲	۳۴۱	۴۰۹	۴۷۷	۵۴۵	۶۱۳
۱۱°	٫۲۸۰۶۰	٫۲۸۷۰۵	٫۲۹۳۴۰	٫۲۹۹۶۶	٫۳۰۵۸۲	٫۳۱۱۸۹	۷۸°	۶۲	۱۲۴	۱۸۶	۲۴۸	۳۱۰	۳۷۳	۴۳۵	۴۹۷	۵۵۹
۱۲°	٫۳۱۷۸۸	٫۳۲۳۷۸	٫۳۲۹۶۰	٫۳۳۵۳۴	٫۳۴۱۰۰	٫۳۴۶۵۸	۷۷°	۵۷	۱۱۴	۱۷۱	۲۲۸	۲۸۵	۳۴۲	۳۹۹	۴۵۶	۵۱۳
۱۳°	٫۳۵۲۰۹	٫۳۵۷۵۲	٫۳۶۲۸۹	٫۳۶۸۱۹	٫۳۷۳۴۱	٫۳۷۸۵۸	۷۶°	۵۳	۱۰۵	۱۵۸	۲۱۰	۲۶۳	۳۱۶	۳۶۸	۴۲۱	۴۷۳
۱۴°	٫۳۸۳۶۸	٫۳۸۸۷۱	٫۳۹۳۶۹	٫۳۹۸۶۰	٫۴۰۳۴۶	٫۴۰۸۲۵	۷۵°	۴۹	۹۸	۱۴۷	۱۹۵	۲۴۴	۲۹۳	۳۴۲	۳۹۱	۴۴۰
۱۵°	۹٫۴۱۳۰۰	۹٫۴۱۷۶۸	۹٫۴۲۲۳۲	۹٫۴۲۶۹۰	۹٫۴۳۱۴۳	۹٫۴۳۵۹۱	۷۴°	۴۶	۹۱	۱۳۷	۱۸۲	۲۲۸	۲۷۳	۳۱۹	۳۶۴	۴۱۰
۱۶°	٫۴۴۰۳۴	٫۴۴۴۷۲	٫۴۴۹۰۵	٫۴۵۳۳۴	٫۴۵۷۵۸	٫۴۶۱۷۸	۷۳°	۴۳	۸۵	۱۲۸	۱۷۱	۲۱۳	۲۵۶	۲۹۹	۳۴۱	۳۸۴
۱۷°	٫۴۶۵۹۴	٫۴۷۰۰۵	٫۴۷۴۱۱	٫۴۷۸۱۴	٫۴۸۲۱۳	٫۴۸۶۰۷	۷۲°	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰	۲۰۱	۲۴۱	۲۸۱	۳۲۱	۳۶۱
۱۸°	٫۴۸۹۹۸	٫۴۹۳۸۵	٫۴۹۷۶۸	٫۵۰۱۴۸	٫۵۰۵۲۳	٫۵۰۸۹۶	۷۱°	۳۸	۷۶	۱۱۳	۱۵۱	۱۸۹	۲۲۷	۲۶۴	۳۰۲	۳۴۰
۱۹°	٫۵۱۲۶۴	٫۵۱۶۲۹	٫۵۱۹۹۱	٫۵۲۳۵۰	٫۵۲۷۰۵	٫۵۳۰۵۶	۷۰°	۳۶	۷۱	۱۰۷	۱۴۳	۱۷۹	۲۱۴	۲۵۰	۲۸۵	۳۲۱

	٦٠′	٥٠′	٤٠′	٣٠′	٢٠′	١٠′		١′	٢′	٣′	٤′	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
٢٠°	٩٫٥٣٤٠٥	٩٫٥٣٧٥١	٩٫٥٤٠٩٣	٩٫٥٤٤٣٣	٩٫٥٤٧٦٩	٩٫٥٥١٠٢	٦٩°	٣٤	٦٨	١٠١	١٣٥	١٦٩	٢٠٣	٢٣٦	٢٧٠	٣٠٤
٢١°	٫٥٥٤٣٣	٫٥٥٧٦١	٫٥٦٠٨٥	٫٥٦٤٠٨	٫٥٦٧٢٧	٫٥٧٠٤٤	٦٨°	٣٢	٦٤	٩٦	١٢٨	١٦١	١٩٣	٢٢٥	٢٥٧	٢٨٩
٢٢°	٫٥٧٣٥٨	٫٥٧٦٦٩	٫٥٧٩٧٨	٫٥٨٢٨٤	٫٥٨٥٨٨	٫٥٨٨٨٩	٦٧°	٣١	٦١	٩٢	١٢٢	١٥٣	١٨٣	٢١٤	٢٤٤	٢٧٥
٢٣°	٫٥٩١٨٨	٫٥٩٤٨٤	٫٥٩٧٧٨	٫٦٠٠٧٠	٫٦٠٣٥٩	٫٦٠٦٤٦	٦٦°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٦	١٧٤	٢٠٤	٢٣٣	٢٦٢
٢٤°	٫٦٠٩٣١	٫٦١٢١٤	٫٦١٤٩٤	٫٦١٧٧٢	٫٦٢٠٤٩	٫٦٢٣٢٣	٦٥°	٢٨	٥٦	٨٣	١١١	١٣٩	١٦٦	١٩٥	٢٢٢	٢٥٠
٢٥°	٩٫٦٢٥٩٥	٩٫٦٢٨٦٥	٩٫٦٣١٣٣	٩٫٦٣٣٩٨	٩٫٦٣٦٦٢	٩٫٦٣٩٢٤	٦٤°	٢٧	٥٣	٨٠	١٠٦	١٣٣	١٥٩	١٨٦	٢١٢	٢٣٩
٢٦°	٫٦٤١٨٤	٫٦٤٤٤٢	٫٦٤٦٩٨	٫٦٤٩٥٣	٫٦٥٢٠٥	٫٦٥٤٥٦	٦٣°	٢٥	٥١	٧٦	١٠٢	١٢٧	١٥٢	١٧٨	٢٠٣	٢٢٩
٢٧°	٫٦٥٧٠٥	٫٦٥٩٥٣	٫٦٦١٩٧	٫٦٦٤٤١	٫٦٦٦٨٢	٫٦٦٩٢٢	٦٢°	٢٤	٤٩	٧٣	٩٧	١٢٢	١٤٦	١٧٠	١٩٤	٢١٩
٢٨°	٫٦٧١٦١	٫٦٧٣٩٨	٫٦٧٦٣٣	٫٦٧٨٦٦	٫٦٨٠٩٨	٫٦٨٣٢٨	٦١°	٢٣	٤٧	٧٠	٩٣	١١٧	١٤٠	١٦٣	١٨٦	٢١٠
٢٩°	٫٦٨٥٥٧	٫٦٨٧٨٤	٫٦٩٠١٠	٫٦٩٢٣٤	٫٦٩٤٥٦	٫٦٩٦٧٧	٦٠°	٢٢	٤٥	٦٧	٨٩	١١٢	١٣٤	١٥٦	١٧٩	٢٠١

لوکارتمی جیوب التمام

	لوکارثمی جیوب							فرق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۳۰°	۹٫۶۹۸۹۷	۹٫۷۰۱۱۵	۹٫۷۰۳۳۲	۹٫۷۰۵۴۷	۹٫۷۰۷۶۱	۹٫۷۰۹۷۳	۵۹°	۲۲	۴۳	۶۵	۸۶	۱۰۷	۱۲۹	۱۵۰	۱۷۲	۱۹۳
۳۱°	٫۷۱۱۸۴	٫۷۱۳۹۳	٫۷۱۶۰۲	٫۷۱۸۰۹	٫۷۲۰۱۴	٫۷۲۲۱۸	۵۸°	۲۱	۴۱	۶۲	۸۲	۱۰۳	۱۲۴	۱۴۴	۱۶۵	۱۸۵
۳۲°	٫۷۲۴۲۱	٫۷۲۶۲۲	٫۷۲۸۲۳	٫۷۳۰۲۲	٫۷۳۲۱۹	٫۷۳۴۱۶	۵۷°	۲۰	۴۰	۵۹	۷۹	۹۹	۱۱۹	۱۳۹	۱۵۹	۱۷۸
۳۳°	٫۷۳۶۱۱	٫۷۳۸۰۵	٫۷۳۹۹۷	٫۷۴۱۸۹	٫۷۴۳۷۹	٫۷۴۵۶۸	۵۶°	۱۹	۳۸	۵۷	۷۶	۹۶	۱۱۵	۱۳۴	۱۵۳	۱۷۲
۳۴°	٫۷۴۷۵۶	٫۷۴۹۴۳	٫۷۵۱۲۸	٫۷۵۳۱۳	٫۷۵۴۹۶	٫۷۵۶۷۸	۵۵°	۱۸	۳۷	۵۵	۷۴	۹۲	۱۱۰	۱۲۹	۱۴۷	۱۶۵
۳۵°	۹٫۷۵۸۵۹	۹٫۷۶۰۳۹	۹٫۷۶۲۱۸	۹٫۷۶۳۹۵	۹٫۷۶۵۷۲	۹٫۷۶۷۴۷	۵۴°	۱۸	۳۵	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۶	۱۲۴	۱۴۲	۱۵۹
۳۶°	٫۷۶۹۲۲	٫۷۷۰۹۵	٫۷۷۲۶۸	٫۷۷۴۳۹	٫۷۷۶۰۹	٫۷۷۷۷۸	۵۳°	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۶	۱۰۳	۱۲۰	۱۳۷	۱۵۴
۳۷°	٫۷۷۹۴۶	٫۷۸۱۱۳	٫۷۸۲۸۰	٫۷۸۴۴۵	٫۷۸۶۰۹	٫۷۸۷۷۲	۵۲°	۱۷	۳۳	۵۰	۶۶	۸۳	۹۹	۱۱۶	۱۳۲	۱۴۹
۳۸°	٫۷۸۹۳۴	٫۷۹۰۹۵	٫۷۹۲۵۶	٫۷۹۴۱۵	٫۷۹۵۷۳	٫۷۹۷۳۱	۵۱°	۱۶	۳۲	۴۸	۸۴	۸۰	۹۵	۱۱۲	۱۲۷	۱۴۳
۳۹°	٫۷۹۸۸۷	٫۸۰۰۴۳	٫۸۰۱۹۷	٫۸۰۳۵۱	٫۸۰۵۰۴	٫۸۰۶۵۶	۵۰°	۱۵	۳۱	۴۶	۶۲	۷۷	۹۲	۱۰۸	۱۲۳	۱۳۸

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
°۴۰	۹٫۸۰۸۰۷	۹٫۸۰۹۵۷	۹٫۸۱۱۰۶	۹٫۸۱۲۵۴	۹٫۸۱۴۰۳	۹٫۸۱۵۴۹	°۴۹	۱۵	۳۰	۴۴	۵۹	۷۴	۸۹	۱۰۴	۱۱۸	۱۳۳
°۴۱	٫۸۱۶۹۴	٫۸۱۸۳۹	٫۸۱۹۸۳	٫۸۲۱۲۶	٫۸۲۲۶۹	٫۸۲۴۱۰	°۴۸	۱۴	۲۹	۴۳	۵۷	۷۲	۸۶	۱۰۰	۱۱۴	۱۲۹
°۴۲	٫۸۲۵۵۱	٫۸۲۶۹۱	٫۸۲۸۳۰	٫۸۲۹۶۸	٫۸۳۱۰۶	٫۸۳۲۴۲	°۴۷	۱۴	۲۸	۴۱	۵۵	۶۹	۸۳	۹۷	۱۱۰	۱۲۴
°۴۳	٫۸۳۳۷۸	٫۸۳۵۱۳	٫۸۳۶۴۸	٫۸۳۷۸۱	٫۸۳۹۱۴	٫۸۴۰۴۶	°۴۶	۱۳	۲۷	۴۰	۵۳	۶۷	۸۰	۹۳	۱۰۶	۱۲۰
°۴۴	٫۸۴۱۷۷	٫۸۴۳۰۸	٫۸۴۴۳۷	٫۸۴۵۶۶	٫۸۴۶۹۴	٫۸۴۸۲۲	°۴۵	۱۳	۲۶	۳۸	۵۱	۶۴	۷۷	۹۰	۱۰۳	۱۱۵
°۴۵	۹٫۸۴۹۴۹	۹٫۸۵۰۷۴	۹٫۸۵۲۰۰	۹٫۸۵۳۲۴	۹٫۸۵۴۴۸	۹٫۸۵۵۷۱	°۴۴	۱۲	۲۵	۳۷	۵۰	۶۲	۷۴	۸۷	۹۹	۱۱۱
°۴۶	٫۸۵۶۹۳	٫۸۵۸۱۵	٫۸۵۹۳۶	٫۸۶۰۵۶	٫۸۶۱۷۶	٫۸۶۲۹۵	°۴۳	۱۲	۲۴	۳۶	۴۸	۶۰	۷۲	۸۴	۹۶	۱۰۸
°۴۷	٫۸۶۴۱۳	٫۸۶۵۳۰	٫۸۶۶۴۷	٫۸۶۷۶۳	٫۸۶۸۷۹	٫۸۶۹۹۳	°۴۲	۱۲	۲۳	۳۵	۴۶	۵۸	۷۰	۸۱	۹۳	۱۰۴
°۴۸	٫۸۷۱۰۷	٫۸۷۲۲۱	٫۸۷۳۳۴	٫۸۷۴۴۶	٫۸۷۵۵۷	٫۸۷۶۶۸	°۴۱	۱۱	۲۲	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۸	۸۹	۱۰۰
°۴۹	٫۸۷۷۷۸	٫۸۷۸۸۷	٫۸۷۹۹۶	٫۸۸۱۰۵	٫۸۸۲۱۲	٫۸۸۳۱۹	°۴۰	۱۱	۲۲	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵	۷۶	۸۶	۹۷

لوکارثمی جیوب التمام

	لوگارتمی جیوب							فرق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۵۰°	۹٫۸۸۴۲۵	۹٫۸۸۵۳۱	۹٫۸۸۶۳۶	۹٫۸۸۷۴۱	۹٫۸۸۸۴۴	۹٫۸۸۹۴۸	۳۹°	۱۰	۲۱	۳۱	۴۲	۵۲	۶۲	۷۳	۸۳	۹۴
۵۱°	۹٫۸۹۰۵۰	۹٫۸۹۱۵۲	۹٫۸۹۲۵۴	۹٫۸۹۳۵۴	۹٫۸۹۴۵۵	۹٫۸۹۵۵۴	۳۸°	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
۵۲°	۹٫۸۹۶۵۳	۹٫۸۹۷۵۲	۹٫۸۹۸۴۹	۹٫۸۹۹۴۷	۹٫۹۰۰۴۳	۹٫۹۰۱۳۹	۳۷°	۱۰	۱۹	۲۹	۳۹	۴۹	۵۸	۶۸	۷۸	۸۷
۵۳°	۹٫۹۰۲۳۵	۹٫۹۰۳۳۰	۹٫۹۰۴۲۴	۹٫۹۰۵۱۸	۹٫۹۰۶۱۱	۹٫۹۰۷۰۴	۳۶°	۹	۱۹	۲۸	۳۷	۴۷	۵۶	۶۵	۷۵	۸۴
۵۴°	۹٫۹۰۷۹۶	۹٫۹۰۸۸۷	۹٫۹۰۹۷۸	۹٫۹۱۰۶۹	۹٫۹۱۱۵۸	۹٫۹۱۲۴۸	۳۵°	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	۸۱
۵۵°	۹٫۹۱۳۳۶	۹٫۹۱۴۲۵	۹٫۹۱۵۱۲	۹٫۹۱۵۹۹	۹٫۹۱۶۸۶	۹٫۹۱۷۷۲	۳۴°	۹	۱۷	۲۶	۳۵	۴۴	۵۲	۶۱	۷۰	۷۸
۵۶°	۹٫۹۱۸۵۷	۹٫۹۱۹۴۲	۹٫۹۲۰۲۷	۹٫۹۲۱۱۱	۹٫۹۲۱۹۴	۹٫۹۲۲۷۷	۳۳°	۸	۱۷	۲۵	۳۳	۴۲	۵۰	۵۹	۶۷	۷۶
۵۷°	۹٫۹۲۳۵۹	۹٫۹۲۴۴۱	۹٫۹۲۵۲۲	۹٫۹۲۶۰۳	۹٫۹۲۶۸۳	۹٫۹۲۷۶۳	۳۲°	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۱	۴۹	۵۷	۶۵	۷۳
۵۸°	۹٫۹۲۸۴۲	۹٫۹۲۹۲۱	۹٫۹۲۹۹۹	۹٫۹۳۰۷۷	۹٫۹۳۱۵۴	۹٫۹۳۲۳۰	۳۱°	۸	۱۶	۲۳	۳۱	۳۹	۴۷	۵۵	۶۲	۷۰
۵۹°	۹٫۹۳۳۰۷	۹٫۹۳۳۸۲	۹٫۹۳۴۵۷	۹٫۹۳۵۳۲	۹٫۹۳۶۰۶	۹٫۹۳۶۸۰	۳۰°	۸	۱۵	۲۳	۳۰	۳۷	۴۵	۵۲	۶۰	۶۷

	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۶۰°	۹٫۹۳۷۵۳	۹٫۹۳۸۲۶	۹٫۹۳۸۹۸	۹٫۹۳۹۷۰	۹٫۹۴۰۴۱	۹٫۹۴۱۱۲	۲۹°	۷	۱۴	۲۲	۲۹	۳۶	۴۳	۵۰	۵۷	۶۴
۶۱°	٫۹۴۱۸۲	٫۹۴۲۵۲	٫۹۴۳۲۱	٫۹۴۳۹۰	٫۹۴۴۵۸	٫۹۴۵۲۶	۲۸°	۷	۱۴	۲۱	۲۷	۳۴	۴۱	۴۸	۵۵	۶۲
۶۲°	٫۹۴۵۹۳	٫۹۴۶۶۰	٫۹۴۷۲۶	٫۹۴۷۹۳	٫۹۴۸۵۸	٫۹۴۹۲۳	۲۷°	۷	۱۳	۲۰	۲۶	۳۳	۴۰	۴۶	۵۳	۵۹
۶۳°	٫۹۴۹۸۸	٫۹۵۰۵۲	٫۹۵۱۱۶	٫۹۵۱۷۹	٫۹۵۲۴۲	٫۹۵۳۰۴	۲۶°	۶	۱۳	۱۹	۲۵	۳۲	۳۸	۴۴	۵۰	۵۷
۶۴°	٫۹۵۳۶۶	٫۹۵۴۲۷	٫۹۵۴۸۸	٫۹۵۵۴۹	٫۹۵۶۰۹	٫۹۵۶۶۸	۲۵°	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴
۶۵°	۹٫۹۵۷۲۸	۹٫۹۵۷۸۶	۹٫۹۵۸۴۴	۹٫۹۵۹۰۲	۹٫۹۵۹۶۰	۹٫۹۶۰۱۷	۲۴°	۶	۱۲	۱۷	۲۳	۲۹	۳۵	۴۰	۴۶	۵۲
۶۶°	٫۹۶۰۷۳	٫۹۶۱۲۹	٫۹۶۱۸۵	٫۹۶۲۴۰	٫۹۶۲۹۴	٫۹۶۳۴۹	۲۳°	۶	۱۱	۱۷	۲۲	۲۸	۳۳	۳۸	۴۴	۵۰
۶۷°	٫۹۶۴۰۳	٫۹۶۴۵۶	٫۹۶۵۰۹	٫۹۶۵۶۲	٫۹۶۶۱۴	٫۹۶۶۶۵	۲۲°	۵	۱۰	۱۶	۲۱	۲۶	۳۱	۳۶	۴۲	۴۷
۶۸°	٫۹۶۷۱۷	٫۹۶۷۶۷	٫۹۶۸۱۸	٫۹۶۸۶۸	٫۹۶۹۱۷	٫۹۶۹۶۶	۲۱°	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۲۹	۳۴	۴۰	۴۴
۶۹°	٫۹۷۰۱۵	٫۹۷۰۶۳	٫۹۷۱۱۰	٫۹۷۱۵۹	٫۹۷۲۰۴	٫۹۷۲۵۲	۲۰°	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۴	۲۸	۳۳	۳۸	۴۲

لوکارثمی جیوب التمام

لوگارثمی جیوب							فرق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۷۰°	۹٫۹۷۲۹۹	۹٫۹۷۳۴۴	۹٫۹۷۳۹۰	۹٫۹۷۴۳۵	۹٫۹۷۴۷۹	۹٫۹۷۵۲۳	۱۹°	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۷	۳۱	۳۶	۴۰
۷۱°	٫۹۷۵۶۷	٫۹۷۶۱۰	٫۹۷۶۵۳	٫۹۷۶۹۶	٫۹۷۷۳۸	٫۹۷۷۷۹	۱۸°	۴	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۶	۳۰	۳۴	۳۸
۷۲°	٫۹۷۸۲۱	٫۹۷۸۶۱	٫۹۷۹۰۲	٫۹۷۹۴۲	٫۹۷۹۸۲	٫۹۸۰۲۱	۱۷°	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
۷۳°	٫۹۸۰۶۰	٫۹۸۰۹۸	٫۹۸۱۳۶	٫۹۸۱۷۴	٫۹۸۲۱۱	٫۹۸۲۴۸	۱۶°	۴	۸	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۶	۳۰	۳۴
۷۴°	٫۹۸۲۸۴	٫۹۸۳۲۰	٫۹۸۳۵۶	٫۹۸۳۹۱	٫۹۸۴۲۶	٫۹۸۴۶۰	۱۵°	۴	۷	۱۱	۱۴	۱۸	۲۱	۲۵	۲۸	۳۲
۷۵°	۹٫۹۸۴۹۴	۹٫۹۸۵۲۸	۹٫۹۸۵۶۱	۹٫۹۸۵۹۴	۹٫۹۸۶۲۷	٫۹۸۶۵۹	۱۴°	۳	۷	۱۰	۱۳	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶	۳۰
۷۶°	٫۹۸۶۹۰	٫۹۸۷۲۲	٫۹۸۷۵۳	٫۹۸۷۸۳	٫۹۸۸۱۳	٫۹۸۸۴۳	۱۳°	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷
۷۷°	٫۹۸۸۷۲	٫۹۸۹۰۱	٫۹۸۹۳۰	٫۹۸۹۵۸	٫۹۸۹۸۶	٫۹۹۰۱۳	۱۲°	۳	۶	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰	۲۲	۲۵
۷۸°	٫۹۹۰۴۰	٫۹۹۰۶۷	٫۹۹۰۹۳	٫۹۹۱۱۹	٫۹۹۱۴۵	٫۹۹۱۷۰	۱۱°	۳	۵	۸	۱۰	۱۳	۱۶	۱۸	۲۱	۲۳
۷۹°	٫۹۹۱۹۵	٫۹۹۲۱۹	٫۹۹۲۴۳	٫۹۹۲۶۷	٫۹۹۲۹۰	٫۹۹۳۱۳	۱۰°	۲	۵	۷	۹	۱۲	۱۴	۱۶	۱۹	۲۱

	۶٠	۵٠	۴٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	۴	۵	۶	٧	٨	٩
٨٠°	٩٫٩٩٣٣۵	٩٫٩٩٣۵۶	٩٫٩٩٣٧٩	٩٫٩٩۴٠٠	٩٫٩٩۴٢١	٩٫٩٩۴۴٣	٩	٢	۴	۶	٨	١١	١٣	١۵	١٧	١٩
٨١°	٩٫٩٩۴۶۴	٩٫٩٩۴٨۴	٩٫٩٩۵٠١	٩٫٩٩۵٢٠	٩٫٩٩۵٣٩	٩٫٩٩۵۵٧	٨	٢	۴	۶	٨	١٠	١١	١٣	١۵	١٧
٨٢°	٩٫٩٩۵٧۵	٩٫٩٩۵٩٣	٩٫٩٩۶١٠	٩٫٩٩۶٢٧	٩٫٩٩۶۴٣	٩٫٩٩۶۵٩	٧	٢	٣	۵	٧	٨	١٠	١٢	١٣	١۵
٨٣°	٩٫٩٩۶٧۵	٩٫٩٩۶٩٠	٩٫٩٩٧٠۵	٩٫٩٩٧٢٠	٩٫٩٩٧٣۴	٩٫٩٩٧۴٨	۶	١	٣	۴	۶	٧	٩	١٠	١٢	١٣
٨۴°	٩٫٩٩٧۶١	٩٫٩٩٧٧۵	٩٫٩٩٧٨٧	٩٫٩٩٨٠٠	٩٫٩٩٨١٢	٩٫٩٩٨٢٣	۵	١	٣	۴	۵	۶	٨	٩	١٠	١١
٨۵°	٩٫٩٩٨٣۴	٩٫٩٩٨۴۵	٩٫٩٩٨۵۶	٩٫٩٩٨۶۶	٩٫٩٩٨٧۶	٩٫٩٩٨٨۵	۴	١	٣	٣	۴	۵	۶	٧	٨	٩
٨۶°	٩٫٩٩٨٩۴	٩٫٩٩٩٠٣	٩٫٩٩٩١١	٩٫٩٩٩١٩	٩٫٩٩٩٢۶	٩٫٩٩٩٣٣	٣	١	٢	٢	٣	۴	۵	۶	۶	٧
٨٧°	٩٫٩٩٩۴٠	٩٫٩٩٩۴٧	٩٫٩٩٩۵٣	٩٫٩٩٩۵٩	٩٫٩٩٩۶۴	٩٫٩٩٩۶٩	٢	١	١	٢	٢	٣	٣	۴	۴	۵
٨٨°	٩٫٩٩٩٧۴	٩٫٩٩٩٧٨	٩٫٩٩٩٨٢	٩٫٩٩٩٨۵	٩٫٩٩٩٨٨	٩٫٩٩٩٩١	١	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٢	٣
٨٩°	٩٫٩٩٩٩٣	٩٫٩٩٩٩۵	٩٫٩٩٩٩٧	٩٫٩٩٩٩٨	٩٫٩٩٩٩٩	١٠٫.....	٠									
٩٠	١٠٫.....															

لوگارتمی جیوب التمام

	لوگارثمی مماس							فرق								
	۰'	۱۰'	۲۰'	۳۰'	۴۰'	۵۰'		۱'	۲'	۳'	۴'	۵'	۶'	۷'	۸'	۹'
۰°	∞ −	۷،۴۶۳۷۳	۷،۷۶۴۷۶	۷،۹۴۰۸۶	۸،۰۶۵۸۱	۸،۱۶۲۷۳	۸۹°									
۱°	۸،۲۴۱۹۲	۸،۳۰۸۸۸	۸،۳۶۶۸۹	۸،۴۱۸۰۷	۸،۴۶۳۸۵	۸،۵۰۵۲۷	۸۸°									
۲°	۸،۵۴۳۰۸	۸،۵۷۷۸۸	۸،۶۱۰۰۹	۸،۶۴۰۰۹	۸،۶۶۸۱۶	۸،۶۹۴۵۳	۸۷°									
۳°	۸،۷۱۹۴۰	۸،۷۴۲۹۲	۸،۷۶۵۲۵	۸،۷۸۶۴۹	۸،۸۰۶۷۴	۸،۸۲۶۱۰	۸۶°									
۴°	۸،۸۴۴۶۴	۸،۸۶۲۴۳	۸،۸۷۹۵۳	۸،۸۹۵۹۸	۸،۹۱۱۸۵	۸،۹۲۷۱۶	۸۵°									
۵°	۸،۹۴۱۹۵	۸،۹۵۶۲۷	۸،۹۷۰۱۳	۸،۹۸۳۵۸	۸،۹۹۶۶۲	۹،۰۰۹۳۰	۸۴°									
۶°	۹،۰۲۱۶۲	۹،۰۳۳۶۱	۹،۰۴۵۲۸	۹،۰۵۶۶۶	۹،۰۶۷۷۵	۹،۰۷۸۵۸	۸۳°									
۷°	۹،۰۸۹۱۴	۹،۰۹۹۴۷	۹،۱۰۹۵۶	۹،۱۱۹۴۳	۹،۱۲۹۰۹	۹،۱۳۸۵۴	۸۲°	۹۸	۱۹۵	۲۹۳	۳۹۱	۴۸۸	۵۸۶	۶۸۴	۷۸۲	۸۷۹
۸°	۹،۱۴۷۸۰	۹،۱۵۶۸۸	۹،۱۶۵۷۷	۹،۱۷۴۵۰	۹،۱۸۳۰۶	۹،۱۹۱۴۶	۸۱°	۸۷	۱۷۳	۲۶۰	۳۴۶	۴۳۳	۵۱۹	۶۰۶	۶۹۲	۷۷۹
۹°	۹،۱۹۹۷۱	۹،۲۰۷۸۲	۹،۲۱۵۷۸	۹،۲۲۳۶۱	۹،۲۳۱۳۰	۹،۲۳۸۸۷	۸۰°	۷۸	۱۵۵	۲۳۳	۳۱۰	۳۸۸	۴۶۶	۵۴۳	۶۲۱	۶۹۸

فرق یہاں اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ ان کا درج کرنا ناممکن ہے قلیل زاویہ ن کے لیے لوگ مس ن یا لوگ مم (۹۰-ن)

= لوگ ن + $\bar{۴}$،۴۶۳۷۳

لوگارتمی ماس التام

١٠°	٩٫٢۴۶٣٢	٩٫٢۵٣۶۵	٩٫٢۶٠٨۶	٩٫٢۶٧٩٧	٩٫٢٧۴٩۶	٩٫٢٨١٨۶	٧٩°	٧١	١۴١	٢١٢	٢٨٢	٣۵٣	۴٢٣	۴٩۴	۵۶۴	۶٣۵
١١°	٫٢٨٨۶۵	٫٢٩۵٣۵	٫٣٠١٩۵	٫٣٠٨۴۶	٫٣١۴٨٩	٫٣٢١٢٢	٧٨°	۶۵	١٢٩	١٩۴	٢۵٩	٣٢٣	٣٨٨	۴۵٣	۵١٨	۵٨٢
١٢°	٫٣٢٧۴٧	٫٣٣٣۶۵	٣٣٩٧۴	٫٣۴۵٧۶	٫٣۵١٧٠	٫٣۵٧۵٧	٧٧°	۶٠	١٢٠	١٧٩	٢٣٩	٢٩٩	٣۵٩	۴١٩	۴٧٨	۵٣٨
١٣°	٫٣۶٣٣۶	٫٣۶٩٠٩	٫٣٧۴٧۶	٫٣٨٠٣۵	٫٣٨۵٨٩	٫٣٩١٣۶	٧۶°	۵۶	١١١	١۶٧	٢٢٢	٢٧٨	٣٣٣	٣٨٩	۴۴۵	۵٠٠
١۴°	٫٣٩۶٧٧	٫۴٠٢١٢	٫۴٠٧۴٢	٫۴١٢۶۶	٫۴١٧٨۴	٫۴٢٢٩٧	٧۵°	۵٢	١٠۴	١۵۶	٢٠٨	٢۶١	٣١٣	٣۶۵	۴١٧	۴۶٩
١۵°	٩٫۴٢٨٠۵	٩٫۴٣٣٠٨	٩٫۴٣٨٠۶	٩٫۴۴٢٩٩	٩٫۴۴٧٨٧	٩٫۴۵٢٧١	٧۴°	۴٩	٩٨	١۴٧	١٩۶	٢۴۵	٢٩۴	٣۴٣	٣٩٢	۴۴٢
١۶°	٫۴۵٧۵٠	٫۴۶٢٢۴	۴۶۶٩۴	٫۴٧١۶٠	٫۴٧۶٢٢	٫۴٨٠٨٠	٧٣°	۴۶	٩٢	١٣٩	١٨۶	٢٣٢	٢٧٨	٣٢۵	٣٧١	۴١٨
١٧°	٫۴٨۵٣۴	٫۴٨٩٨۴	۴٩۴٣٠	٫۴٩٨٧٢	٫۵٠٣١١	٫۵٠٧۴۶	٧٢°	۴۴	٨٨	١٣٢	١٧۶	٢٢٠	٢۶۴	٣٠٨	٣۵٢	٣٩۶
١٨°	٫۵١١٧٨	٫۵١۶٠۶	٫۵٢٠٣١	٫۵٢۴۵٣	٫۵٢٨٧٠	٫۵٣٢٨۵	٧١°	۴٢	٨۴	١٢۶	١۶٨	٢١٠	٢۵٢	٢٩۴	٣٣۶	٣٧٨
١٩°	٫۵٣۶٩٧	٫۵۴١٠۶	٫۵۴۵١٢	٫۵۴٩١۵	٫۵۵٣١۵	٫۵۵٧١٢	٧٠°	۴٠	٨٠	١٢١	١۶١	٢٠١	٢۴١	٢٨١	٣٢١	٣۶٢
	۶٠	۵٠	۴٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	۴	۵	۶	٧	٨	٩

	لوکارثمی مماس							فرق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۲۰°	۹٫۵۶۱۰۷	۹٫۵۶۴۹۸	۹٫۵۶۸۸۶	۹٫۵۷۲۷۴	۹٫۵۷۶۵۸	۹٫۵۸۰۳۹	۶۹°	۳۹	۷۷	۱۱۶	۱۵۴	۱۹۳	۲۳۱	۲۷۰	۳۰۸	۳۴۷
۲۱°	٫۵۸۴۱۸	٫۵۸۷۹۴	٫۵۹۱۶۸	٫۵۹۵۴۰	٫۵۹۹۰۹	٫۶۰۲۷۶	۶۸°	۳۷	۷۴	۱۱۱	۱۴۸	۱۸۵	۲۲۲	۲۵۹	۲۹۶	۳۳۳
۲۲°	٫۶۰۶۴۱	٫۶۱۰۰۴	٫۶۱۳۶۴	٫۶۱۷۲۲	٫۶۲۰۷۹	٫۶۲۴۳۳	۶۷°	۳۶	۷۲	۱۰۷	۱۴۳	۱۷۹	۲۱۵	۲۵۰	۲۸۶	۳۲۲
۲۳°	٫۶۲۷۸۵	٫۶۳۱۳۵	٫۶۳۴۸۴	٫۶۳۸۳۰	٫۶۴۱۷۵	٫۶۴۵۱۷	۶۶°	۳۵	۶۹	۱۰۴	۱۳۸	۱۷۳	۲۰۸	۲۴۲	۲۷۷	۳۱۱
۲۴°	٫۶۴۸۵۸	٫۶۵۱۹۷	٫۶۵۵۳۵	٫۶۵۸۷۰	٫۶۶۲۰۴	٫۶۶۵۳۷	۶۵°	۳۴	۶۷	۱۰۱	۱۳۴	۱۶۸	۲۰۱	۲۳۵	۲۶۸	۳۰۲
۲۵°	۹٫۶۶۸۶۷	۹٫۶۷۱۹۶	۹٫۶۷۵۲۴	۹٫۶۷۸۵۰	۹٫۶۸۱۷۴	۹٫۶۸۴۹۷	۶۴°	۳۳	۶۵	۹۸	۱۳۰	۱۶۳	۱۹۵	۲۲۸	۲۶۰	۲۹۳
۲۶°	٫۶۸۸۱۸	٫۶۹۱۳۸	٫۶۹۴۵۷	٫۶۹۷۷۴	٫۷۰۰۸۹	٫۷۰۴۰۴	۶۳°	۳۲	۶۳	۹۵	۱۲۶	۱۵۸	۱۹۰	۲۲۱	۲۵۳	۲۸۴
۲۷°	٫۷۰۷۱۷	٫۷۱۰۲۸	٫۷۱۳۳۹	٫۷۱۶۴۸	٫۷۱۹۵۵	٫۷۲۲۶۲	۶۲°	۳۱	۶۲	۹۲	۱۲۳	۱۵۴	۱۸۵	۲۱۶	۲۴۶	۲۷۷
۲۸°	٫۷۲۵۶۷	٫۷۲۸۷۲	٫۷۳۱۷۵	٫۷۳۴۷۶	٫۷۳۷۷۷	٫۷۴۰۷۷	۶۱°	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۱	۱۸۱	۲۱۱	۲۴۱	۲۷۱
۲۹°	٫۷۴۳۷۵	٫۷۴۶۷۳	٫۷۴۹۶۹	٫۷۵۲۶۴	٫۷۵۵۵۸	٫۷۵۸۵۲	۶۰°	۲۹	۵۹	۸۸	۱۱۸	۱۴۷	۱۷۷	۲۰۶	۲۳۵	۲۶۵

°۳۰	۹،۷۶۱۴۴	۹،۷۶۴۳۵	۹،۷۶۷۲۵	۹،۷۷۰۱۵	۹،۷۷۳۰۳	۹،۷۷۵۹۱	°۵۹	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۴	۱۷۳	۲۰۲	۲۳۱	۲۶۰
°۳۱	،۷۷۸۷۷	،۷۸۱۶۳	،۷۸۴۴۸	،۷۸۷۳۲	،۷۹۰۱۵	،۷۹۲۹۷	°۵۸	۲۸	۵۷	۸۵	۱۱۳	۱۴۲	۱۷۰	۱۹۸	۲۲۶	۲۵۵
°۳۲	،۷۹۵۷۹	،۷۹۸۶۰	،۸۰۱۴۰	،۸۰۴۱۹	،۸۰۶۹۷	،۸۰۹۷۵	°۵۷	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۳۹	۱۶۷	۱۹۵	۲۲۳	۲۵۱
°۳۳	،۸۱۲۵۲	،۸۱۵۲۸	،۸۱۸۰۳	،۸۲۰۷۸	،۸۲۳۵۲	،۸۲۶۲۶	°۵۶	۲۸	۵۵	۸۳	۱۱۰	۱۳۷	۱۶۵	۱۹۲	۲۲۰	۲۴۷
°۳۴	،۸۲۸۹۹	،۸۳۱۷۱	،۸۳۴۴۲	،۸۳۷۱۳	،۸۳۹۸۴	،۸۴۲۵۴	°۵۵	۲۷	۵۴	۸۱	۱۰۸	۱۳۶	۱۶۲	۱۹۰	۲۱۷	۲۴۴
°۳۵	۹،۸۴۵۲۳	۹،۸۴۷۹۱	۹،۸۵۰۵۹	۹،۸۵۳۲۶	۹،۸۵۵۹۴	،۸۵۸۶۰	°۵۴	۲۷	۵۴	۸۰	۱۰۷	۱۳۴	۱۶۰	۱۸۸	۲۱۴	۲۴۱
°۳۶	،۸۶۱۲۶	،۸۶۳۹۲	،۸۶۶۵۸	،۸۶۹۲۱	،۸۷۱۸۵	،۸۷۴۴۸	°۵۳	۲۶	۵۳	۷۹	۱۰۶	۱۳۲	۱۵۸	۱۸۵	۲۱۲	۲۳۸
°۳۷	،۸۷۷۱۱	،۸۷۹۷۴	،۸۸۲۳۶	،۸۸۴۹۸	،۸۸۷۵۹	،۸۹۰۲۰	۵۲	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۵	۱۳۱	۱۵۷	۱۸۳	۲۰۹	۲۳۶
°۳۸	،۸۹۲۸۱	،۸۹۵۴۱	،۸۹۸۰۱	،۹۰۰۶۱	،۹۰۳۲۰	،۹۰۵۷۸	°۵۱	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۴	۱۳۰	۱۵۶	۱۸۲	۲۰۸	۲۳۴
°۳۹	،۹۰۸۳۷	،۹۱۰۹۵	،۹۱۳۵۳	،۹۱۶۱۰	،۹۱۸۶۸	،۹۲۱۲۵	۵۰	۲۶	۵۲	۷۷	۱۰۳	۱۲۹	۱۵۵	۱۸۰	۲۰۶	۲۳۲
	′۶۰	′۵۰	′۴۰	′۳۰	′۲۰	′۱۰		′۱	′۲	′۳	′۴	′۵	′۶	′۷	′۸	′۹

لوگارثمی مماس التمام

لوگارثمی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
								فرق								
۴۰°	۹٫۹۲۳۸۱	۹٫۹۲۶۳۸	۹٫۹۲۸۹۴	۹٫۹۳۱۵۰	۹٫۹۳۴۰۶	۹٫۹۳۶۶۱	۴۹°	۲۶	۵۱	۷۷	۱۰۲	۱۲۸	۱۵۳	۱۷۹	۲۰۵	۲۳۰
۴۱°	٫۹۳۹۱۶	٫۹۴۱۷۱	٫۹۴۴۲۶	٫۹۴۶۸۱	٫۹۴۹۳۵	٫۹۵۱۹۰	۴۸°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۲	۱۲۷	۱۵۳	۱۷۸	۲۰۴	۲۲۹
۴۲°	٫۹۵۴۴۴	٫۹۵۶۹۸	٫۹۵۹۵۲	٫۹۶۲۰۵	٫۹۶۴۵۹	٫۹۶۷۱۲	۴۷°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۳	۲۲۸
۴۳°	٫۹۶۹۶۶	٫۹۷۲۱۹	٫۹۷۴۷۲	٫۹۷۷۲۵	٫۹۷۹۷۸	٫۹۸۲۳۱	۴۶°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۴°	٫۹۸۴۸۴	٫۹۸۷۳۷	٫۹۸۹۸۹	٫۹۹۲۴۲	٫۹۹۴۹۵	٫۹۹۷۴۷	۴۵°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۵°	۱۰٫۰۰۰۰۰	۱۰٫۰۰۲۵۳	۱۰٫۰۰۵۰۵	۱۰٫۰۰۷۵۸	۱۰٫۰۱۰۱۱	۱۰٫۰۱۲۶۳	۴۴°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۶°	٫۰۱۵۱۶	٫۰۱۷۶۹	٫۰۲۰۲۲	٫۰۲۲۷۵	٫۰۲۵۲۸	٫۰۲۷۸۱	۴۳°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۷°	٫۰۳۰۳۴	٫۰۳۲۸۸	٫۰۳۵۴۱	٫۰۳۷۹۵	٫۰۴۰۴۸	٫۰۴۳۰۲	۴۲°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۳	۲۲۸
۴۸°	٫۰۴۵۵۶	٫۰۴۸۱۰	٫۰۵۰۶۵	٫۰۵۳۱۹	٫۰۵۵۷۴	٫۰۵۸۲۹	۴۱°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۲	۱۲۷	۱۵۳	۱۷۸	۲۰۴	۲۲۹
۴۹°	٫۰۶۰۸۴	٫۰۶۳۳۹	٫۰۶۵۹۴	٫۰۶۸۵۰	٫۰۷۱۰۶	٫۰۷۳۶۲	۴۰°	۲۶	۵۱	۷۷	۱۰۲	۱۲۸	۱۵۴	۱۷۹	۲۰۵	۲۳۰

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۱.۰.۷۶۱۹	۱.۰.۷۸۶۵	۱.۰.۸۱۳۲	۱.۰.۸۳۹۰	۱.۰.۸۶۴۷	۱.۰.۸۹۰۵	۳۹	۲۶	۵۲	۷۷	۱۰۳	۱۲۹	۱۵۵	۱۸۰	۲۰۶	۲۳۲
۵۱	۰.۹۱۶۳	۰.۹۴۲۲	۰.۹۶۸۰	۰.۹۹۳۹	۰۱.۱۹۹	۰۱.۴۵۹	۳۸	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۴	۱۳۰	۱۵۶	۱۸۲	۲۰۸	۲۳۴
۵۲	۰۱.۷۱۹	۰۱.۹۸۰	۰۱۱۲۴۱	۰۱۱۵.۲	۰۱۱۷۶۴	۰۱۲.۲۶	۳۷	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۵	۱۳۱	۱۵۷	۱۸۳	۲۰۹	۲۳۶
۵۳	۰۱۲۲۸۹	۰۱۲۵۵۲	۰۱۲۸۱۵	۰۱۳.۷۹	۰۱۳۳۴۴	۰۱۳۶.۸	۳۶	۲۶	۵۳	۷۹	۱۰۶	۱۳۲	۱۵۸	۱۸۵	۲۱۲	۲۳۸
۵۴	۰۱۳۸۷۴	۰۱۴۱۴۰	۰۱۴۴.۶	۰۱۴۶۷۳	۰۱۴۹۴۱	۰۱۵۲.۹	۳۵	۲۷	۵۴	۸۰	۱۰۷	۱۳۴	۱۶۰	۱۸۸	۲۱۴	۲۴۱
۵۵	۱.۰۱۵۴۷۷	۱.۰۱۵۷۴۶	۱.۰۱۶.۱۶	۱.۰۱۶۲۸۷	۱.۰۱۶۵۵۸	۱.۰۱۶۸۲۹	۳۴	۲۷	۵۴	۸۱	۱۰۸	۱۳۶	۱۶۳	۱۹۰	۲۱۷	۲۴۴
۵۶	۰۱۷۱.۱	۰۱۷۳۷۴	۰۱۷۶۴۸	۰۱۷۹۲۲	۰۱۸۱۹۷	۰۱۸۴۷۲	۳۳	۲۸	۵۵	۸۳	۱۱۰	۱۳۷	۱۶۵	۱۹۲	۲۲۰	۲۴۷
۵۷	۰۱۸۷۴۸	۰۱۹.۲۵	۰۱۹۳.۳	۰۱۹۵۸۱	۰۱۹۸۶۰	۰۲.۱۴۰	۳۲	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۳۹	۱۶۷	۱۹۵	۲۲۳	۲۵۱
۵۸	۰۲.۴۲۱	۰۲.۷.۳	۰۲.۹۸۵	۰۲۱۲۶۸	۰۲۱۵۵۲	۰۲۱۸۳۷	۳۱	۲۸	۵۷	۸۵	۱۱۳	۱۴۲	۱۷۰	۱۹۸	۲۲۷	۲۵۵
۵۹	۰۲۲۱۲۳	۰۲۲۴.۹	۰۲۲۶۹۷	۰۲۲۹۸۵	۰۲۳۲۷۵	۰۲۳۵۶۵	۳۰	۲۹	۵۸	۸۶	۱۱۴	۱۴۴	۱۷۳	۲۰۲	۲۳۱	۲۶۰

لوکارتمی مماس التمام

لوگارثمی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۶۰°	۱۰٫۲۳۸۵۶	۱۰٫۲۴۱۴۸	۱۰٫۲۴۴۴۲	۱۰٫۲۴۷۳۶	۱۰٫۲۵۰۳۱	۱۰٫۲۵۳۲۷	۲۹°	۲۹	۵۹	۸۸	۱۱۸	۱۴۷	۱۷۷	۲۰۶	۲۳۶	۲۶۵
۶۱°	٫۲۵۶۲۵	٫۲۵۹۲۳	٫۲۶۲۲۳	٫۲۶۵۲۴	٫۲۶۸۲۵	٫۲۷۱۲۸	۲۸°	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۱	۱۸۱	۲۱۱	۲۴۱	۲۷۱
۶۲°	٫۲۷۴۳۳	٫۲۷۷۳۸	٫۲۸۰۴۵	٫۲۸۳۵۲	٫۲۸۶۶۱	٫۲۸۹۷۲	۲۷°	۳۱	۶۲	۹۲	۱۲۳	۱۵۴	۱۸۵	۲۱۶	۲۴۶	۲۷۷
۶۳°	٫۲۹۲۸۳	٫۲۹۵۹۶	٫۲۹۹۱۱	٫۳۰۲۲۶	٫۳۰۵۴۳	٫۳۰۸۶۲	۲۶°	۳۲	۶۳	۹۵	۱۲۶	۱۵۸	۱۹۰	۲۲۱	۲۵۳	۲۸۴
۶۴°	٫۳۱۱۸۲	٫۳۱۵۰۳	٫۳۱۸۲۶	٫۳۲۱۵۰	٫۳۲۴۷۶	٫۳۲۸۰۴	۲۵°	۳۳	۶۵	۹۸	۱۳۰	۱۶۳	۱۹۵	۲۲۸	۲۶۰	۲۹۳
۶۵°	۱۰٫۳۳۱۳۳	۱۰٫۳۳۴۶۳	۱۰٫۳۳۷۹۶	۱۰٫۳۴۱۳۰	۱۰٫۳۴۴۶۵	۱۰٫۳۴۸۰۳	۲۴°	۳۴	۶۷	۱۰۱	۱۳۴	۱۶۸	۲۰۱	۲۳۵	۲۶۸	۳۰۲
۶۶°	٫۳۵۱۴۲	٫۳۵۴۸۳	٫۳۵۸۲۵	٫۳۶۱۷۰	٫۳۶۵۱۶	٫۳۶۸۶۵	۲۳°	۳۵	۶۹	۱۰۴	۱۳۸	۱۷۳	۲۰۸	۲۴۲	۲۷۷	۳۱۱
۶۷°	٫۳۷۲۱۵	٫۳۷۵۶۷	٫۳۷۹۲۱	٫۳۸۲۷۸	٫۳۸۶۳۶	٫۳۸۹۹۶	۲۲°	۳۶	۷۲	۱۰۷	۱۴۳	۱۶۹	۲۱۴	۲۵۱	۲۸۶	۳۲۱
۶۸°	٫۳۹۳۵۹	٫۳۹۷۲۴	٫۴۰۰۹۱	٫۴۰۴۶۰	٫۴۰۸۳۲	٫۴۱۲۰۶	۲۱°	۳۷	۷۴	۱۱۱	۱۴۸	۱۸۵	۲۲۲	۲۵۹	۲۹۶	۳۳۳
۶۹°	٫۴۱۵۸۲	٫۴۱۹۶۱	٫۴۲۳۴۲	٫۴۲۷۲۶	٫۴۳۱۱۳	٫۴۳۵۰۲	۲۰°	۳۹	۷۷	۱۱۶	۱۵۴	۱۹۳	۲۳۱	۲۷۰	۳۰۸	۳۴۷

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
°۷۰	۱۰٫۴۳۸۹۳	۱۰٫۴۴۲۸۸	۱۰٫۴۴۶۸۵	۱۰٫۴۵۰۸۵	۱۰٫۴۵۴۸۸	۱۰٫۴۵۸۹۴	°۱۹	۴۰	۸۰	۱۲۱	۱۶۰	۲۰۱	۲۴۱	۲۸۱	۳۲۱	۳۶۲
°۷۱	٫۴۶۳۰۳	٫۴۶۷۱۵	٫۴۷۱۳۰	٫۴۷۵۴۸	٫۴۷۹۶۹	٫۴۸۳۹۴	°۱۸	۴۲	۸۴	۱۲۶	۱۶۸	۲۱۰	۲۵۲	۲۹۴	۳۳۶	۳۷۸
°۷۲	٫۴۸۸۲۲	٫۴۹۲۵۴	٫۴۹۶۸۹	٫۵۰۱۲۸	٫۵۰۵۷۰	٫۵۱۰۱۷	°۱۷	۴۴	۸۸	۱۳۲	۱۷۶	۲۲۰	۲۶۴	۳۰۸	۳۵۲	۳۹۶
°۷۳	٫۵۱۴۶۶	٫۵۱۹۲۰	٫۵۲۳۷۸	٫۵۲۸۴۰	٫۵۳۳۰۶	٫۵۳۷۷۷	°۱۶	۴۶	۹۳	۱۳۹	۱۸۶	۲۳۲	۲۷۸	۳۲۵	۳۷۱	۴۱۸
°۷۴	٫۵۴۲۵۰	٫۵۴۷۲۹	٫۵۵۲۱۳	٫۵۵۷۰۱	٫۵۶۱۹۴	٫۵۶۶۹۲	°۱۵	۴۹	۹۸	۱۴۷	۱۹۶	۲۴۵	۲۹۴	۳۴۳	۳۹۳	۴۴۲
°۷۵	۱۰٫۵۷۱۹۵	۱۰٫۵۷۷۰۳	۱۰٫۵۸۲۱۶	۱۰٫۵۸۷۳۴	۱۰٫۵۹۲۵۸	۱۰٫۵۹۷۸۸	°۱۴	۵۲	۱۰۴	۱۵۶	۲۰۸	۲۶۱	۳۱۳	۳۶۵	۴۱۷	۴۶۹
°۷۶	٫۶۰۳۲۳	٫۶۰۸۶۴	٫۶۱۴۱۱	٫۶۱۹۶۵	٫۶۲۵۲۴	٫۶۳۰۹۱	°۱۳	۵۶	۱۱۱	۱۶۷	۲۲۲	۲۷۸	۳۳۴	۳۸۹	۴۴۵	۵۰۰
°۷۷	٫۶۳۶۶۴	٫۶۴۲۴۳	٫۶۴۸۳۰	٫۶۵۴۲۴	٫۶۶۰۲۶	٫۶۶۶۳۵	°۱۲	۶۰	۱۲۰	۱۷۹	۲۳۹	۲۹۹	۳۵۹	۴۱۹	۴۷۸	۵۳۸
°۷۸	٫۶۷۲۵۳	٫۶۷۸۷۸	٫۶۸۵۱۱	٫۶۹۱۵۴	٫۶۹۸۰۵	٫۷۰۴۶۵	°۱۱	۶۵	۱۲۹	۱۹۴	۲۵۹	۳۲۳	۳۸۸	۴۵۳	۵۱۸	۵۸۲
°۷۹	٫۷۱۱۳۵	٫۷۱۸۱۴	٫۷۲۵۰۴	٫۷۳۲۰۳	٫۷۳۹۱۴	٫۷۴۶۳۵	°۱۰	۷۱	۱۴۱	۲۱۲	۲۸۲	۳۵۴	۴۲۰	۴۹۴	۵۶۴	۶۳۵

لوکارثمی مماس التمام

	لوگارثمی مماس							فرق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۸۰°	۱۰٫۷۵۳۶۸	۱۰٫۷۶۱۱۳	۱۰٫۷۶۸۷۰	۱۰٫۷۷۶۳۹	۱۰٫۷۸۴۲۲	۱۰٫۷۹۲۱۸	۹°	۷۸	۱۵۵	۲۳۳	۳۱۰	۳۸۸	۴۶۶	۵۴۳	۶۲۱	۶۹۸
۸۱°	٫۸۰۰۲۹	٫۸۰۸۵۴	٫۸۱۶۹۴	٫۸۲۵۵۰	٫۸۳۴۲۳	٫۸۴۳۱۲	۸°	۸۶	۱۷۳	۲۶۰	۳۴۶	۴۳۳	۵۱۹	۶۰۶	۶۹۲	۷۷۹
۸۲°	٫۸۵۲۲۰	٫۸۶۱۴۶	٫۸۷۰۹۱	٫۸۸۰۵۶	٫۸۹۰۴۴	٫۹۰۰۵۳	۷°	۹۸	۱۹۵	۲۹۳	۳۹۱	۴۸۸	۵۸۶	۶۸۴	۷۸۲	۸۷۹
۸۳°	٫۹۱۰۸۶	٫۹۲۱۴۴	٫۹۳۲۲۵	٫۹۴۳۳۴	٫۹۵۴۷۲	٫۹۶۶۳۹	۶°									
۸۴°	٫۹۷۸۳۰	٫۹۹۰۷۰	۱۱٫۰۰۳۳۸	۱۱٫۰۱۶۴۴	۱۱٫۰۲۹۸۷	۱۱٫۰۴۳۷۳	۵°									
۸۵°	۱۱٫۰۵۸۰۵	۱۱٫۰۷۲۸۴	۱۱٫۰۸۸۱۵	۱۱٫۱۰۴۰۲	۱۱٫۱۲۰۴۷	۱۱٫۱۳۷۵۷	۴°	فرق اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ درج نہیں ہو سکتے								
۸۶°	۱۱٫۱۵۵۳۶	۱۱٫۱۷۳۹۰	۱۱٫۱۹۳۲۶	۱۱٫۲۱۳۵۱	۱۱٫۲۳۴۷۵	۱۱٫۲۵۷۰۸	۳°									
۸۷°	۱۱٫۲۸۰۶۰	۱۱٫۳۰۵۴۷	۱۱٫۳۳۱۸۴	۱۱٫۳۵۹۹۱	۱۱٫۳۸۹۹۱	۱۱٫۴۲۲۱۲	۲°									
۸۸°	۱۱٫۴۵۶۹۲	۱۱٫۴۹۴۷۳	۱۱٫۵۳۶۱۵	۱۱٫۵۸۱۹۳	۱۱٫۶۳۳۱۱	۱۱٫۶۹۱۱۲	۱°									
۸۹°	۱۱٫۷۵۸۰۸	۱۱٫۸۳۷۲۷	۱۱٫۹۳۴۱۹	۱۲٫۰۵۹۱۴	۱۲٫۲۳۵۲۴	۱۲٫۵۳۶۲۷	۰°									
۹۰°	+∞															
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′

لوگارثمی مماس التمام

مقادیر مستقلہ

ایک زاویہ نیم قطری = ۵۷° ۱۴' ۴۵'' تقریباً = ۲۰۶۲۶۵''

لوک ۲۰۶۲۶۵ = ۵٫۳۱۴۴۲۵۵

π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵

$\frac{1}{\pi}$ = ۰٫۳۱۸۳۰۹۸۹

$\frac{\pi}{180}$ = ۰٫۰۱۷۴۵۳۲۹

$\frac{180}{\pi}$ = ۵۷٫۲۹۵۷۷۹۵

π^2 = ۹٫۸۶۹۶۰۴۴۰

$\frac{1}{\pi^2}$ = ۰٫۱۰۱۳۲۱۱۸

$\sqrt{\pi}$ = ۱٫۷۷۲۴۵۳۸۵

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ = ۰٫۵۶۴۱۸۹۵۸

$\sqrt[3]{\pi}$ = ۱٫۴۶۴۵۹۱۸۹

$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ = ۰٫۶۸۲۷۸۴۰۶

$\sqrt{2}$ = ۱٫۴۱۴۲۱۳۵...

$\sqrt{5}$ = ۲٫۲۳۶۰۶۷۹...

$\sqrt{7}$ = ۲٫۶۴۵۷۵۱۳...

$\sqrt{10}$ = ۳٫۱۶۲۲۷۷۶...

لوک π = ۰٫۴۹۷۱۴۹۹

لوک $\frac{1}{\pi}$ = $\bar{1}$٫۵۰۲۸۵۰۱

لوک $\frac{\pi}{180}$ = $\bar{2}$٫۲۴۱۸۷۷۴

لوک $\frac{180}{\pi}$ = ۱٫۷۵۸۱۲۲۶

لوک π^2 = ۰٫۹۹۹۲۹۹۷

لوک $\frac{1}{\pi^2}$ = $\bar{1}$٫۰۰۵۷۰۰۳

لوک $\sqrt{\pi}$ = ۰٫۲۴۸۵۷۴۹

لوک $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ = $\bar{1}$٫۷۵۱۴۲۵۱

لوک $\sqrt[3]{\pi}$ = ۰٫۱۶۵۷۱۶۶

لوک $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ = $\bar{1}$٫۸۳۴۲۸۳۴

$\sqrt{3}$ = ۱٫۷۳۲۰۵۰۸...

$\sqrt{6}$ = ۲٫۴۴۹۴۹۸۹...

$\sqrt{8}$ = ۲٫۸۲۸۴۲۷۱...

تمت

فہرست اصطلاحات

علم مثلث

A

انگریزی	اردو
Angle (Right angle)	زاویہ (زاویۂ قائمہ)
Arc	قوس
Angle of elevation	زاویۂ ارتفاع
Angle of depression	زاویۂ انخفاض
Ambiguous case	صورتِ مشتبہ

B

انگریزی	اردو
Bisector {Internal, External}	منصّف {داخلی، خارجی}
Base line	بنیادی خط
Bearings (Compass)	جہات

C

انگریزی	اردو
Circular measure	قوسی پیمانہ
Centesimal measure	مئی پیمانہ
Clockwise (Counter clockwise)	موافق سمتِ ساعت (متقابل سمتِ ساعت)
Constants	مستقل مقداریں
Circumference	محیط

اُردو	انگریزی
وِتر	Chord
جیب التمام	Cosine
ماس التمام	Cotangent
قاطع التمام	Cosecant
سہم التمام	Coversed Sine
متمّم زاویے	Complementary angles
متمّم	Complement
ممیّز	Characteristic
بیرونی دائرہ	Circum-circle
مرکزِ ہندسی	Centroid
بیرونی دائرہ کا مرکز	Circum-centre
مستدیر جملے	Circular functions

D

اُردو	انگریزی
درجہ، دقیقہ، ثانیہ درجہ، منٹ، سکنڈ	Degree, minute, second.
معشّر	Decagon
اثنا عشری	Dodecagon
(افق کا) میلان	Dip (of the horizon)
ابعاد	Dimensions
قطر	Diameter

E

اُردو	انگریزی
(مثلث) مساوی الاضلاع	Equilateral (triangle)
ارتفاع	Elevation
(مثلث کے) اجزا	Elements (of a triangle)

انگریزی	اردو
Escribed circle	جانبی دائرہ
Elimination	اسقاط
Excentric triangle	جانبی مرکزوں کا مثلث
F	
Fixed (lines, axes)	ثابت (خطوط، محاور)
Fundamental (formulæ)	اساسی (ضابطے)
Formula	ضابطہ
G	
Geographical (miles)	جغرافی (میل)
Graph	ترسیم
Gradient	اُتار چڑھاؤ
H	
Heptagon	مسبع
I	
Infinity	لا تناہی
Isosceles (triangle)	(مثلث) متساوی الساقین
Identities	متماثلات
Incircle	اندرونی دائرہ
Incentre	اندرونی دائرہ کا مرکز
Inverse circular fuuctions	مقلوب مستدیر تفاعیل
Incommensurable	متبائن
L	
Latitude	عرض بلد
Logarithm	لوکارتم

اُردو	انگریزی
خط میلانِ اعظم	Line of greatest slope
M	
نصف النہار	Meridian
ضعفی زاویے	Multiple angles
اعشاریۂ لوکارتمی	Mantissa
خطِ وسطی	Median
N	
نو نقطی دائرہ	Nine point circle
(ناقص کا) عماد	Normal (to an ellipse)
O	
مرکزِ عمودی	Ortho-centre
مثمن	Octagon
مدار (زمین)	Orbit (Earth)
(زاویہ) منفرجہ (زاویہ) حادہ	Obtuse, Acute, (Angles)
P	
(علمِ مثلث) مستوی	Plane (Trigonometry)
گھیرا۔ مجموعۂ اضلاع	Perimeter
مخمس	Pentagon
لامتناہی پر کا نقطہ (خط)	Point (line) at infinity
ادوار	Periods
جملاتِ دوریہ	Periodic functions
(اصول) اجزائے متناسب	Proportional parts (principle of)
مثلث پائین	Pedal triangle
تظلیل (ظلّ)	Projection

انگریزی	اُردو
Q	
Quadrant	رُبع
Quadrilateral	ذو اربعۃ الاضلاع
R	
Revolving line	خطِ دائر
Right angled triangle	مثلث قائم الزاویہ
Radian	نیم قطری
Regular (poylgon)	منتظم (کثیرالاضلاع)
Radius	نصف قطر
Rectilinear (figure)	(شکل) مستقیم الاضلاع
Reciprocal	متکافی
S	
Spherical (Trigonometry)	(علمِ مثلث) کروی
Sexagesimal measure	ستینی پیمانہ
Sector	قطاع (دائرہ)
Semi-circle	نصف دائرہ
Segment	قطعہ (دائرہ)
Sirius	شعریٰ
Sine	جیب
Secant	قاطع التمام
Sextant	سُدس
Supplement	تکملہ
Submultiple angles	کسری زاویے
Subsidiary angles	امدادی زاویے

اُردو	انگریزی
(مثلثوں کا) حل	Solution (of triangles)
	T
علمِ مثلث	Trigonometry
مسئلہ (اثباتی)	Theorem
مثلثی (نسبتیں)	Trigonometrical (ratios)
مماسس	Tangent
زاویہ بین	Theodolite
جداول (لوکارتمی)	Tables (of Logarithm)
	V
سہم الجیب، جیب معکوس	Versed sine
اُفقِ مرئی	Visible horizon (Offing)

ترقیم

مثلث کے زاویے	Angles of a triangle
ا، ب، ج	A, B, C
مثلث کے ضلعے	Sides of a triangle
ا، ب، ج	a, b, c
π	π

اغلاط نامہ

علمِ مثلّث مستوی

(طبع ثالث)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
فہرست مضامین ۲	۱۹	جب ط ز ط	جب ط < ط	۱۴۷	۹	√(۱ + ۵) ۸	√(۱ + ۵) / ۸
۵	۱۳	تنضیف	تنصیف	۱۵۱	۱۱	م ن ۱۱۱	م ن ۱۰
۶	۱	زیل	ذیل	۱۵۲	۱۲	(س۱ − س۳) / (۱ − س۰ + س۳)	(س۱ − س۳) / (۱ − س۲ + س۳)
۷	۲۰	تعدار	تعداد	۱۸۳	۹	دومتضل	دومتصل
۱۴	۱۸	− ـ / ۱۸۰	= π / ۱۸۰	۲۰۰	۱۰	۷۷۸۱۵۱۳	ز۷۷۸۱۵۱۳
۴۱	۶	اپے	اپنے	۲۴۹	۲	ج۱ جب۲ ب	ج۲ جب۲ ب
۵۶	نو شکل	م۲	م۴	۲۵۶	۱۰	گرزتی	گزرتی
۶۷	〃	[illegible]	لا	۲۶۴	۲۴	اتخفاضی	انخفاضی
۶۹	۱۳	یعی	یعنی	۲۷۳	۴	یایین	پائین
۷۵	۱	ب و غ	ب و عَ	۳۱۰	۱۰	ذوا ربعہ الاضلاع	ذوا ربعۃ الاضلاع
۱۰۸	۱۵	= سس ط	= سس طہ	۳۴۵	۱۰	۱-جب	۲ جب
۱۴۲	۴	√(۱ جب ۱)	√(۱ − جب ۲)	۳۶۴	شکل	۱ + ۹۰	۲ + °۹۰
〃	۱۵	۳/۲	۱/۲	۳۷۹	۱۴	(√۳ ۲۲ π۴/۲)	(√۳ ۲ + π۴/۲)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۹۸	۱۵	مساوانوں	مساواتوں
۴۲۲	۴	۵–......۱۲۰فٹ	۵- ۱۲۰ فٹ
۴۳۴	۲	عددو کے	عددوں کے
۴۴۰	۳	۸۴۸۴۹	۸۴۸۱۹
۴۴۲	۳	۹۵۷۴۰	۹۵۷۱۳
۴۵۲	۷	۱۶۲	۲۶۳
۴۵۹	۳	۳۱۱٫۸۴	۳٫۱۰۸۴
۴۶۲	۱۲	۲۱۴۲۵	۲۱۴۲۵۰
۴۶۵	۱	۹٫۸۱۴۰۳	۹٫۸۱۴۰۲
۴۶۶	۳	۳۹	°۳۹
″	″	۵	°۵۰
۴۶۶	۷	٫۹۰۰۹۶	٫۹۰۷۹۶
″	۸	۹٫۹۱۳۳۶	۹٫۹۱۳۳۶
۴۶۷	۱۰	٫۹۷۱۱۰	٫۹۷۱۱۱
۴۷۰	۸	۹٫۹ ۵۶۲۷	۸٫۹۵۶۲۷
″	۱۰	۹٫۱۲۹ :۹	۹٫۱۲۹۰۹
″	″	۹٫۱:۹۵۶	۹٫۱۰۹۵۶
″	۱۲	۹٫۲۳۱۳:	۹٫۲۳۱۳۰
۴۷۱	۸	۲۹۴۳۰	۴۹۴۳۰
۴۷۵	۳	°۵۱	°۵۲
″	۶	۳۱۷۲۴۳	۲۱۷۲۴۴
۴۷۶	۱۰	۳۲۱	۳۲۲